

Barrage et retenue de Plan d'Aval.

# Détermination de la déviation de la verticale sur le barrage de Plan d'Aval, sans aucune instrumentation spéciale, avec une précision de 0,4 mgon

■ Thomas TOUZÉ

*Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de détermination de la déviation de la verticale à partir de mesures tachéométriques corrigées de la réfraction et de lignes de base GNSS. Si l'état de l'art est bien respecté, une précision de l'ordre de 0,3 mgon (1'') sur une visée de 1 km semble tout à fait atteignable. Nous présentons ainsi les résultats obtenus lors de la surveillance de deux barrages EDF dans les Alpes ayant permis de déterminer la déviation de la verticale avec une incertitude à 68 % de 0,4 mgon (1.3'') et en cohérence avec la valeur déduite du géoïde.*

## MOTS-CLÉS

Déviation de la verticale, techniques terrestres de la géodésie

## Un mot sur les unités angulaires

La déviation de la verticale est, avec la cote du géoïde, l'une des clefs de voûte des techniques terrestres de la géodésie, à cheval entre la géodésie physique et la topométrie. Dans la première, les angles sont majoritairement définis en degrés sexagésimaux tandis que la seconde – en dehors de la communauté anglo-saxonne – emploie majoritairement les gons (anciennement grades ou gr). Notre objectif étant de réhabiliter la déviation de la verticale auprès des topographes, nous avons choisi d'utiliser exclusivement dans cet article les gons et sous-unités décimales. Nous utiliserons également le terme de cc (centième de centième) employé en Suisse tel que  $1 \text{ cc} = 1 \text{ dmgr} = 0,1 \text{ mgon}$ .

## Introduction

Dans notre article [1] publié dans le XYZ n° 171, après avoir étudié l'influence de la déviation de la verticale sur les formules de réduction des distances à l'ellipsoïde, nous avons affirmé – sans démonstration – qu'il était possible, à partir de ces formules, d'obtenir une nouvelle méthode de détermination de la déviation de la verticale à partir d'observations GNSS et tachéométriques. Dans cet article, nous allons, dans un

premier temps, montrer comment cette relation peut s'obtenir. Dans un second temps, nous montrerons comment elle peut être utilisée en pratique en l'illustrant par un chantier d'EDF DTG, en l'occurrence le contrôle de la dénivelée entre les barrages de Plan d'Amont et Plan d'Aval en 2020.

Dans un dernier temps, nous estimerons l'incertitude de ce résultat à partir de laquelle nous réfléchirons à la valeur ajoutée de cette méthode ainsi qu'à ses limites actuelles.

## La déviation de la verticale depuis la réduction des distances

### Notations

Plaçons-nous dans le cadre de la figure 1. Soit deux points distincts à la surface de la Terre A et B, suffisamment proches l'un de l'autre pour que l'ellipsoïde de référence soit assimilable à une sphère de rayon R et de centre C.

Dans tout l'article, nous considérerons les notations suivantes :

- R : Rayon de courbure de l'ellipsoïde de référence dans le plan de la visée de A à B ;
- $\alpha$  : Azimut géodésique de la visée de A à B ;
- $\beta$  : Angle au centre de la Terre de la visée ;
- c et l : Respectivement corde et arc d'ellipsoïde de A à B ;
- $h_A$  et  $h_B$  : Hauteurs ellipsoïdales des points A et B ;
- $\Delta h = h_B - h_A$  : Différence de hauteur ellipsoïdale de A à B ;
- D : Distance inclinée de A à B ;
- $\zeta$  : Angle en A entre la normale à l'ellipsoïde et la visée ;
- $\zeta^*$  : Angle zénithal vrai (corrigé de la réfraction) ;
- $d^* = D \sin \zeta^*$  : La distance horizontale ;
- l et S : Hauteurs, respectivement, d'instrument et de prisme.

Ajoutons, en figure 2, la direction de la verticale locale en A et l'angle zénithal  $\zeta^*$  de la visée de A à B. La différence  $\theta$  entre  $\zeta$  et  $\zeta^*$  correspond à l'écart angu-

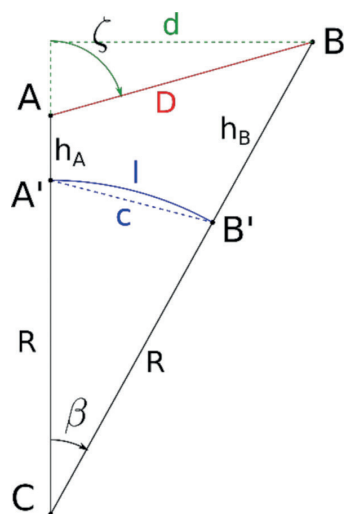


Figure 1. Schéma général de la réduction à l'ellipsoïde de la distance inclinée.

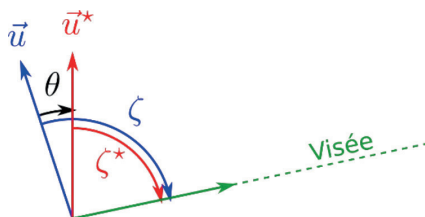


Figure 2. Normale à l'ellipsoïde u et verticale locale  $u^*$ , ainsi que les angles respectifs  $\zeta$  et  $\zeta^*$  définissant la visée.

laire entre les projections, dans le plan de la visée, de la normale à l'ellipsoïde et la verticale locale. C'est l'effet de la déviation de la verticale sur notre visée de A à B. Cet angle s'exprime en fonction des composantes est et nord de la déviation de la verticale, respectivement notés  $\eta$  et  $\xi$ , et de l'azimut  $\alpha$  selon la formule suivante ([2] chap. 5 formule 34) :

$$\theta = \zeta - \zeta^* = \eta \sin \alpha + \xi \cos \alpha$$

### Formulaire de réduction des distances

À l'aide de la loi des cosinus dans la figure 1, il est possible de démontrer que la corde de l'ellipsoïde c respecte la relation suivante :

$$c^2 = \frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R}\right)}$$

De plus, nous pouvons aisément établir, par trigonométrie dans la figure 1, que :

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{c}{2R}$$

Ainsi que  $\sin \beta = \frac{D \sin \zeta}{R + h_B}$

Soit un angle x. On sait que

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ &= \pm 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat pour  $x = \beta/2$ , puis en l'élevant au carré, nous obtenons

$$\sin^2 \beta = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$$

C'est-à-dire

$$\frac{D^2 \sin^2 \zeta}{(R + h_B)^2} = \frac{c^2}{R^2} \left(1 - \frac{c^2}{4R^2}\right)$$

Si nous appliquons un développement de Taylor à l'ordre 1 sur  $\sin^2 \zeta$ , nous obtenons

$$\sin^2 \zeta \approx \sin^2 \zeta^* (1 + 2\theta \cot \zeta^*)$$

### Résultat

En combinant nos deux derniers résultats, en substituant à c son expression

et en introduisant la distance horizontale  $d^*$ , nous pouvons établir que

$$\theta \approx \frac{\tan \zeta^*}{2} \left( \frac{D^2 - \Delta h^2}{d^{*2}} \left( 1 + \frac{\Delta h}{R + h_A} - \frac{D^2 - \Delta h^2}{4(R + h_A)^2} \right) - 1 \right)$$

Vu la grandeur du rayon de la Terre par rapport aux autres quantités, nous pouvons raisonnablement simplifier cette expression pour obtenir, *in fine*

$$\theta \approx \frac{\tan \zeta^*}{2} \left( \frac{D^2 - \Delta h^2}{d^{*2}} \left( 1 + \frac{\Delta h}{R} \right) - 1 \right)$$

Pour permettre au lecteur d'éviter un écueil sur lequel nous nous sommes temporairement échoués, le terme  $\Delta h/R$  ne doit pas être négligé. De ce résultat, nous pouvons déduire les expressions des dérivées partielles suivantes, qui serviront à la propagation des incertitudes.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta^*} = -(1 + 2\theta \cot 2\zeta^*)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial D} = \frac{\tan \zeta^*}{2} \frac{\Delta h^2}{d^{*2}} \left( 1 + \frac{\Delta h}{R} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \Delta h} = \frac{\tan \zeta^*}{2} \left( \frac{D^2 - \Delta h^2}{R d^{*2}} - \frac{2\Delta h}{d^{*2}} \left( 1 + \frac{\Delta h}{R} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = -\frac{\Delta h \tan \zeta^*}{2R^2} \frac{D^2 - \Delta h^2}{d^{*2}}$$

## Mesures des barrages de Plan d'Amont et de Plan d'Aval

Les barrages de Plan d'Amont et de Plan d'Aval sont situés à proximité de la commune d'Aussois en Savoie. En septembre 2020, du fait d'une bathymétrie prévue sur la retenue de Plan d'Aval,



Figure 3. Visée réciproque entre les barrages de Plan d'Amont et de Plan d'Aval.



il a été nécessaire de densifier le réseau de points connus dans ce secteur. Ce fut l'occasion de contrôler la dénivelée entre les deux barrages successifs à l'aide de visées réciproques simultanées, telles que décrites dans [3], entre les points AVA102 et AMO101 (*figure 3*). La densification des points de référence ayant été faite par GNSS statique pendant une nuit entière, nous disposons donc de 17 h d'observations sur cette ligne de base.

### ■ Résultat des traitements des visées réciproques simultanées

En nous appuyant sur la méthode décrite dans [3], nous avons effectué une combinaison de visées réciproques quasi simultanées et de visées simultanées quasi réciproques de la manière suivante :

- mise en place de points temporaires AVA102.1 et AMO101.1 à quelques mètres des points respectifs AVA102 et AMO101 ;
- visées depuis AVA102 vers AVA102.1 et AMO101 ;
- visées simultanées quasi réciproques de AVA102 vers AMO101.1

et de AMO101 vers AVA102.1 (*voir la figure 4*) ;

- visées depuis AMO101 vers AMO101.1 et AVA102.

Ce mode opératoire permet d'encadrer les visées simultanées quasi réciproques par les visées rigoureusement réciproques, mais décalées dans le temps d'une dizaine de minutes (quasi simultanées). De cette manière, en moyennant les dénivelées, nous pouvons contrôler l'absence de biais dus aux variations du coefficient de réfraction dans le temps et dans l'espace.

À l'aide de toutes ces mesures tachéométriques, répétées trois fois et dans les deux positions de la lunette, il a été possible de calculer la dénivelée de AVA102 à AMO101 en moyennant celles issues des visées réciproques quasi simultanées ainsi que des visées simultanées quasi réciproques.

Connaissant cette dénivelée, corrigée de la réfraction, nous avons pu en déduire, pour chaque visée, l'angle zénithal vrai corrigé de la réfraction. Les résultats de ces corrections sont visibles en *tableau 1*.

Station	Visée	I [m]	S [m]	D [m]	$\zeta^*$ [gon]	d* [m]
AVA102	AMO101	1.706	1.622	1180.854	92.9837	1173.689
AMO101	AVA102	1.622	1.706	1180.855	107.0280	1173.667

**Tableau 1.** Mesures corrigées issues des visées réciproques simultanées entre AMO101 et AVA102. Les angles zénithaux sont ici corrigés de la réfraction.

Points	E [m]	N [m]	h [m]	$\Delta E$ [m]	$\Delta N$ [m]	$\Delta h$ [m]
AVA102	992023.568	6467430.615	2002.780			
AMO101	991849.146	6468590.035	2132.891	-174.422	1159.420	130.111

**Tableau 2.** Résultat du post-traitement de la ligne de base AVA102 - AMO101. Les coordonnées sont exprimées dans le système RGF 93 en projection Lambert 93 et en hauteurs ellipsoïdales.

Station	Visée	$\gamma$ [gon]	V [gon]	$\alpha$ [gon]
AVA102	AMO101	3.0020	390.4940	393.4961
AMO101	AVA102	3.0008	190.4940	193.4948

**Tableau 3.** Azimuts géodésiques des visées AVA102 vers AMO101 et réciproquement déduites des coordonnées projetées RGF 93 Lambert 93.

Station	Visée	$\nu$ [m]	$\rho$ [m]	$\alpha$ [gon]	R [m]
AVA102	AMO101	6397602	6393621.0	393.4961	6393662.4
AMO101	AVA102	6397602	6393621.0	193.4948	6393662.4

**Tableau 4.** Calculs du rayon de courbure de l'ellipsoïde GRS80 selon les deux visées réciproques.

### ■ Résultats des mesures GNSS

Parmi tous les points mesurés, nous n'avons retenu que la ligne de base nous intéressant et nous l'avons post-traitée en statique à l'aide du logiciel *Trimble Business Center*. Les coordonnées du point AVA102 ont été obtenues à l'aide des stations permanentes du RGP les plus proches. Celles d'AMO101 s'appuient sur AVA102 et du vecteur les reliant.

### ■ Azimut et rayon de courbure

De ces coordonnées en RGF 93 en projection Lambert 93, nous pouvons déduire le gisement V de AVA102 vers AMO101 ainsi que les convergences du méridien  $\gamma$  de notre projection en ces deux points. Cela permet d'obtenir les azimuts géodésiques  $\alpha$  dans le *tableau 3*. De la même manière, à l'aide des formules de géodésie géométrique en [4], nous pouvons calculer les rayons de courbure extrema de l'ellipsoïde en chacun de nos deux points, puis en déduire le rayon de courbure pour chacune des deux visées. Les notations  $\nu$  et  $\rho$  sont ici conforme à [4].

### Estimation de la déviation de la verticale

Désormais, nous disposons de presque tous les éléments nécessaires à l'application de notre formule. Il ne nous reste qu'à calculer la différence de hauteur ellipsoïdale du centre optique du tachéomètre en AVA102 vers le centre optique du prisme en AMO101. Il suffit de corriger la différence de hauteur GNSS des hauteurs d'instrument et de prisme.

### ■ Résultats

Dans le *tableau 6*, nous exposons les valeurs de déviations de la verticale, avec les dérivées partielles, sur les visées réciproques de AVA102 vers AMO101. Nous obtenons une déviation de 21,4 cc. Nous remarquons avant tout que les déviations calculées aux deux extrémités sont de signes opposés et d'amplitudes égales. Le premier fait s'explique par la définition de  $\theta$  qui est l'effet de la déviation de la verticale sur une visée d'azimut donné. La déviation de la visée réciproque doit nécessairement être de signe opposé.



Figure 4. Comment fonctionne ce fichu talkie-walkie ? Préparation des visées réciproques.

L'égalité des amplitudes est anormale et un peu subtile. Du fait des ondulations des surfaces équipotentielles de pesanteur, les composantes est et nord de la déviation de la verticale varient dans l'espace. Ainsi, de AVA102 à AMO101, il existe une variation de la déviation de la verticale. Si nous avions disposé des angles zénithaux vrais, notre modèle aurait – en toute vraisemblance – correctement restitué les déviations de la verticale aux deux extrémités de notre visée réciproque. Dans cet exemple, pour nous approcher au mieux de ces angles vrais, nous avons utilisé les angles corrigés de la réfraction en moyennant des visées réciproques. Ces moyennes, de fait, imposent une symétrie, non seulement sur le coefficient de réfraction, mais aussi sur la déviation de la verticale. Ce lien profond

entre la réfraction et les déterminations tachéométriques de la déviation de la verticale avait déjà été mis en évidence par Featherstone et Rüeger dans [5]. Ce fait pourrait vraisemblablement être surmonté en mesurant le profil de température de AVA102 à AMO101 afin d'appliquer la méthode de correction de la réfraction que nous avons proposée dans [6].

L'étude des dérivées partielles nous permet de déduire qu'une erreur de 1 cc sur la déviation de la verticale peut être due à des erreurs approximativement de 1 cc sur l'angle zénithal, de 20 mm sur la distance inclinée, de 2 mm sur la différence de hauteur et de 100 km sur le rayon de la Terre. Nous constatons que les mesures les plus critiques pour la qualité de la détermination de la déviation de la verticale sont ici l'angle

zénithal, puis la différence de hauteur ellipsoïdale.

En étudiant les résultats et les formules définissant les dérivées partielles, nous pouvons déduire qu'à courte distance, la principale limite sur la précision atteignable sera due à la différence de hauteur. En effet, il semble difficile d'espérer une précision meilleure que quelques millimètres sur cette quantité. Dès lors, pour que l'effet angulaire soit négligeable, il faut que la distance soit longue. *A contrario*, sur de longues distances, le paramètre limitant la précision atteignable sera l'angle zénithal du fait des effets de la réfraction augmentant au carré de la distance horizontale [3]. Même l'emploi soigneux de visées réciproques simultanées sur de longues visées risque de laisser passer suffisamment de bruit résiduel pour dégrader significativement l'estimation de la déviation de la verticale.

Forts de ces constats, il semble que cette nouvelle méthode permettant de déterminer la déviation de la verticale soit appropriée pour des visées de l'ordre de 1 km  $\pm$  300 m. De plus amples expériences seraient souhaitables pour affiner ces conclusions.

### ■ Propagation des incertitudes

Vu la longueur de la ligne de base, en l'occurrence 1,2 km, la durée de la session, à savoir 17 h et la dénivelée modérée de 130 m, nous estimons

Station	Visée	I [m]	S [m]	$\Delta h$ [m]	$\Delta h$ opt [m]
AVA102	AMO101	1.706	1.622	130.111	130.028
AMO101	AVA102	1.622	1.706	-130.111	-130.028

Tableau 5. Différences de hauteurs ellipsoïdales entre les centres optiques des instruments stationnés.

Station	Visée	$\theta$ [cc]	$d\theta / d\zeta$ [/]	$d\theta / dD$ [cc/mm]	$d\theta / d\Delta h$ [cc/mm]	$d\theta / dR$ [cc/km]
AVA102	AMO101	-21.4	-1.0003	0.0598	-0.5426	-0.0091
AMO101	AVA102	21.4	-1.0003	-0.0597	-0.5426	-0.0091

Tableau 6. Déviation de la verticale et dérivées partielles de la visée de AVA102 vers AMO101, à partir des observations tachéométriques et GNSS.



l'incertitude, à 68 % soit 1 sigma, de la différence de hauteur ellipsoïdale à 5 mm. Les deux tachéomètres employés lors de cette expérience étaient des Leica TDA5005. Ces instruments ont des incertitudes de mesures, à 1 sigma, de 0,6 mm + 1 ppm pour les distances et 1,5 cc pour les angles. Les réflecteurs employés étaient des prismes de précision donnés à 0,3 mm. Ces prismes étaient montés sur des alidades de précision à nivelles toriques. Ainsi, pour une visée longue de 1,2 km, nous obtenons une incertitude sur la distance D de 1,8 mm. Sur une telle distance, l'effet angulaire de telles incertitudes de prismes ou de centrage devient négligeable, donc l'incertitude de l'angle zénithal dépend de l'erreur instrumentale et des effets résiduels de la réfraction. Vu la répétabilité et la reproductibilité à 1 mm de nos dénivelées, il semble conservatif d'estimer l'incertitude de l'angle zénithal corrigé de la réfraction à 3 cc.

Enfin, nous estimons très grossièrement l'incertitude du rayon de courbure de l'ellipsoïde à 1 km. Tout cela nous permet, par propagation des incertitudes, d'estimer l'incertitude à 1 sigma de notre détermination de la déviation de la verticale à 4,0 cc.

### ■ Déviation déduite de RAF18 au niveau du géoïde

Depuis les quatre points de la grille RAF18 les plus proches de notre site, l'ajustement d'une sphère a permis d'estimer les cotes du géoïde et les composantes est et nord des déviations de la verticale au niveau du géoïde sur les points AVA102 et AMO101. Nous obtenons les valeurs dans le *tableau 7*.

Nos résultats sont du même ordre de grandeur et les signes coïncident. Toutefois, nous remarquons qu'à la différence de nos résultats, les amplitudes des valeurs déduites de RAF18 ne sont pas égales, mais différent de 11,6 cc. En effet, les directions des verticales locales en ces deux points doivent être proches, certes, mais n'ont pas de raison d'être

identiques par rapport à leurs normales à l'ellipsoïde. L'amplitude moyenne déduite de RAF18 est de 22,6 cc ce qui est très proche de notre résultat de 21,4 cc. Ainsi, en considérant la déviation moyenne de la verticale sur la visée AVA102 – AMO101, l'écart entre notre détermination et celle déduite de RAF18 ne diffère que de 1,2 cc.

Vu les altitudes de nos points, de l'ordre de 2 000 m, il est normal que les amplitudes moyennes de la déviation de la verticale diffèrent de quelques cc du géoïde à la surface [5]. Cela étant, à moins d'organiser des mesures astro-géodésiques, il s'agit de la seule validation à notre portée.

### Conclusion

La déviation de la verticale, mal-aimée de la géodésie, ne pouvait jusqu'à présent être obtenue qu'à partir d'un modèle du champ de pesanteur ou d'observations astrogéodésiques. En partant des formules classiques de réduction des distances, nous avons trouvé une nouvelle voie ne requérant aucune instrumentation spéciale : deux tachéomètres et deux récepteurs GNSS suffisent. Dans l'exemple décrit, nous avons déterminé la composante de la déviation de la verticale dans le plan de la visée. Pour pouvoir estimer les composantes est et nord de la déviation de la verticale, il suffirait d'opérer de manière identique selon une visée idéalement perpendiculaire. Cette méthode est certes limitée en termes de précision atteignable, 4 cc dans notre cas, mais elle peut suffire pour nombre d'applications (voir des exemples dans [1] et [5]). Il semble que l'incertitude atteignable soit optimale pour des visées de l'ordre de 1 km. Pour de meilleures précisions, il faut recourir aux observations astrogéodésiques. Vu la nécessité de disposer avec une grande précision de l'angle zénithal corrigé de la réfraction, cette méthode de détermination de la déviation de la verticale doit faire suite, actuellement, aux visées réciproques

simultanées. Présentement, cela induit une symétrie rendant impossible de mettre en évidence les variations locales de la déviation de la verticale. En corrigeant la réfraction à partir de profils de température, cette symétrie pourrait disparaître, ce qui permettrait d'obtenir des valeurs plus justes de la déviation de la verticale. En attendant, il semble que cette méthode soit d'ores et déjà apte à déterminer la valeur moyenne, sur un chantier, de la déviation de la verticale. ●

### Contact

Thomas Touzé  
thomas.touze@edf.fr

### Références

- [1] *La déviation de la verticale, mal-aimée de la géodésie*, Thomas Touzé, 2022, XYZ n° 171.
- [2] *Cours de géodésie*, chapitre 5, Françoise Duquenne et Henri Duquenne, ESGT, 2003.
- [3] *N'ayez pas peur du coefficient de réfraction ! Première partie sur les enjeux de réfraction en nivellement trigonométrique*, Thomas Touzé & Matthieu Hansen, 2019, XYZ n° 158.
- [4] *Cours de géodésie*, chapitre 2, Françoise Duquenne et Henri Duquenne, ESGT, 2003.
- [5] *The Importance of Using Deviations of the Vertical for the Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum*, Will E. Featherstone & Jean M. Rueger, 2000, Australian Surveyor volume 45.
- [6] *Généralisation des réfractions terrestres et bathymétriques : utilisation concrète et simulations de levés bathymétriques au sonar multifaisceaux*, Thomas Touzé, 2022, XYZ n° 172.

### ABSTRACT

*In this paper, we propose a new method to determine the vertical deflection from refraction-corrected total station measurements and GNSS baselines. If the state of the art is well respected, an uncertainty of the order of 0.3 mgon (1'') on a 1 km long sight seems quite achievable. We thus present the results obtained during the monitoring of two EDF dams in the Alps that allowed to determine the vertical deflection with a 68% uncertainty of 0.4 mgon (1.3'') and in coherence with the value deduced from the geoid.*

**Tableau 7.** Déviations de la verticale au niveau du géoïde déduites de RAF18.

Points	$\eta$ [cc]	$\xi$ [cc]	$\alpha$ [gon]	$\theta$ RAF 18 [cc]
AVA102	-12.7	-18.2	393.4961	-16.8
AMO101	-8.5	-29.4	193.4948	28.4