

L'orthogonalisation généralisée une solution algorithmique au problème des moindres carrés

■ Joël VAN CRANENBROECK

La méthode des moindres carrés a été conçue par Legendre et devait servir à la détermination des paramètres orbitaux des planètes. C'est un peu plus tard que Gauss a donné à cette méthode les bases et les formulations mathématiques rigoureuses. Depuis, de nombreux mathématiciens ont apporté leurs contributions au développement et aux applications de cette méthode. Citons Laplace, Tchebychev, Kalman et Markov. Des travaux importants ont été réalisés également par des géodésiens comme Doolittle, Helmert, Tienstra, Meissl et Moritz. En Belgique, nous devons faire référence aux travaux de Marchant, Baetslé et Van Den Herrewegen. On a aussi associé à certains algorithmes le nom de ceux qui ont proposé des méthodes originales permettant la résolution numérique associées à cette méthode, comme en France Cholesky et Levallois. Les autres Banachiewicz, Gauss et Jordan sont bien connus.

■ MOTS-CLÉS

Moindres carrés, calcul matriciel, ajustement, orthogonalisation, réseaux de nivellement, algorithme, programmation

Professeur Baarda [15] de Delft pour la détection des erreurs grossières, mais également pour produire les indicateurs de fiabilité interne et externe et l'ajustement de réseaux libres qui font appel à l'inversion généralisée.

L'orthogonalisation généralisée a été systématiquement utilisée dans nos logiciels à cette époque, mais également pour tous les logiciels que nous avons développés après et notamment, par exemple, pour le logiciel StarTopoTX de la société Star Informatic (qui devint Star Apic et fut rachetée par 1Spatial) [16].

Il y avait une autre demande pour permettre la conception d'un réseau géodésique de second ordre, où la position des points est imposée et où l'on souhaite, pour atteindre une précision donnée en termes d'écart-type, calculer la précision à obtenir pour chaque observation. La conception du réseau de second ordre est particulièrement importante pour celle d'un réseau géodésique. Dans la conception de cet ordre, les poids optimaux des observations sont recherchés. Cela fait appel également à un produit matriciel très particulier, inventé par Khatri et Rao [4] et utilisé dans un développement de Gunther Schmitt [5].

À cette époque, il y avait des développements et des contributions internationales très importants liés à la résolution numérique du problème des moindres carrés. Avec des moyens de traitement limités, l'imagination était très sollicitée. Aujourd'hui, le traitement de millions de points issus des fameux nuages de points engendrés par les scanners et autres capteurs, ne surprend plus grand monde. D'autre part, les étudiants, mais également les professionnels, en géodésie et topographie, ne paraissent plus motivés pour

Aujourd'hui, les outils informatiques dont nous disposons exigent des méthodes numériques adaptées. On s'accorde à dire qu'elles doivent répondre à un certain nombre de critères dont la stabilité numérique, la facilité de programmation, la portabilité du logiciel, c'est-à-dire son indépendance vis-à-vis d'un type bien précis de système d'exploitation, etc.

L'objet de cet article est de présenter une méthode de résolution peu connue des utilisateurs de la méthode des moindres carrés en géodésie et en topographie et qui présente pourtant des avantages considérables. Cette méthode dite "orthogonalisation généralisée" se base sur une version modifiée de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Elle est très concise, numériquement stable et permet la résolution de systèmes d'équations linéaires simples ou surdéterminés. Elle ne fait appel à aucun algorithme d'inversion matricielle ni à la technique d'éliminations successives. Il n'y a pas de formation d'équations normales. Les pionniers de

cette méthode sont F. Charamza [1] et J. Gazdzicki [2].

Nous avons déjà publié un article sur cette méthode en 1986 dans le Bulletin trimestriel de la Société belge de photogrammétrie-télétection et cartographie [3] quand nous travaillions à l'Institut géographique national de Belgique au département de la Géodésie de 1983 à 1989. À l'époque, les premiers mini-ordinateurs faisaient leur apparition et le département de la Géodésie souhaitait s'affranchir des services du Centre de traitement informatique (CTI) qui travaillait en temps partagé sur des serveurs IBM à des prix élevés facturés à la milliseconde de CPU. Pour donner un exemple, le traitement de l'aérotriangulation du Rwanda a pris 20 minutes et a épuisé le budget annuel du CTI. C'est dire qu'une certaine indépendance vis-à-vis de ces outils était la bienvenue. Notre mission était de développer un logiciel d'ajustement par les moindres carrés, incluant tous les raffinements numériques de l'époque, à savoir la méthode B de test imaginée par le



plonger dans ces algorithmes, avec le risque de perdre progressivement leur maîtrise et donc, de devenir tributaires des sociétés de production de logiciel.

Pour ma part, à cette époque, en tant que jeune diplômé géomètre-expert avec un bagage en math sup, je me suis fixé comme règle de vie professionnelle de n'utiliser aucune méthode de traitement que je ne pouvais à la fois démontrer et donc programmer. Cela m'a permis de comprendre exactement comment les résultats des observations étaient délivrés et également d'optimiser les opérations topographiques et d'innover par le choix des modèles mathématiques. À cet égard, l'arrivée du GPS, puis du GNSS, a été une aubaine pour beaucoup de nouveaux développements, qui tous, pourtant, reposent sur cette base de connaissance de la méthode des moindres carrés couplée aux filtrages numériques et de l'inférence statistique.

L'enseignement des mathématiques, actuellement en mauvaise posture, vise entre autres à découvrir une certaine beauté. Bruno Hourst écrit [6] : Les mathématiques peuvent être source de beauté. On peut parler d'une "belle formule" ou d'une "belle démonstration géométrique". Et, effectivement, lorsque l'on a ressenti cette beauté, elle semble évidente. Des démonstrations géométriques sont "belles" par l'élégance du raisonnement et l'articulation de la démonstration. Des formules sont "belles" par leur simplicité ou leur équilibre.

Semir Zeki [6] a expliqué : *"La beauté d'une formule peut résulter de la simplicité, de la symétrie, de l'élégance ou de l'expression d'une vérité immuable. Pour Platon, la qualité abstraite des mathématiques exprimait le summum de la beauté"*.

Citons encore Carl Friedrich Gauss, à propos des mathématiques : *"Les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir [17]."*

Cet article est donc également une invitation à la découverte de l'élégance d'un algorithme qui prend une autre voie pour résoudre le problème des moindres carrés. Et, effectivement, dans

la question de trouver la distance minimale entre un point et une droite, on peut soit minimiser la fonction distance à cette droite ou bien construire la perpendiculaire de ce point abaissé sur la droite. L'orthogonalisation généralisée est bien une autre façon de résoudre le problème des moindres carrés en produisant des estimateurs linéaires non biaisés dans des systèmes d'équations surdéterminés.

Orthogonalisation

■ Indications

Nous présenterons, dans ce paragraphe, un rappel des notions mathématiques utilisées dans cet article. Sauf mention contraire, tous les vecteurs seront dorénavant des vecteurs colonnes.

Lorsque les composantes seront explicitées, nous écrirons $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Le symbole $[]^T$ indique que les éléments doivent être écrits en colonne.

Un ensemble de tels vecteurs à n composantes sur l'ensemble F est stable pour l'addition, si la somme de deux quelconques d'entre eux est encore un vecteur de l'ensemble. De même, l'ensemble est stable pour la multiplication par les scalaires si un vecteur quelconque de l'ensemble multiplié par un scalaire est encore un vecteur de l'ensemble.

■ Espaces vectoriels

Tout ensemble de vecteurs à n composantes sur F stable pour la multiplication par les scalaires et pour l'addition est appelé espace vectoriel.

Ainsi, si x_1, x_2, \dots, x_m sont des vecteurs à n composantes sur F, l'ensemble des combinaisons linéaires $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots, k_m x_m$ avec k_i dans F est un espace vectoriel sur F.

L'espace $V_n(F)$ de tous les vecteurs à n composantes sur F est appelé espace vectoriel à n dimensions sur F.

$V_n(R)$ sera l'espace vectoriel à n dimensions sur R, R étant l'ensemble des réels.

■ Sous-espaces

Un ensemble V de vecteurs de $V_n(F)$ est un sous-espace de $V_n(F)$ si V est stable pour l'addition et la multiplication par les scalaires. Ainsi l'espace vectoriel nul à n dimensions est un sous-espace de $V_n(F)$. Il en est de même de $V_n(F)$ lui-même.

■ Base et dimension

La dimension d'un espace vectoriel V est le nombre minimum de vecteurs linéairement indépendants pour engendrer V. L'ensemble de ces vecteurs est appelé une base de V. Si ceux-ci sont orthogonaux deux à deux, la base est dite orthogonale. Si leur norme est égale à l'unité, la base sera dite orthonormée. En géométrie élémentaire, l'espace usuel est considéré comme un ensemble à trois dimensions.

Les vecteurs dits élémentaires seront :

$$E_1 = [1, 0, 0]^T$$

$$E_2 = [0, 1, 0]^T$$

$$E_3 = [0, 0, 1]^T$$

Ceux-ci constituent une base importante de $V_3(F)$ que l'on appelle base canonique de $V_3(F)$.

■ Orthogonalisation de Gram-Schmidt

En algèbre linéaire, dans un espace préhilbertien (c'est-à-dire un espace vectoriel sur le corps des réels ou celui des complexes, muni d'un produit scalaire), le procédé de Gram-Schmidt est un algorithme pour construire, à partir d'une famille libre finie, une base orthonormée du sous-espace qu'elle engendre. Cette méthode a été publiée par Jørgen Pedersen Gram en 1883 et reformulée par Erhard Schmidt en 1907, mais on la trouve déjà dans des travaux de 1816 de Laplace et de Cauchy en 1836 [7].

Soit X_1, X_2, \dots, X_m une base donnée de $V_n^m(R)$. On désigne par Y_1, Y_2, \dots, Y_m l'ensemble des vecteurs deux à deux orthogonaux à déterminer.

Étape 1 : On prend $Y_1 = X_1$

Étape 2 : Puis, on prend $Y_2 = X_2 + aY_1$

Puisque Y_1 et Y_2 sont orthogonaux,

$$\text{on a } Y_1 * Y_2 = Y_1 * X_2 + aY_1 * Y_1 = 0$$

$$\text{et } a = -\frac{Y_1 * X_2}{Y_1 * Y_1}$$

$$\text{ainsi } Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 * X_2}{Y_1 * Y_1} * Y_1$$

Étape 3 : On prend $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$

Puisque Y_1, Y_2 et Y_3 sont orthogonaux deux à deux

$$Y_1 * Y_3 = Y_1 * X_3 + aY_1 * Y_2 + bY_1 * Y_1$$

$$= Y_1 * X_3 + bY_1 * Y_1 = 0$$



$$Y_2 * Y_3 = Y_2 * X_3 + aY_2 * Y_2 + bY_2 * Y_1$$

$$= Y_2 * X_3 + aY_2 * Y_2 = 0$$

$$a = -\frac{Y_2 * X_3}{Y_2 * Y_2} \text{ et } b = -\frac{Y_1 * X_3}{Y_1 * Y_1}$$

$$\text{et } Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 * X_3}{Y_2 * Y_2} * Y_2 - \frac{Y_1 * X_3}{Y_1 * Y_1} * Y_1$$

on poursuit cette méthode jusqu'à l'obtention de Y_m

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} * X_m}{Y_{m-1} * Y_{m-1}} * Y_{m-1} - \dots$$

$$\dots - \frac{Y_1 * X_m}{Y_1 * Y_1} * Y_1$$

Alors les vecteurs unitaires

$G_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|}, (i = 1, 2, \dots, m)$ sont deux à deux orthogonaux et forment une base orthonormée de $V_n^m(R)$.

Remarque : le symbole * est le produit scalaire entre deux vecteurs. Exemple : Construisons en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt une base orthogonale de $V_3(R)$ étant donné la base dans les équations suivantes :

$$X_1 = [1, 1, 1]^T$$

$$X_2 = [1, -2, 1]^T$$

$$X_3 = [1, 2, 3]^T$$

$$\text{Étape 1 : } Y_1 = X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Étape 2 : } Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 * X_2}{Y_1 * Y_1} * Y_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} * Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Étape 3 :

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 * X_3}{Y_2 * Y_2} * Y_2 - \frac{Y_1 * X_3}{Y_1 * Y_1} * Y_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{0}{6} * Y_2 - \frac{6}{3} * Y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors les vecteurs

$$G_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$G_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$G_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment une base orthonormée de $V_3(R)$. Tout vecteur G sera vecteur unitaire et tout produit scalaire $G_i * G_j = 0$

■ Matrice orthogonale

Une matrice carrée A est orthogonale si :

$$A^T A = A A^T = I$$

C'est-à-dire si : $A^T = A^{-1}$

Il est clair que les vecteurs colonnes (respectivement lignes) d'une matrice orthogonale A sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

Soit $Y = AX$ une application linéaire de $V_n(R)$. S'il s'agit d'une transformation de coordonnées d'une base E à une autre base Z , la base sera orthogonale si A est orthogonale.

La matrice A formée par les vecteurs G_1, G_2 et G_3 de notre exemple précédent est orthogonale.

■ Orthogonalisation et méthode des moindres carrés

Considérons le problème de trouver un vecteur appartenant à $V_m(R)$ tel que $AX = B$ où A appartient à $V_n^m(R)$ et B appartient à $V_n(R)$ avec $n \geq m$.

Quand il y a plus d'équations que d'inconnues, on dit du système d'équations qu'il est surdéterminé. Le problème des moindres carrés consiste à rendre minimale la norme euclidienne : $\min_x \|AX - B\|$ A appartenant à $V_n^m(R)$ et B appartenant à $V_n(R)$.

On demande un estimateur optimal pour le vecteur X appartenant à $V_m(R)$.

La norme euclidienne étant invariante par rapport aux transformations orthogonales, la méthode de moindres carrés bénéficie de la propriété intéressante d'être équivalente au problème suivant :

$$\min_x \|(Q^T A)X - (Q^T B)\|$$

en multipliant A et B par une matrice orthogonale Q^T . Supposons que la matrice orthogonale Q^T ait été calculée de telle façon à ce que :

$$Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}_{n-m}^m \text{ et } Q^T B = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}_{n-m}^m$$

La solution du problème des moindres carrés est alors obtenue en résolvant le système triangulaire supérieur :

$$RX = C$$

Le vecteur des résidus :

$$V = AX - B$$

sera égal à la norme du vecteur D .

En effet

$$\|AX - B\|^2 = \|Q^T AX - Q^T B\|^2$$

$$= \|RX - C\|^2 + D^2$$

Trois méthodes sont généralement proposées pour calculer cette factorisation orthogonale. Il s'agit de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, des réflecteurs de Householder et des rotations de Givens.

La méthode exposée ici se base sur l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Malheureusement, celle-ci a une stabilité numérique assez faible. Pour y pallier, il a été proposé une version équivalente dénommée "Gram-Schmidt modifiée" où la normalisation des vecteurs se fait à chaque pas de la transformation [8] et [9].

Orthogonalisation généralisée

■ Indications

L'algorithme d'orthogonalisation généralisée est basé sur la transformation d'une matrice A en une matrice W de même structure.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \end{matrix} = W$$

respectant les règles suivantes :

Règle 1 : Orthogonalisation dans la sous-matrice $[A_1 A_3]^T$

Cette sous-matrice est transformée en $[W_1 W_3]^T$ à l'aide de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt modifiée. La normalisation, c'est-à-dire la division par la norme du vecteur, ne porte cependant que sur la matrice A_1 . Celle-ci a ses colonnes linéairement indépendantes.

Règle 2 : Orthogonalisation dans la sous-matrice $[A_2 A_4]^T$

Cette sous-matrice est transformée en $[W_2 W_4]^T$ en appliquant la suite des transformations déjà appliquées pour la sous-matrice $[A_1 A_3]^T$ mais sans normalisation. La procédure peut se décrire comme suit : soit h , le nombre de transformations.





Pour $h = 1, 2, \dots, m$
 $j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+p$
 $i = h+1, h+2, \dots, m+r$

Faire

$$W_{hj}^h = \frac{W_{hj}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n W_{hk}^{h-1}{}^2}}$$

$$W_{ij}^h = W_{ij}^{h-1} - W_{hj}^h * \sum_{k=1}^n W_{hk}^h * W_{ij}^{h-1}$$

W_{hk}^h est noté comme étant l'élément W_{hj}^h obtenu après h transformations. La transformation $h = 1$ étant le pas initial,

$$W_{hj}^0 = A_{hj}$$

Ainsi devient la transformation orthogonale de A_1 . On peut vérifier que $W_1^T W_1 = I$. Les sous-matrices A_1 et W_1 étant fonction d'une matrice triangulaire droite non singulière R telle que

$$A_1 = W_1 R$$

En appliquant la procédure décrite, nous obtenons les relations fondamentales suivantes de l'orthogonalisation généralisée :

$$W_1 = A_1 R^{-1} \quad (1)$$

$$W_3 = A_3 R^{-1} \quad (2)$$

$$W_2 = A_2 - W_1 W_1^T A_2 \quad (3)$$

$$W_4 = A_4 - W_3 W_3^T A_2 \quad (4)$$

Nous allons montrer, dans la suite de cet article, comment définir les matrices A_1, A_2, A_3 et A_4 , pour obtenir dans une variété de cas la solution aux problèmes posés par la résolution d'un système d'équations linéaires simplement déterminé ou surdéterminé.

■ Système d'équations linéaires simplement déterminé

Soit à déterminer le vecteur X dans l'équation $AX = B$

La solution s'obtient en multipliant les deux membres de l'équation par la matrice inverse A^{-1} .

$$\text{Soit } A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\text{et donc } X = A^{-1}B$$

m	1	\rightarrow	m	1
m	A		W_1	W_2
m	I		W_3	W_4

En appliquant les relations fondamentales (1), (2), (3) et (4), nous obtenons :

$$W_1 = AR^{-1}$$

$$W_3 = R^{-1}$$

$$W_2 = B - W_1 W_1^T B$$

$$W_4 = 0 - W_3 W_3^T B$$

comme $W_1 W_1^T = I$; la matrice W_1 étant carrée, nous pouvons déduire que $W_1^T = W_1^{-1}$ et, dès lors :

$$W_2 = 0$$

$$W_4 = 0 - R^{-1} W_1^T B$$

$$W_4 = -R^{-1} (R A^{-1}) B$$

$$W_4 = -A^{-1} B = -X$$

	m	1
n	AR^{-1}	$-V$
m	R^{-1}	$-X$

Il est donc possible de calculer l'inverse d'une matrice régulière à l'aide de cet algorithme.

■ Système d'équations linéaires surdéterminé

Selon que l'on exprime les observations en fonction de certains paramètres (coordonnées) ou que l'on impose certaines conditions sur celle-ci, nous aurons des modèles d'équations différents, conduisant cependant à des résultats identiques. Il s'agit du modèle des équations d'observation (Gauss-Markov) et du modèle des équations conditionnées (Gauss-Helmert).

L'un peut se ramener à l'autre par élimination algébrique des relations entre grandeurs non mesurées, mais il s'agit là d'un problème ne représentant qu'un intérêt sur le plan théorique [10] et [11]. Il existe évidemment bien d'autres modèles adaptés à des situations plus complexes, mais qui ne sont qu'une catégorie se rattachant à l'un ou l'autre des modèles cités.

Notons également que de par la nature des observations que l'on traite en topographie et en géodésie, certaines fonctions établies ne sont pas linéaires (directions/angles et distances). La mise en œuvre de la méthode des moindres carrés exige que ces équations soient rendues linéaires par approximation en les remplaçant par un développement en série limité aux termes linéaires.

Équations d'observation

Nous allons rappeler brièvement les équations générales :

Soit le modèle fonctionnel linéaire suivant :

$$L + V = AX + A_0 \quad (5)$$

Où

L est le vecteur des observations (n)

V est le vecteur des résidus (n)

A est la matrice des coefficients des équations d'observation ($n \times m$)

X est le vecteur des paramètres à estimer (m)

A_0 est le vecteur des termes constants (n) intégré en pratique dans le vecteur L

Le modèle stochastique contenant l'information probabiliste des observations est défini comme suit :

σ^2 grandeur scalaire, dénommée variance de l'unité de poids

Q_{LL} est la matrice des cofacteurs des observations ($n \times n$)

$C_{LL} = \sigma^2 Q_{LL}$ est la matrice de variance-covariance des observations

$P_{LL} = C_{LL}^{-1}$ est la matrice ($n \times n$) des poids

Nous obtenons les estimateurs suivants :

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} (A^T P L) \quad (6)$$

ou en posant $N = A^T P A$ nous avons :

$$\hat{X} = N^{-1} (A^T P L) \quad (7)$$

Pour les observations :

$$L = A \hat{X} = A N^{-1} A^T P L \quad (8)$$

Pour les résidus : $\hat{V} = L - L = A \hat{X} - L$

Pour les matrices de variance-covariance *a posteriori* :

$$\text{Pour les paramètres : } C_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma^2 N^{-1} \quad (9)$$

Pour les observations :

$$L = A \hat{X} = A N^{-1} A^T P L \quad (10)$$

Pour les résidus : $\hat{V} = L - L = A \hat{X} - L$

Le facteur de variance *a posteriori* de l'unité de poids estimé :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n-m} \quad (10)$$

Définissons la matrice opérateur suivante :

	m	1
n	A	L
m	I	0

Après transformation, nous obtenons en appliquant (1), (2), (3) et (4) :



$$\begin{aligned} W_1 &= AR^{-1} \\ W_3 &= IR^{-1} = R^{-1} \\ W_2 &= L - W_1 W_1^T L \\ W_4 &= -R^{-1} W_1^T L \end{aligned}$$

En explicitant ces relations, nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} W_4 &= -R^{-1} W_1^T L \\ W_4 &= -R^{-1} R^T R^{-1} R^T W_1^T L \\ W_4 &= -(R^T W_1^T W_1 R)^{-1} R^T W_1^T L \end{aligned}$$

avec $W_1^T W_1 = I$ et $W_1 R = A$

$$W_4 = -(A^T A)^{-1} A^T L$$

$$W_4 = -\tilde{X}$$

le vecteur des paramètres solution

$$\begin{aligned} W_2 &= L - W_1 W_1^T L \\ W_2 &= L - W_1 R R^{-1} W_1^T L \end{aligned}$$

avec $RR^{-1} = I$

$$W_2 = L - A(R^{-1} W_1^T L)$$

$$W_2 = L - A\tilde{X}$$

$$W_2 = -\tilde{V}$$

le vecteur des résidus

$$\begin{aligned} W_1 W_1^T &= A(A^T A)^{-1} A^T \\ W_1 W_1^T &= Q_{\tilde{L}\tilde{L}} \end{aligned}$$

la matrice cofacteurs des observations ajustées

$$\begin{aligned} W_3 W_3^T &= R^{-1} R^{-1^T} = (R^T R)^{-1} \\ W_3 W_3^T &= (A^T W_1^{-1^T} W_1^{-1} A)^{-1} \\ W_3 W_3^T &= (A^T A)^{-1} \\ W_3 W_3^T &= Q_{\tilde{X}\tilde{X}} \end{aligned}$$

la matrice cofacteurs des paramètres solution

Nous retrouvons, donc après transformation dans la matrice opérateur, les informations suivantes :

	m	1
n	AR^{-1}	$-V$
m	R^{-1}	$-X$

Pour obtenir les éléments diagonaux des matrices de cofacteurs Q_{LL} et Q_{XX} il suffit de faire la somme des éléments élevés au carré par ligne.

Pour introduire, le cas échéant, une estimation de la matrice de variance-covariance *a priori*, on peut montrer qu'il suffit de diviser chaque ligne des coefficients de la matrice et du vecteur par la racine carrée de la variance de l'observation correspondante. Dans le cas de matrice de variance-covariance *a priori*

corrélée, il faudra factoriser la matrice inverse, dite matrice des poids en deux matrices triangulaires (par les procédés Choleski [18] ou de Givens [19] par exemple) et de multiplier la matrice de configuration et le vecteur des observations par l'une d'elles. En effet, la matrice des poids est généralement définie positive et peut-être décomposée en une matrice triangulaire gauche (G) et droite (D).

On obtient donc :

$$P = GD = GG^T = D^T D$$

L'expression :

$$(A^T P A) X = A^T P L$$

$$\text{Devient : } (A^T D^T D A) X = A^T D^T D L$$

Où nous posons $A^* = DA$ et $L^* = DL$

$$\text{Et l'on obtient : } (A^{*T} A^*) X = A^{*T} L^*$$

La matrice opérateur se présentant dès lors comme suit :

	m	1
n	A^*	L^*
m	I	O

Équations conditionnées

Soit le modèle fonctionnel linéaire suivant :

$$UL + U_0 = F \quad (11)$$

Avec :

U matrice de configuration (m, n)

L vecteur des observations (n)

U_0 vecteur des termes constants (m)

F vecteur des fermetures (m)

Le modèle stochastique portant sur les mêmes observations, celui-ci sera identique à celui exposé au paragraphe 3.3.1 Nous obtenons les estimateurs suivants :

$$\text{Corrélatifs : } K = (U Q_{LL} U^T)^{-1} F \quad (12)$$

$$\text{Observations : } \tilde{L} = L + \tilde{V} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Résidus } \tilde{V} &= -Q_{LL} U^T (U Q_{LL} U^T)^{-1} F \\ &= -Q_{LL} U^T K \end{aligned} \quad (14)$$

Et pour les matrices de variance-covariance *a posteriori* :

$$\text{Corrélatifs : } C_{\tilde{R}\tilde{R}} = \sigma^2 (U Q_{LL} U^T)^{-1} \quad (15)$$

$$\text{Observations : } C_{\tilde{L}\tilde{L}} = \sigma^2 (Q_{LL} - Q_{\tilde{V}\tilde{V}}) \quad (16)$$

Résidus :

$$C_{\tilde{V}\tilde{V}} = \sigma^2 Q_{LL} U^T (U Q_{LL} U^T)^{-1} U Q_{LL} \quad (17)$$

Le facteur de variance *a posteriori*

de l'unité de poids estimé :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{m} \quad (18)$$

Définissons la matrice opérateur suivante :

	m	n
n	U^T	I
1	F	L

Après transformation, nous obtenons en appliquant (1), (2), (3) et (4) :

$$W_1 = U^T R^{-1}$$

$$W_2 = I - U^T R^{-1} (U^T R^{-1})^T I$$

$$W_3 = F R^{-1}$$

$$W_4 = L - F R^{-1} (U^T R^{-1})^T I$$

En explicitant ces relations, nous obtenons les résultats suivants :

$$W_2 = I - U^T R^{-1} R^{-1^T} U \quad \text{avec } R^{-1^T} = R^{T^{-1}}$$

$$W_2 = I - U^T (R^T R)^{-1} U$$

$$W_2 = I - U^T (U W_1 W_1^T U^T) U$$

$$W_2 = I - U^T (U U^T)^{-1} U$$

$W_2 = Q_{LL}$ la matrice des cofacteurs *a*

posteriori des observations

$$W_4 = L - F R^{-1} (R^{-1^T} U)$$

$$W_4 = L - F (R^T R)^{-1} U$$

$$W_4 = L - F (U W_1 W_1^T U^T)^{-1} U$$

$$W_4 = L - F (U U^T)^{-1} U$$

$W_4 = \tilde{L}$ le vecteur des observations ajustées. Nous avons une relation supplémentaire :

$$W_1 W_3^T = \tilde{L} = W_4$$

Nous retrouvons, après transformation, la matrice suivante :

	m	n
n	W_1	Q_{LL}
1	W_3	L

Si l'on veut tenir compte de la matrice de variance-covariance des observations *a priori*, il faudra appliquer la même remarque qu'en 3.3.1 en factorisant la matrice de variance-covariance et en disposant la matrice opérateur comme suit :

	m	n
n	U^{T*}	Q_{LL}
1	F	L

Q_{LL} pouvant être factorisée en une matrice triangulaire gauche (G) et droite





$$(D) : Q_{LL} = GD = GG^T = D^T D$$

Nous poserons comme précédemment : $U^T = D^T U^T$

Déficiences de rang, inverse généralisée et réseau libre

Jusqu'ici, nous avons admis que les systèmes d'équations linéaires étaient composés de vecteurs colonnes indépendants, sans combinaisons linéaires. Pourtant, dans le cas des réseaux libres où aucun point n'est fixé, la solution $X = (A^T P A)^{-1} (A^T P L)$ n'existe plus, car le déterminant $|A^T P A|$ sera proche de zéro. La solution consiste à calculer une pseudo-inverse ou inverse généralisée. L'orthogonalisation généralisée apporte une solution élégante.

Supposons donc que la matrice des coefficients des équations d'observation A contienne r colonnes linéairement indépendantes et le reste d de colonnes linéairement dépendantes.

Sans perdre la généralité, nous pouvons assumer que les colonnes linéairement dépendantes se trouvent localisées dans la partie droite de la matrice A . Nous notons la partie de A qui contient des colonnes linéairement indépendantes A_1 et celle contenant des colonnes linéairement dépendantes A_2 et la matrice de leur combinaison linéaire α .

$$A = (A_1, A_2) \text{ et } A_2 = A_1 \alpha$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Nous pouvons réécrire maintenant la solution comme :

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - L = A_1 (X_1 + \alpha X_2) - L$$

$$= A_1 \tilde{X} - L \quad (19)$$

Comme la matrice A_1 ne contient pas de colonnes linéairement dépendantes, une solution unique pour \tilde{X} existe qui minimise la norme euclidienne de V . Si nous connaissons la matrice α et le vecteur \tilde{X} alors n'importe quelle solution X de $\tilde{X} = X_1 + \alpha X_2 = (1, \alpha) X$ (20)

sera également la solution au sens des moindres carrés de (20) avec le même vecteur des résidus. Regardons comment l'algorithme d'orthogonalisation généralisée traite ce cas.

	$m-rd$	rd	1
n	A_1	A_2	$-L$
$m-rd$	I	0	0
rd	0	I	0

	$m-rd$	rd	1
n	Q	0	V
$m-rd$	R_1^{-1}	$-\alpha$	X
rd	0	I	0

Avec rd (déficiency de rang) qui peut être calculée en utilisant les rotations de Givens.

La première orthogonalisation se réalise sur la matrice A_1

Si nous souhaitons n'obtenir que l'ensemble des solutions pour les paramètres X une deuxième orthogonalisation sera menée sur :

	rd	1
$m-rd$	$-\alpha$	X_1
rd	I	0

Pour résoudre :

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ I \end{bmatrix} X_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Si au contraire, nous souhaitons obtenir l'ensemble des solutions pour les paramètres X mais également la matrice de cofacteurs Q_{XX} la deuxième orthogonalisation sera menée sur la matrice opératrice suivante avec permutation des sous-matrices $-\alpha$ et R_1^{-1} et de leur correspondantes inférieures.

	$m-rd$	rd	1
$m-rd$	$-\alpha$	R_1^{-1}	X_1
rd	I	0	0

Les développements que nous avons présentés en 3.3.1 et 3.3.2 s'appliquent également ici et nous renvoyons le lecteur aux références [12] et [13] et à l'exemple numérique.

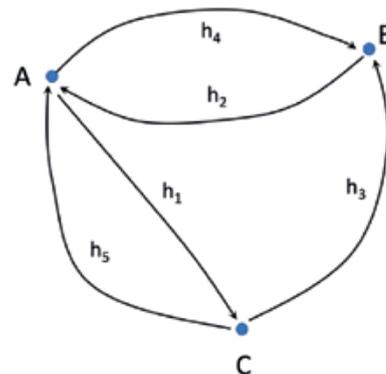
Exemple numérique

Nous proposons, dans ce paragraphe, un exemple numérique, à la fois pour illustrer notre exposé et offrir, aux lecteurs désireux de tester leur propre logiciel, une base de comparaison numérique.

■ Réseau de nivellement

Pour illustrer la complémentarité entre les deux modèles (Gauss-Markov et Gauss Helmert), nous traiterons l'exemple par les équations d'observation et les équations conditionnées.

Soit le réseau de nivellement figuré par le schéma suivant :



Seul le point A est connu en altitude et $Z_A = 124.18$ m

Nous avons pour les dénivelées h_i les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} h_1 &= 6.14 \text{ m} \\ h_2 &= 8.34 \text{ m} \\ h_3 &= -14.48 \text{ m} \\ h_4 &= -8.35 \text{ m} \\ h_5 &= -6.16 \text{ m} \end{aligned}$$

La distance entre les points A, B et C sera égale à l'unité pour simplifier le modèle stochastique et nous ne traitons que deux décimales pour les observations.

Équation d'observation

Nous pouvons exprimer les relations fonctionnelles qui existent entre l'altitude des points A, B et C et la valeur des dénivelées h_i :

$$\begin{aligned} Z_B &= Z_A + h_1 \\ Z_A &= Z_C + h_2 \\ Z_C &= Z_B + h_3 \\ Z_C &= Z_A + h_4 \\ Z_A &= Z_B + h_5 \end{aligned}$$

Le modèle fonctionnel linéaire s'écrira :

$$\begin{aligned} V_1 + h_1 &= Z_B - Z_A \\ V_2 + h_2 &= -Z_C + Z_A \\ V_3 + h_3 &= Z_C - Z_B \\ V_4 + h_4 &= Z_C - Z_A \\ V_5 + h_5 &= -Z_B + Z_A \end{aligned} \quad (22)$$

Ce qui, sous forme matricielle, s'écrit $L + V = AX + A_0$:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_B \\ Z_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_A \\ Z_A \\ 0 \\ -Z_A \\ Z_A \end{bmatrix}$$



La matrice opérateur se présente comme suit, avec la matrice résultat après orthogonalisation :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -130.32 \\ 0 & -1 & 115.84 \\ -1 & 1 & 14.48 \\ 0 & 1 & -115.83 \\ -1 & 0 & 130.34 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.577 & 0.204 & 0.006 \\ 0.000 & -0.612 & 0.001 \\ -0.577 & 0.408 & -0.007 \\ 0.000 & 0.612 & 0.009 \\ -0.577 & -0.204 & 0.014 \\ \hline 0.577 & 0.204 & 130.326 \\ 0.000 & 0.612 & 115.839 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Avec les différentes sous-matrices de W :

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.577 & 0.204 \\ 0.000 & -0.612 \\ -0.577 & 0.408 \\ 0.000 & 0.612 \\ -0.577 & -0.204 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.006 \\ 0.001 \\ -0.007 \\ 0.009 \\ 0.014 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0.577 & 0.204 \\ 0.000 & 0.612 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} 130.326 \\ 115.839 \end{bmatrix}$$

Les paramètres étant les altitudes des points B et C, nous obtenons :

$$Z_B = 130.326 \text{ m}$$

$$Z_C = 115.839 \text{ m}$$

La matrice des cofacteurs des observations ajustées sera :

$$Q_{LL} = W_1 W_1^T$$

$$Q_{LL} = \begin{bmatrix} 0.375 & -0.125 & -0.250 & 0.125 & -0.375 \\ -0.125 & 0.375 & -0.250 & -0.375 & 0.125 \\ -0.250 & -0.250 & 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.125 & -0.375 & 0.250 & 0.375 & -0.125 \\ -0.375 & 0.125 & 0.250 & -0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

La matrice des variances-covariances des observations ajustées sera :

$$C_{LL} = \sigma^2 Q_{LL} \quad \text{avec } \sigma^2 = \frac{W_2^T W_2}{n-m}$$

La matrice des variances-covariances des paramètres ajustés sera obtenue de façon suivante :

$$C_{RR} = \sigma^2 (W_3^T W_3)$$

Nous obtenons les écarts-standards a *posteriori* en prenant la racine carrée des éléments diagonaux de la matrice C_{RR} :

$$\sigma_{z_B} = \sqrt{C_{RR(1,1)}} = \pm 0.006 \text{ m}$$

$$\sigma_{z_C} = \sqrt{C_{RR(2,2)}} = \pm 0.007 \text{ m}$$

Équations conditionnées

Nous pouvons écrire les relations linéaires suivantes pour exprimer les conditions imposées aux observations h_i :

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

$$h_1 + h_5 = 0$$

$$h_2 + h_4 = 0$$

Ce qui, sous forme matricielle, s'écrit $UL + U_0 = F$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.140 \\ 8.340 \\ -14.480 \\ -8.350 \\ -6.160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.020 \\ -0.010 \end{bmatrix}$$

Avec $U_0^T = [0 \ 0 \ 0]$

Les matrices opérateur et résultat se présentent comme suit :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.00 & -0.02 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.577 & 0.516 & -0.158 & 0.375 & -0.125 & -0.250 & -0.125 & -0.375 \\ 0.577 & -0.258 & 0.474 & -0.125 & 0.375 & -0.250 & -0.375 & 0.125 \\ 0.577 & -0.258 & -0.316 & -0.250 & -0.250 & 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.000 & 0.000 & 0.791 & 0.125 & -0.375 & 0.250 & 0.375 & -0.125 \\ 0.000 & 0.775 & 0.158 & -0.375 & 0.125 & 0.250 & -0.125 & 0.375 \\ \hline 0.000 & -0.015 & -0.011 & 0.006 & 0.001 & -0.007 & 0.009 & 0.014 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On constate la similitude parfaite entre le modèle des équations d'observation et le modèle des équations conditionnées en regard aux résultats numériques obtenus pour L et Q_{LL} .

■ Déficience de rang, inverse généralisée et réseau libre

Dans l'exemple du réseau de nivellement, ignorons la cote du point A. Il s'agit d'un ajustement en réseau libre (sans contrainte) dont l'intérêt est de focaliser sur les observations. On pourrait dire que le modèle aux équations conditionnées remplissent également ce rôle, si ce n'est que l'automatisation des fermetures n'est pas aisée. À ce titre, le modèle aux équations d'observation est plus simple à programmer puisqu'à chaque observation, nous avons une équation.

Dans notre exemple de réseau de nivellement, nous n'avons qu'un point connu en altitude et nous pouvons dénommer cet ajustement comme un ajustement en contrainte minimale.

Le modèle fonctionnel s'écrit comme suit en considérant l'altitude du point A comme paramètre à estimer :

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_A \\ Z_B \\ Z_C \end{bmatrix}$$

La déficience de rang peut se calculer à l'aide des rotations de Givens et, dans

notre exemple, il sera de 1. La matrice opérateur s'écrivant :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} m-rd = 2 & rd = 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 6.14 \\ 1 & 0 & -1 & 8.34 \\ 0 & -1 & 1 & -14.48 \\ -1 & 0 & 1 & -8.35 \\ 1 & -1 & 0 & -6.16 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Avec la matrice résultat :

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} m-rd = 2 & rd = 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.500 & 0.354 & 0.000 & 0.006 \\ 0.500 & 0.354 & 0.000 & 0.001 \\ 0.000 & -0.707 & 0.000 & -0.008 \\ -0.500 & -0.354 & 0.000 & 0.009 \\ 0.500 & -0.354 & 0.000 & 0.014 \\ \hline 0.500 & 0.354 & 1.000 & 8.341 \\ 0.000 & 0.707 & 1.000 & 14.488 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On constate que le vecteur des résidus est identique à celui obtenu par les autres modèles (équations d'observation et équations conditionnées).

De plus, et comme mentionné auparavant, la colonne singulière porte sur le dernier paramètre qui est l'altitude du point C. Nous pouvons bien sûr intervertir les paramètres et faire porter cette singularité sur le paramètre de notre choix. Nous allons procéder à la deuxième orthogonalisation qui portera sur la partie inférieure de la matrice opérateur soit :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} m-rd & rd & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m-rd \\ rd \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\alpha & R_1^{-1} & X_1 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Soit en considérant les résultats de la première orthogonalisation :

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} m-rd = 2 & rd = 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.500 & 0.354 & 1.000 & 8.341 \\ 0.000 & 0.707 & 1.000 & 14.488 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ \hline & R_1^{-1} & -\alpha & \\ \hline 1.000 & 0.500 & 0.354 & 8.341 \\ 1.000 & 0.000 & 0.707 & 14.488 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ \hline -\alpha & R_1^{-1} & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Après avoir permuté les sous-matrices $-\alpha$ et R_1^{-1} , nous procédons à la seconde orthogonalisation pour obtenir :





	m-rd=2	rd=1	1
W =	0.577	0.333	0.000
	0.577	-0.167	0.354
	0.577	-0.167	-0.354
			X

Nous avons maintenant des solutions pour les points A,B et C qui correspondent à un plan moyen qui s'est substitué à l'altitude du point A comme dans l'exemple précédent. C'est le résultat typique d'une inverse généralisée et qui illustre la résolution d'un réseau libre. On peut vérifier les résultats obtenus en considérant à nouveau l'altitude du point A pour déduire l'altitude des points B et C.

$$Z_B = Z_A + 6.878 - 0.732 = 130.326 \text{ m}$$

$$Z_C = Z_A - 7.610 - 0.732 = 115.838 \text{ m}$$

La matrice des cofacteurs des paramètres s'écrivant $Q_{\bar{X}\bar{X}} = WW^T$:

$$Q_{\bar{X}\bar{X}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.167 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.250 \end{bmatrix}$$

Ce résultat illustre encore l'un des attraits de l'ajustement en réseau libre, puisque la matrice des cofacteurs des paramètres est dénuée de corrélation.

$$C_{\bar{X}\bar{X}} = \sigma^2 Q_{\bar{X}\bar{X}}$$

Et nous obtenons pour les paramètres les écarts-standards *a posteriori* suivants :

$$\sigma_{z_A} = \sqrt{C_{\bar{X}\bar{X}(1,1)}} = \pm 0.016 \text{ m}$$

$$\sigma_{z_B} = \sqrt{C_{\bar{X}\bar{X}(2,2)}} = \pm 0.007 \text{ m}$$

$$\sigma_{z_C} = \sqrt{C_{\bar{X}\bar{X}(3,3)}} = \pm 0.008 \text{ m}$$

L'ajustement en réseau libre permet de conduire les tests de détection d'erreur, comme ceux que nous utilisons et qui sont basés sur la méthode B du Professeur Baarda [36], et de tester également la congruence des points de contrôle.

C'est l'approche typique que l'on utilise pour les réseaux de déformation en surveillance numérique (*monitoring*) où il faut également tester la stabilité des points de contrôle avant de procéder à un ajustement sous contrainte.

Algorithme

La programmation de l'algorithme d'orthogonalisation généralisée n'offre aucune difficulté particulière et nous en donnons un exemple écrit en langage

ANSI C. En entrée, il faut une matrice dont les dimensions sont les suivantes :

		m	r
A =	n	A ₁	A ₂
	p	A ₃	A ₄
		m	r
W =	n	W ₁	W ₂
	p	W ₃	W ₄

et dont le résultat remplacera son contenu initial.

```

gso(c, m,r,n,p)
double c[N+1][N+1];
int m, r, n, p;
{
    int x,i,j,h;
    double s,prd;
    for(h=1;h<=m;h++)
        nombre de transformations
    {
        s=0.0;
        for(x=1;x<=n;x++)
            produit scalaire
            s = s + c[x][h] * c[x][h];
        for(j=1;j<=n+p;j++)
            normalisation
            c[j][h] = c[j][h] / sqrt(s);
        for(i=h+1;i<=m+r;i++)
            {
                prd=0.0;
                for(x=1;x<=n;x++)
                    transformation
                    prd = prd + c[x][h] * c[x][i];
                for(j=1;j<=n+p;j++)
                    c[j][i] = c[j][i] - c[j][h] * prd;
            }
    }
}
    
```

Conclusion

Au terme de cet article, nous souhaitons que le lecteur ait pu prendre en considération la beauté et l'élégance de cet algorithme. La concision de celui-ci et le fait que les transformations se réalisent dans la matrice opérateur initiale, nous permettent de l'utiliser abondamment dans toutes les applications logicielles que nous développons où nous devons faire appel à la méthode des moindres carrés et à la méthode B de test imaginée par le Professeur Baarda de Delft [15].

L'orthogonalisation généralisée ne nécessite pas la formation des équations normales et est donc numériquement plus stable que la méthode conventionnelle [14]. De plus, elle permet de traiter tous les modèles d'équation ainsi que l'ajustement de réseaux libres qui sont courants dans les projets d'auscultation et d'étude de déformation.

Le géomètre et le topographe devront devenir non seulement les spécialistes de la géométrie, mais également de l'algèbre linéaire et arpenter les espaces vectoriels. ●

Contact

Prof. Joël van Cranenbroeck,
Managing Director,
cgeos2014@gmail.com

Références

- [1] F. Charamza, *Orthogonalization Algorithm for solving the fundamental problems of the calculus of observations*. Geofysikali Sbornik XIX 1971 n° 346. Academia Praha.
- [2] J. Gazdzicki, *Nowe algorytmy metoda najmniejszych kwadratow (New Algorithms of Adjustment by the Method of Least Squares)*, in Prace instytutu Geodezji i Kartografii, Tom XIII Zestyt 2(29) Warszawa 1966.
- [3] Joël van Cranenbroeck, 1986, *L'orthogonalisation Généralisée, Une solution Algorithmique au Problème des Moindres Carrés*, Bulletin trimestriel de la Société belge de photogrammétrie-télé-détection et cartographie N° 163-164, septembre-décembre 1986
- [4] C. G. Khatri and C. Radhakrisna Rao, *Solutions to some Functional Equations and their applications to characterization of Probability Distributions dans Sankhya: The Indian Journal of Statistics* 1968, Volume 30, Series A, Pt. 2, pp. 167-180
- [5] Schmitt, G., 1985. *Second order design*, In: Grafarend, E.W., Sanso, F. (editors) *Optimization and design of geodetic networks*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [6] Bruno Hourst sur <https://www.mieux-apprendre.com/blog/2018/04/02/mathematiques-art-et-beaute/>
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process?oldid=14454636
- [8] A. Björk, *Solving Linear Least Squares*

problems by Gram-Schmidt orthogonalization. BIT 7 (1967), 1-21

[9] G.H. Golub & C.F. Van Loan, *Matrix Computations*. (1983) John Hopkins University Press, Baltimore

[10] J. Adam, *A detailed Study of the duality Relation for Least-Squares Adjustment in Euclidean Spaces*. Bulletin Géodésique, Vol. 56, n° 3, pp. 180-195.

[11] J.A.R. Blais, *Duality Considerations in Linear Least Squares*. Manuscripta Geodaetica, Vol. 8, (1983), pp. 199-213.

[12] F. Charamza, 1978. *An Algorithm for the Minimum-Length Least Squares Solution of a Set of Observation Equations*, Presented at the I.A.G. International Symposium of Optimization of Design and Computation of Control Network, Sopron, Hungary 1977.

[13] Aleš Cepek, J. Pytel, 2005. *A Progress Report on Numerical Solutions of Least Squares Adjustment in GNU Project Gama*. Acta Polytechnica Vol. 45 N01/2005 by Czech Technical University in Prague.

[14] T. Krarup - *The Theory of Rounding Errors in the Adjustment by Elements of Geodetic Networks* in 2nd International Symposium on Geodetic Calculations - June 1966

[15] W. Baarda - *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks* 1968

[16] <https://www.rtb.be/article/le-groupe-anglais-1spatial-rachete-la-societe-liegeoise-star-apic-8020816>

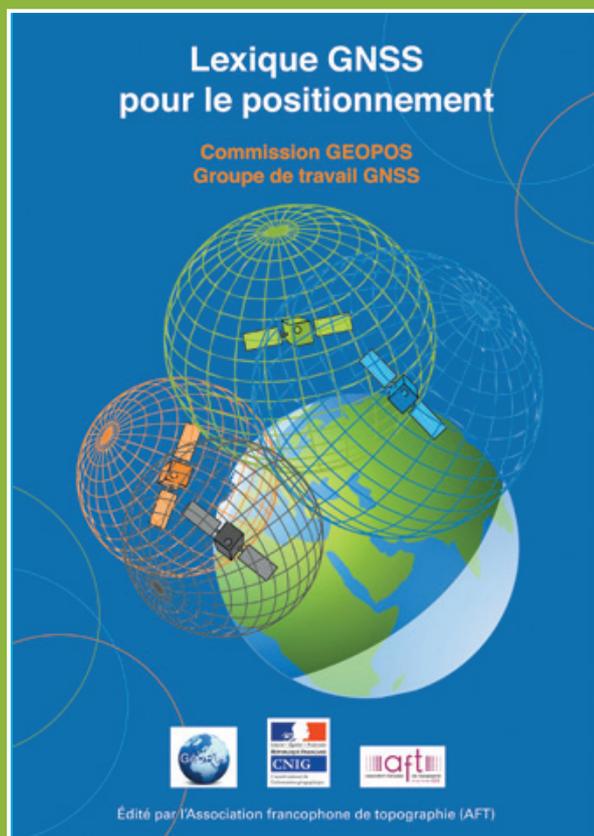
[17] <http://images.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-une-lettre-de-Sophie-Germain-a-Carl-Friedrich-Gauss-20.html>

[18] https://fr.wikipedia.org/wiki/Factorisation_de_Cholesky

[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Givens_rotation

ABSTRACT

The purpose of this article is to present a resolution method to the users of the least squares method in geodesy and topography and which has considerable advantages. This so-called "Generalized Orthogonalization" method is based on a modified version of the Gram-Schmidt orthogonalization method. It is very concise, numerically stable and allows the solution of simply or overdetermined systems of linear equations. It does not use any matrix inversion algorithm or the successive elimination technique. There is no formation of normal equations.



COMMANDEZ LE "LEXIQUE GNSS POUR LE POSITIONNEMENT"

AU PRIX DE 10,00 €

21 x 29,7 cm, 32 pages - frais de port inclus (France)

M/Mme Nom : _____

Prénom : _____

Société ou organisme : _____

Adresse : _____

Code postal : Ville : _____

Tél. :

Courriel : _____

Date

Signature

Bulletin de commande à retourner accompagné d'un chèque à l'Association francophone de topographie
73, avenue de Paris - 94165 SAINT-MANDÉ Cedex - Tél. : +33 (0) 1 43 98 84 80

Achat également sur Internet : www.aftopo.org
Téléchargement gratuit en format PDF.