

Pour réconcilier les topographes avec les nombres complexes

■ Emmanuel CLEDAT

Les nombres complexes tirent leurs origines du milieu du XVI^e siècle, où ils auraient été introduits pour la première fois par Jérôme Cardan pour permettre la résolution d'équations polynomiales de degrés supérieur à 2. Ils sont nés en tant qu'artifices mathématiques ou "monstres du monde des idées", c'est ainsi que Gottfried Wilhelm Von Leibniz les appelait en référant à l'allégorie de la caverne de Platon. L'Histoire des mathématiques prend parfois des chemins détournés dans ses découvertes : ces nombres complexes sont passés du monde des idées au monde réel en s'incarnant dans tous les problèmes géométriques chers aux topographes.

Il a fallu près d'un demi-siècle pour qu'un premier lien soit établi entre les nombres complexes et la géométrie. François Viète remarque en effet qu'il existe une relation entre une racine cubique et le problème de la trisection d'un angle. [Flament 2003] nous invite à nous reporter à l'écrit original : [VIETÆ 1593] (en latin). Ce constat est ensuite généralisé par Abraham de Moivre qui note que la racine n-ième d'un nombre complexe peut se ramener à la division d'un angle en n-parties égales. C'est finalement un arpenteur danois du XVIII^e siècle : Caspar Wessel (dont l'histoire est contée dans [Brun 1959]) qui le premier a proposé (dans [Wessel 1797]) la représentation géométrique présentée dans nos cours de terminale, et retranscrite dans cette introduction. Caspar Wessel a apporté aux nombres complexes son expertise de géomètre, vérifiée lors de ses travaux de triangulation et de cartographie du Danemark. Cet article prendra le mouvement inverse en utilisant la simplicité du formalisme des nombres complexes pour reformuler ou redémontrer des résultats connus en topométrie [BRABANT 2011].

Un nombre complexe représente un point du plan (ou un vecteur joignant l'origine du repère au point, cf. figure 1). Ce point peut être soit défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y) , le complexe

MOTS-CLÉS

Nombres complexes, topométrie, point lancé, polygonaion, loi normale enveloppée, statistiques circulaires, calcul d'aire, intersection, relèvement, transformation de Helmert, moindres-carrés, Gauss-Helmert, transformation conforme, similitude directe, Géoréférencement

associé est alors $z = x + iy$, soit par ses coordonnées polaires : la distance d entre l'origine et le point (la norme) et l'angle orienté dans le sens direct (anti-horaire) θ entre l'axe des abscisses et le vecteur joignant l'origine au point représenté. La force des nombres complexes réside dans la faculté de passer d'une forme à une autre.

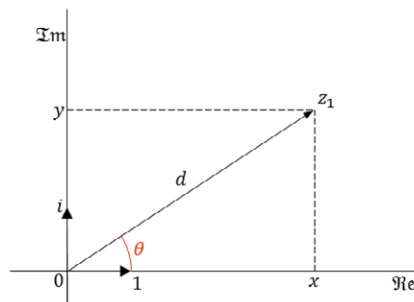


Figure 1. Définition d'un nombre complexe

On peut additionner les nombres complexes en utilisant la relation de Chasles (cf. figure 2).

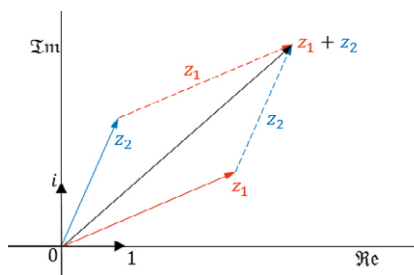


Figure 2. Addition de deux nombres complexes : Relation de Chasles

Il est aussi possible de les multiplier. Pour cela, on multiplie les normes et on additionne les arguments (cf. figure 3). Les propriétés de la fonction exponentielle reflètent le comportement des arguments des nombres complexes vis-à-vis de la multiplication, en effet, cette fonction transforme les multiplications en additions. Ainsi, si l'on note $z = d e^{i\theta}$, la multiplication se calcule alors :

$$z_1 z_2 = (d_1 e^{i\theta_1}) (d_2 e^{i\theta_2}) = d_1 d_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

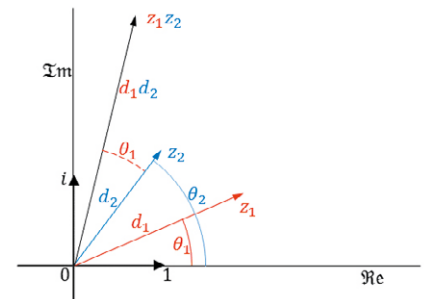


Figure 3. Multiplication de deux nombres complexes : multiplication des normes et addition des arguments

Si on considère le complexe d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 : $z = 0 + 1i$, ou tout simplement : i . Sa norme est 1 et son argument est $\pi/2$ (un angle droit). Multiplier ce nombre par lui-même revient à faire deux quarts de tour, sans s'éloigner pour autant de l'origine. Le résultat a pour norme 1 et pour argument π (un demi-tour), on retrouve la formule: $i^2 = -1$.

On peut s'étonner, dans cette définition que les distances et les angles ne se comportent pas de la même manière. Cela traduit la hiérarchie existante en géométrie entre ces deux grandeurs. Prenons l'exemple de la figure 4. Nous avons un ensemble de cinq nombres complexes : $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ que l'on multiplie par un même complexe S . La norme et argument de ce complexe représentent respectivement le facteur d'échelle et la rotation appliqués à notre ensemble. Il sera alors possible de translater ce nouvel ensemble $S \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ en lui additionnant un nombre complexe représentant la translation.

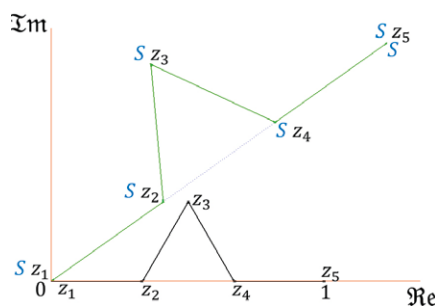


Figure 4. Multiplication d'un ensemble de nombres complexes par un complexe de rotation et d'échelle

Suite à la définition de l'addition et de la multiplication, il est possible de démontrer que toutes les règles de calculs utilisées pour manipuler des nombres réels restent applicables pour des nombres complexes. On dit que l'ensemble des nombres complexes forme un corps.

Point lancé

Le premier problème sur lequel les nombres complexes peuvent être appliqués est fondamental en topographie, mais aussi en artillerie, en scoutisme et en course d'orientation. Si un observateur se trouve à l'origine du repère et qu'il observe un point P , s'il est possible de mesurer la distance entre l'origine et ce point, ainsi que son gisement : l'angle orienté dans le sens horaire entre la direction du nord et le vecteur \vec{OP} , alors il est possible de déterminer la position du point P .

Pour traiter ce problème avec des nombres complexes, il faut redéfinir le plan complexe (figure 5, tableau 1 ou [CHOWN 2007] page 156). Son axe réel sera orienté vers le nord, et son axe imaginaire orienté vers l'est. Il faut prendre garde à l'inversion de l'axe Réel et Imaginaire par rapport à la notation précédente. Pour éviter toute confusion à cet endroit de l'exposé, on fixera la direction du nord comme étant celle du haut de la carte, et la direction de l'est comme étant celle de la droite de la carte. (Ce nord cartographique et cet est cartographique non parfaitement alignés avec le nord géographique ou avec le nord magnétique sont parfois notées y et x car elles n'ont pas de valeur physique.

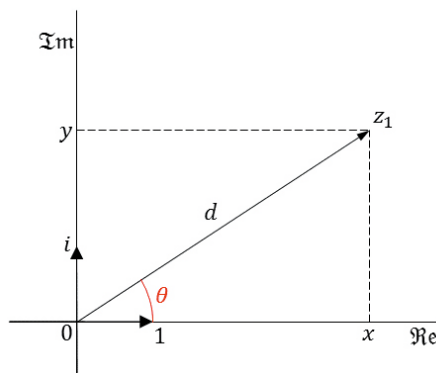


Figure 5 a. Plan complexe classique

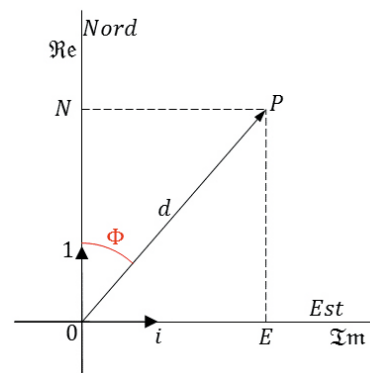


Figure 5 b. Plan complexe topométrique

Nous garderons les notations N et E pour éviter à tout prix d'écrire $y+ix$.

	Complexes classiques	Complexes topométriques
abscisse	x	E
ordonnée	y	N

Axe réel	\Re
Axe imaginaire	\Im

Tableau 1. Comparaison des nombres complexes classiques et des nombres complexes topométriques

Suite à cette définition, l'argument d'un nombre complexe correspond à son gisement Φ mesuré à l'origine. Le point visé P est représenté par le nombre complexe $z=de^{i\Phi}$. Réciproquement, si on connaît le nombre complexe z la distance entre l'origine et le point qu'il représente est $d=|z|$ et le gisement est $\Phi=\arg(z)$.

Si le point à partir duquel sont effectuées les mesures n'est plus l'origine, mais un point connu P_1 , et que le point visé est le point P_2 , alors, par simple translation :

$$z_2 = z_1 + d_{1\rightarrow 2} e^{i\Phi_{1\rightarrow 2}}$$

A partir de ce nouveau point, on peut à nouveau viser un autre point, et ainsi de suite. C'est le principe de la polygonalement lancé, qui généralise le principe du point lancé (cf. figure 6).

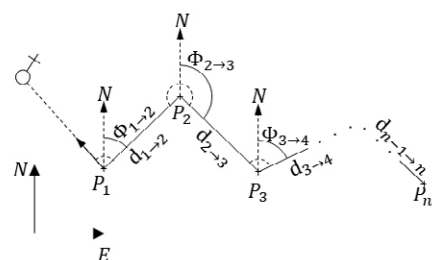


Figure 6. Polygonalement lancée

Visée d'orientation

Dans les deux problèmes précédents, nous avons raisonné comme si la direction du nord était connue, et que le gisement Φ entre le point stationné (duquel est effectuée la mesure) et le point visé (que l'on veut mesurer) était directement mesurable. Sur le terrain, il est souvent difficile de connaître la direction du nord avec précision (en particulier dans une forêt dense, ou dans un tunnel). On apprend chez les scouts à utiliser une boussole, il faut aligner le zéro du rapporteur avec la direction du nord, la direction du point visé est donnée directement sur le rapporteur. D'autres instruments permettent de mesurer la direction du nord (le gyroscope, sensible à la rotation de la terre). Cependant, en topographie courante, on s'oriente en visant un autre point dont on peut calculer le gisement :

$$\Phi_{1\rightarrow 2} = \arg(z_2 - z_1)$$

La visée d'un seul point permet de s'orienter (c'est-à-dire connaître la direction du nord). Quelle que soit la méthode utilisée, la direction du nord peut être comprise comme une mesure d'angle entre une direction arbitraire (mais fixe) de la graduation zéro d'un rapporteur ou du cercle horizontal d'un théodolite. Les problèmes commencent à venir lorsque nous avons plusieurs mesures d'angle dont il faut effectuer la moyenne. La première idée que l'on pourrait avoir pour tirer parti d'une série de mesures d'angles θ_k serait de prendre la moyenne :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k$$

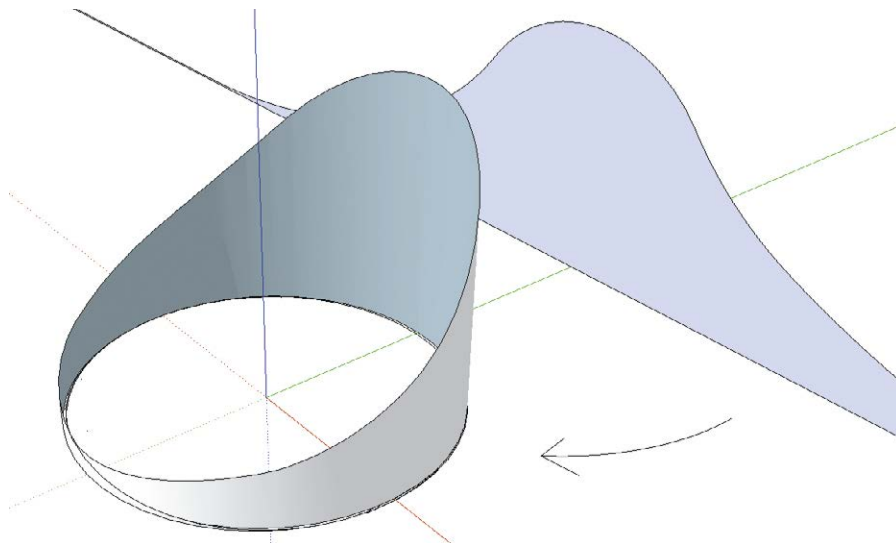


Figure 7. Loi Normale Enveloppée

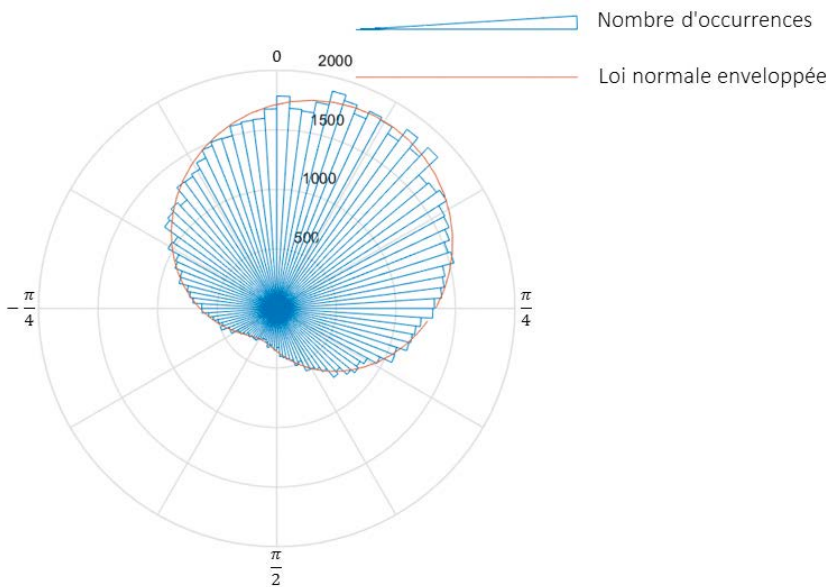


Figure 8. Simulation de 10^5 mesures d'angles d'écart-type 1.4 rad (presque un quart de tour)

L'écart-type de cette série de mesures sera donc :

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\theta_k - \bar{\theta})^2}$$

Il faut prendre garde à bien préparer les valeurs angulaires avant de les moyenner, de manière à ce que des directions proches soient représentées par des valeurs angulaires proches (il ne faut pas faire la moyenne de 359° et de 3° , mais de -1° et de 3°). Même en prenant ces précautions, il est inadéquat de calculer une moyenne d'angle. En effet, un calcul de moyenne suppose implicitement que les éléments moyennés suivent une distribution normale, ou du

moins qu'ils peuvent prendre des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Les angles ne sont pas des nombres réels comme les autres dès lors qu'ils sont définis à 2π près. C'est pourquoi, ils ne peuvent pas suivre une loi normale habituelle (qui admettrait des angles supérieurs à 2π). Pour construire la distribution suivie par ces angles semblable à la loi normale (représentée en arrière-plan de la figure 7), et l'enrouler sur le cercle unité (figure 7).

D'un point de vue mathématique, la densité de probabilité d'un point d'argument θ du cercle unité (un point bleu de la figure 9) s'exprime comme la somme

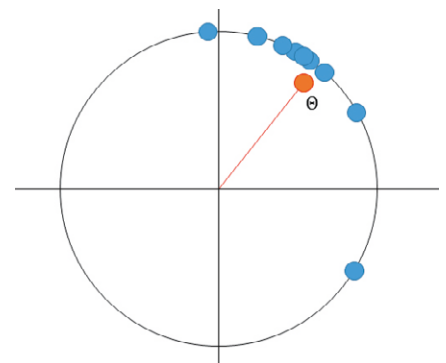


Figure 9. Série de mesures d'angle (en bleu), et centre de gravité de ces mesures (en rouge)

de la loi normale usuelle exprimée en chacune des expressions de l'angle θ (c'est-à-dire en $\dots\theta-4\pi, \theta-2\pi, \theta, \theta+2\pi\dots$). On peut effectuer une simulation numérique pour observer la distribution de données circulaires (en bleu sur la figure 8), et la loi normale enveloppée théorique (en rouge).

D'après les démonstrations données dans [Mardia 1999], il est nécessaire de calculer θ : le centre de gravité de chacun des points du cercle unités représentant une mesure d'angle (un point rouge de la figure 9). Plus ce point est proche de l'origine, plus les mesures sont dispersées.

$$\Theta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\theta_k}$$

La direction moyenne est alors la direction donnée par ce point moyen :

$$\bar{\theta} = \text{Arg}(\Theta)$$

Et l'écart-type a une expression relativement simple :

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{-2 \ln(|\Theta|)}$$

Ces formules se vérifient très bien numériquement, même pour de très fortes dispersions (d'écart-type supérieur au demi-tour). Si les mesure sont très peu dispersées (et c'est souvent le cas en pratique) il est possible de faire un développement limité de ces expressions pour retrouver le calcul classique de la moyenne et de l'écart-type. Ces formules en sont donc une généralisation plus rigoureuse.

J'invite le lecteur à se rapporter à la section IV 2.1 de [HULLO 2013] pour un panorama complet et rigoureux sur les statistiques circulaires.

Calcul d'aire

Un problème qui intéresse fortement les géomètres est le calcul des surfaces des terrains. Utiliser des nombres complexes pour le calcul des surfaces nécessite l'introduction de quelques notations mathématiques.

Soient deux complexes z_1 et z_2 alors $\bar{z}_1 z_2$ (où $\bar{\cdot}$ est le "complexe conjugué" de même partie réelle, mais de partie imaginaire opposée) a pour partie réelle le produit scalaire des vecteurs associés à z_1 et z_2 , et a pour partie imaginaire le déterminant de ces deux vecteurs : $\det(P_1, P_2)$.

Ce déterminant est l'aire du parallélogramme engendré par P_1 et P_2 , et donc le double du triangle engendré par P_1 et P_2 (cf. figure 10).

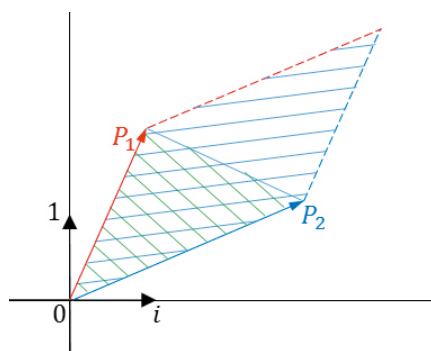


Figure 10. Parallélogramme engendré par P_1 et P_2 (hachures bleues), et du triangle engendré par P_1 et P_2 (hachures vertes).

En divisant une parcelle complexe en triangles, il est facile de calculer son aire comme par exemple dans le cas de la figure 11.

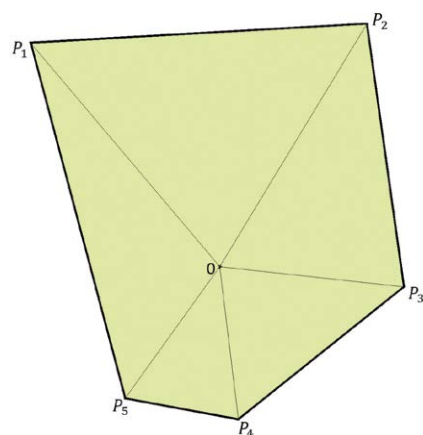


Figure 11. Calcul d'aire d'une parcelle lorsque l'origine est à l'intérieur de la parcelle

$$A = \frac{1}{2} \Im m \left(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \dots + \bar{z}_n z_1 \right)$$

Il est important de noter que z_1 et z_2 doivent être ordonnés dans le sens horaire, sinon, l'aire calculée sera négative. Cela montre donc que la formule reste correcte dans le cas où l'origine n'est pas à l'intérieur de la parcelle comme par exemple dans le cas de la figure 12.

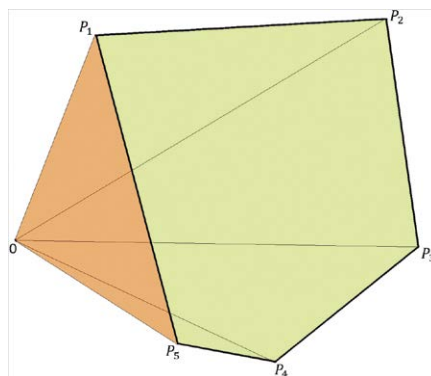


Figure 12. Calcul d'aire d'une parcelle lorsque l'origine est à l'extérieur de la parcelle, les parties extérieures sont comptées positivement puis négativement

Intersection

Un autre problème important en topométrie est celui de l'intersection. Supposons que l'on veuille déterminer la position I d'un point visible, mais non accessible (le sommet d'un clocher d'église par exemple). On peut le viser à partir de deux points connus en coordonnées P_1 et P_2 et procéder à une intersection des deux visées (cf. figure 13).

Si on avait pu mesurer la distance d_1 entre P_1 et I (où d_2 entre P_2 et I) on aurait pu déterminer I par simple point lancé. Le principe est de procéder en deux temps : calculer cette distance

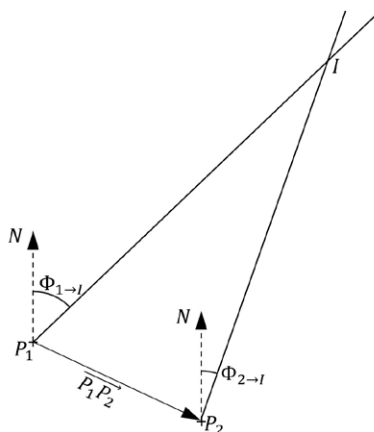


Figure 13. Intersection de deux visées

d_2 , et effectuer un point lancé à partir de P_2 . Pour cela, nous allons exprimer l'aire du triangle $P_1 P_2 I$ de deux manières différentes.

$$A = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{P_1 I}, \overrightarrow{P_1 P_2}) \\ = \frac{1}{2} \Im m(d_1 e^{-i\Phi_{1 \rightarrow I}} (z_2 - z_1))$$

Et de la même façon :

$$A = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{P_2 I}, \overrightarrow{P_1 P_2}) \\ = \frac{1}{2} \Im m(d_2 e^{-i\Phi_{2 \rightarrow I}} d_1 e^{i\Phi_{1 \rightarrow I}})$$

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$\begin{cases} d_2 = \frac{\Im m(e^{-i\Phi_{1 \rightarrow I}} (z_2 - z_1))}{\sin(\Phi_{1 \rightarrow I} - \Phi_{2 \rightarrow I})} \\ I = P_2 + d_2 e^{i\Phi_{2 \rightarrow I}} \end{cases}$$

Il existe une formule dérivée d'un raisonnement purement analytique, appelée formule de Delambre qui semble être aussi simple à utiliser que cette formule utilisant les nombres complexes. Cependant, il existe des cas particuliers pour lesquels la formule de Delambre souffre de singularités numériques. Une autre approche, purement géométrique est basée sur la formule des sinus dans un triangle (qui stipule que le rapport du sinus d'un angle par la longueur du côté opposé est constant quel que soit le sommet choisi) qui elle-même se démontre en calculant de trois manières différentes l'aire du triangle considéré. La formule proposée ici se rapproche très fortement de cette méthode géométrique, tout en étant très légèrement plus rapide. Finalement la formule utilisant les nombres complexes est une formule directement utilisable ou implémentable, donc possédant les mêmes avantages que la formule de Delambre, mais qui possède la même robustesse que la méthode géométrique puisque sa démonstration n'est rien d'autre qu'une approche algébrique de propriétés géométriques d'un triangle.

Relèvement

Une autre opération de topographie classique est le relèvement. Le but est de connaître la position du point I à partir duquel les mesures sont effectuées. Pour cela, trois points : P_A, P_B et P_C connus en coordonnées, mais non



accessibles (des clochers d'églises par exemple) sont visés. Cette fois-ci, l'orientation est inconnue (il n'est pas possible d'obtenir simplement la direction du nord). Les mesures ne sont plus des mesures de gisements entre le nord et les différents clochers, mais une mesure d'angle entre deux clochers (cf. figure 14).

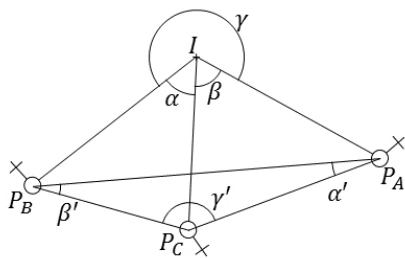


Figure 14. Calcul du relèvement

Ce problème en apparence simple a généré une littérature très abondante et ancienne. Nous allons cependant nous limiter à trois méthodes. La première, qui semble être la plus populaire, est la méthode de Collins. Les seules opérations algébriques requises par cette méthode sont le calcul de gisement entre deux points, et les calculs d'intersection, déjà décrits plus haut. L'apport des nombres complexes à cette méthode est donc minime (c'est pour cela que le lecteur désireux d'utiliser les nombres complexes pour ce calcul devra en premier lieu reprendre la méthodologie de la méthode de Collin's [Merminod 2008])

Une autre méthode, moins connue, et pour autant, d'une élégance délicate est la formule de Tienstra, aussi connue sous le nom de méthode barycentrique. Le principe, est de considérer que le point cherché I est le barycentre des points visés P_A, P_B et P_C avec les pondérations : $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$, où :

$$\begin{cases} \Omega_A = \frac{1}{\cot(\alpha) - \cot(\alpha')} \\ \Omega_B = \frac{1}{\cot(\beta) - \cot(\beta')} \\ \Omega_C = \frac{1}{\cot(\gamma) - \cot(\gamma')} \end{cases}$$

Il est montré dans [Porta 2009] que l'affixe du point I est donnée par :

$$z_I = \frac{\Omega_A z_A + \Omega_B z_B + \Omega_C z_C}{\Omega_A + \Omega_B + \Omega_C}$$

Cette formule a cependant un défaut, si la configuration des points P_A, P_B et P_C

est proche d'un alignement, les poids $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ devront être proches de $-\infty$ ou de $+\infty$ pour permettre à I de ne pas être dans cet alignement. Dans le cas limite où les points sont parfaitement alignés il sera impossible de déterminer les coordonnées de I , alors que ce serait possible en utilisant d'autres méthodes. Si les deux premières méthodes donnent peu d'opportunités aux nombres complexes de montrer leur efficacité, la dernière méthode présentée dans cet article tire pleinement parti des propriétés des nombres complexes. Cette méthode proposée par [PIERLOT 2014] est très récente dans l'histoire du relèvement (2014) et a été conçue dans le but de minimiser autant que possible le nombre d'opérations, et donc le temps de calcul nécessaire à calculer la position d'un point. Pour prouver l'efficacité de cette méthode, elle est comparée à 17 autres (dont la méthode barycentrique et celle de Collins) lors d'un parangonnage où sont minutieusement comptés le temps d'exécution et le nombre d'additions, de multiplications, de divisions, de racines carrées, et d'opérations trigonométriques. Cette méthode, détaillée ci-dessous peut paraître longue, mais n'est qu'une suite d'opérations simples.

$$z_{BA} = z_A - z_B$$

$$z_{BC} = z_C - z_B$$

$$T_{AB} = \cot(\alpha)$$

$$T_{BC} = \cot(\beta)$$

$$T_{CA} = \frac{1 - T_{AB} T_{BC}}{T_{AB} + T_{BC}}$$

$$C_{AB} = z_{BA} - i T_{AB} z_{BA}$$

$$C_{BC} = z_{BC} + i T_{BC} z_{BC}$$

$$C_{CA} = (z_{BC} + z_{BC}) - i T_{CA} (z_{BC} - z_{BA})$$

$$A = \overline{z_{BA}} z_{BC}$$

$$K = \Re(A) + T_{CA} \Im(A)$$

$$D = \Im(\overline{(C_{AB} - C_{BC})} (C_{BC} - C_{CA}))$$

$$z_I = z_B - i \frac{K}{D} (C_{AB} - C_{BC})$$

L'affixe z_I nous donne finalement la position du point stationné I . Le problème du relèvement, longtemps entre les mains des topographes a maintenant été repris par la communauté des roboticiens. Le sujet qui va suivre est un peu plus actuel pour les géomaticiens.

Transformation de Helmert

Un autre problème pour lequel les nombres complexes peuvent être utiles est le géo-référencement d'anciens plans, de photos aériennes, ou de relevés effectués sans référencements à des points connus (station libre). On connaît certains points connus en coordonnées (des bornes, les coins d'une maison ou d'autres points caractéristiques) P_1, P_2, \dots, P_n et on observe ces mêmes points sur un ancien plan ou dans un repère local défini par un appareil de mesure (station totale ou laser scanner) p_1, p_2, \dots, p_n .

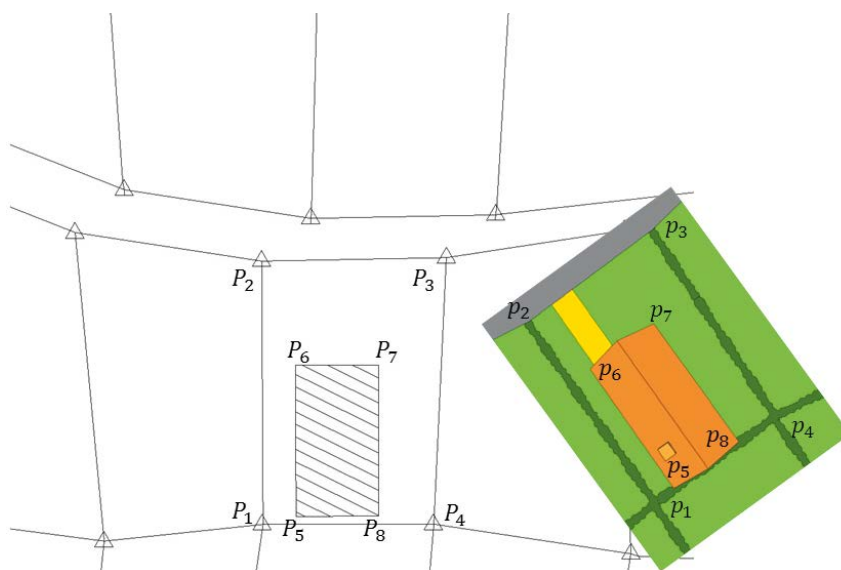


Figure 15. Ajustement d'un plan sur des points connus

La transformation permettant de passer de l'image à la réalité est :

$$Z_i = T + R z_i$$

où T est le vecteur de translation, et R est le complexe exprimant simultanément le facteur d'échelle et la rotation. Si nous avons voulu utiliser une formulation classique, sans nombre complexe, on se rendrait compte que la matrice représentant R contient des termes redondants : elle a quatre éléments là où un nombre complexe n'en a que deux (partie réelle et partie imaginaire).

$$\begin{bmatrix} E_i \\ N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_E \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ n_i \end{bmatrix}$$

Après mesure de n points, on peut construire le système surdéterminé suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_v - v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} T \\ R \end{bmatrix}$$

v représente les petites erreurs entachant les mesures des points P_i . Là encore, le même système écrit sans nombre complexe contient de l'information redondante. Le formalisme des nombres complexes permet non seulement de réduire l'espace mémoire utile pour stocker ces matrices, mais aussi le temps utile pour les créer.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 \\ N_1 \\ E_2 \\ N_2 \\ \vdots \\ E_n \\ N_n \end{bmatrix}}_v - v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & e_1 & -n_1 \\ 0 & 1 & n_1 & e_1 \\ 1 & 0 & e_2 & -n_2 \\ 0 & 1 & n_2 & e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & e_n & -n_n \\ 0 & 1 & n_n & e_n \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} T_E \\ T_N \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Ces deux systèmes peuvent être résolus en utilisant le principe des moindres carrés, les nombres complexes ont réduit le calcul des paramètres de la transformation de Helmert à un ajustement affine, aussi appelé modèle linéaire simple ou régression linéaire à une seule variable explicative (dans notre cas cette variable est R). Le résultat est obtenu directement, sans processus itératif (en revanche, s'il n'y a pas de facteur d'échelle, il faut que la norme de R soit unitaire, donc imposer la contrainte : $R\bar{R} = 1$. Le nombre d'itérations nécessaire pour imposer cette contrainte est inférieur d'un facteur deux par rapport au nombre d'itérations requises par une méthode classique).

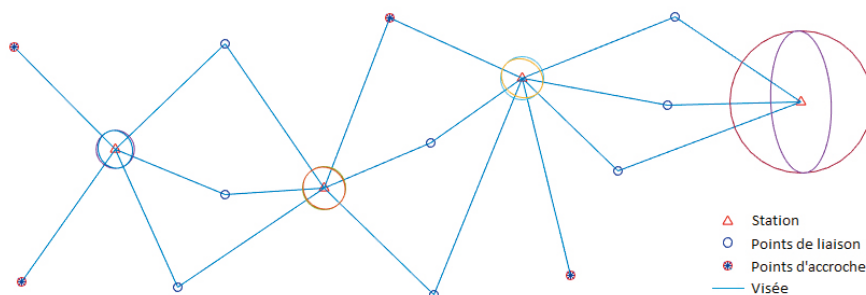


Figure 16. Réseau lasergrammétrique

$$\begin{bmatrix} T \\ R \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T v$$

De la même façon qu'une fonction affine est un cas particulier de fonction polynomiale, plutôt que de faire une régression linéaire de nombre complexe, il est également possible de faire des régressions polynomiales [MILLION 2002] et [MILLION 2004]. Cela permet d'obtenir toute une gamme de transformations dites "conformes", c'est-à-dire, qui conserve les angles (ce qui est souvent nécessaire dans le domaine de la cartographie). Cette propriété de conformité est démontrée dans [BELORIZKY 2007]. Concrètement, la formule permettant de passer de l'image à la réalité est :

$$Z_i = R_0 + R_1 z_i + R_2 z_i^2 + \dots + R_k z_i^k$$

En pratique les termes $R_2 \dots R_k$ sont souvent très petits. Le système permettant de déterminer ces coefficients R_j fait alors intervenir une matrice de Vandermonde.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_v - v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^k \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^k \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix}$$

Je laisse le soin au lecteur sceptique vis-à-vis de l'efficacité des nombres complexes de traduire cette dernière formule avec des nombres réels. Il existe encore d'autres méthodes de géoréférencement, non conformes. Une synthèse de ces méthodes est effectuée dans [BAKKOUCH 2015]. La méthode de la transformation de Helmert peut être généralisée d'une autre manière. Supposons que l'on ait plus un seul plan à géoréférencer mais plusieurs les uns aux autres. Ou alors que l'on ne fasse plus une seule station libre, mais plusieurs qui visent des points communs entre deux stations (c'est typiquement le cas d'un réseau

lasergrammétrique, comme sur la figure 16). Si ces points sont connus auparavant (comme dans le cas de la station libre), on les appellera points d'accroche ; s'ils sont inconnus, mais permettent de lier géométriquement deux stations, on les appellera points de liaisons. Là encore, il est possible d'effectuer le calcul de compensation avec des nombres complexes en représentant chaque station par deux nombres complexes : l'un exprimant la position, l'autre, la rotation.

De la même façon qu'à l'issue d'une compensation classique, il est possible d'obtenir la matrice des variances-covariances (complexe) des paramètres compensés. La variance de l'angle représentant la rotation d'une station est donnée par le terme diagonal (réel) correspondant au complexe de rotation de la station (comme dans le cas habituel). Pour représenter l'erreur sur la position d'un point, les méthodes de compensations classiques permettent de dessiner des ellipses d'erreur (représentées sur la figure 16), donc utilisent trois paramètres. Il ne faut donc pas espérer caractériser avec un seul nombre complexe (qui n'a que deux composantes) l'ensemble des paramètres de l'ellipse. Le terme diagonal de la matrice de variance-covariance complexe correspondant à la position du point considéré contient cependant une information essentielle : la dimension maximale de l'ellipse d'erreur. La méthode utilisant des nombres complexes synthétise l'erreur sur un point par une seule valeur et permet une représentation par un cercle d'incertitude (représentée sur la figure 16). Depuis le début de ce chapitre, les seules données que l'on considère entachées d'erreur sont les Z_i (points réels). Cependant, les z_i (points image) sont aussi entachés d'erreur. Pour en prendre



compte, il ne faut plus considérer un problème de moindres carrés classique, dit paramétrique, mais un modèle appelé modèle de Gauss-Helmert [Merminod 2011]. Les équations, plus compliquées que dans le modèle classique, peuvent là encore être simplifiées grâce aux nombres complexes (les calculs effectués sur la *figure 16* utilisent en fait la méthode de Gauss-Helmert).

La méthode permettant de passer de chacun des systèmes complexes présentés dans ce chapitre au système réel équivalent est de remplacer chaque nombre complexe par son image suivant le morphisme d'anneaux :

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ a + ib & \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le nombre de lignes et de colonnes de chaque matrice est alors multiplié par deux. Sachant que les opérations les plus coûteuses sont les inversions de matrice (complexité cubique), le passage en nombre complexe permet théoriquement de diviser le nombre d'opérations par 8 (cependant, ces opérations sont plus compliquées avec des nombres complexes qu'avec des nombres réels). En effectuant des simulations avec Matlab, on se rend compte que l'utilisation des nombres complexes a divisé par deux le temps de calcul. Finalement, le temps de construction des matrices est divisé par deux, le temps de calcul matriciel est aussi divisé par deux, et le nombre d'itérations est encore une fois divisé par deux.

Conclusion

A travers ces différents exemples, les nombres complexes ont montré leur efficacité et leur adéquation face aux problèmes des topographes. Ils permettent de prendre du recul sur les problèmes étudiés de manière à les appréhender de manière globale plutôt de se focaliser sur les aspects strictement calculatoires. D'autres part, ils sont le plus petit dénominateur commun de l'ensemble des méthodes topométriques. S'il est long de les introduire, ils permettent d'économiser de nombreux calculs rebutants. Le monde de la topographie connaît un autre exemple manifeste d'utilisation

d'outils mathématiques abstraits permettant de simplifier la compréhension d'un problème. C'est le problème des moindres-carrés, formalisé par le calcul matriciel. Les formules initiales de Gauss [CHABERT 1989], ont pu être synthétisées de manière drastiquement plus compréhensible [MERMINOD 2011]. De manière générale en mathématique, la création d'outils puissants (nombres complexes, algèbre linéaire, topologie...) permet d'obtenir une vue d'ensemble des problèmes abordés et de mieux en saisir l'essence. ●

Remerciements

Je tiens à remercier les relecteurs de cet article : Jean-François Hullo, Françoise Duquenne et Bertrand Merminod pour leurs conseils positivement critiques.

Contact

L'ensemble des algorithmes développés pour cet article est disponible auprès de l'auteur :

Emmanuel CLEDAT
emmanuel.cledat@epfl.ch

Bibliographie

- BRABANT M., PATIZEL B., PIEGLE A. et MULLER H.** [2011] *Topographie opérationnelle, Mesures - Calculs - Dessins - Implantations*. Eyrolles
- BAKKOUCH L., BIHR H., RUGGERI P., FOLLIN J-M, SIMONETTO E. et TOUZARD P.** [2015] *Comparaison de méthodes de recalage d'images pour le géoréférencement de clichés anciens* Revue XYZ n°142 pp. 53-61
- BELORIZKY E.** [2007]. *Outils Mathématiques à l'usage des Scientifiques et Ingénieurs*, Collection Grenoble Science
- BRUN V.** [1959] *Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes*. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 12, n°1.
- CHABERT J.L.** [1989]. *Gauss et la méthode des moindres carrés*, Revue d'histoire des sciences, volume 42, pp 5-26
- CHATTERJI S. D.** [1997]. *Cours d'Analyse 2, Analyse complexe*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- CHOWN M.** [2007] *The Never-Ending Days of Being Dead: Dispatches from the Front Line of Science*
- FLAMENT D.** [2003] *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS Histoire des Sciences.
- HULLO, J.-F.** [2013] *Consolidation de rele-*

vés laser d'intérieurs construits : pour une approche probabiliste initialisée par géolocalisation, thèse de doctorat, Université de Strasbourg.

MARDIA KANTI V. et JUPP PETER E. [1999] *Directional Statistics*, Wiley series in probability and statistics

MERMINOD B. [2008]. *Topométrie terrestre*. école polytechnique Fédérale de Lausanne, Institut du développement territorial Géomatique-Topométrie.

MERMINOD B. [2011]. *Méthodes d'estimation*. École polytechnique Fédérale de Lausanne, Institut du développement territorial Géomatique-Topométrie.

MILLION C. [2002] *L'application d'un système de coordonnées dans un autre référentiel* Revue XYZ n°90 pp. 64-67

MILLION C. et CHAMBARETAU J. [2004] *Transformation polynomiale par fonction radiales de base, les conséquences des changements de référentiels, Application au cas des raccordements parcellaires* Revue XYZ n°99 pp. 57-61

PIERLOT V. et VAN DROOGENBROECK M. [2014]. *A New Object Triangulation Algorithm For Mobile Robot Positioning*. IEEE Transactions on Robotics, 566-577

PORTA J. et THOMAS F. [2009]. "Concise Proof of Tienstra's Formula." J. Surv. Eng., 10.1061/(ASCE)0733-9453(2009)135:4(170), 170-172

VIETÆ Francisci [1593] *Supplementum geometriæ. Ex opere restitutæ mathematicæ analysis, seu Algebræ novæ*. Excudebat Lametius Mettayer, Typographus Regius

WESSEL Caspar [1797] *Essai sur la représentation analytique de la direction : traduction du mémoire intitulé "Om Direktionens analytiske betegning, et Forsøg anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning"*

ABSTRACT

Complex number are widely used in number of fields such as electronic, signal processing and Quantum Mechanics. However, they are also very powerful to deal with much older problems like planar geometry. This article suggest a way to use complex numbers formalism for land surveying purpose. First, it gives a short overview of some basics properties of complex numbers, and it quite quickly show how there can be used to solve several problem such as the one of the traverse, of intersection, of resection, of georeferencing... Complex number permit to reduce not only the length of formulae and their proof but also the computing time.