

Généralisation des réfractions terrestres et bathymétriques : utilisation concrète et simulations de levés bathymétriques au sonar multifaisceaux

■ Thomas TOUZÉ

Cet article prolonge le précédent [Touzé, 2022] sur la proposition d'une nouvelle modélisation de la réfraction basée sur le rapprochement des méthodes employées en topométrie et en hydrographie. Dans ce nouvel opus, nous mettons en avant les limites des hypothèses du dernier modèle que nous avons pu corriger. Ainsi, nous fournissons les formules de cette nouvelle proposition qui sont exploitables du fait que les profils de célérité qu'elle requière sont mesurables sur le terrain à l'aide d'une sonde SVP en bathymétrie, ou de profils de température en terrestre. Ces nouvelles formules ne sont pas démontrées dans cet article, toutefois une publication finale, synthétisant tous ces travaux, est en cours de rédaction. Dans cet article nous présentons, ensuite, des résultats de simulations bathymétriques basées sur deux vrais profils de célérité et qui montrent une correspondance avec du lancer de rayons qui est centimétrique, pour des mesures jusqu'à 60 m, ou décimétrique, pour des bathymétries à très grandes profondeurs (2 250 m). Enfin, nous discutons de la mise en œuvre de ce modèle en topométrie ou pour des levés aéroportés et estimons les performances qu'il pourrait atteindre dans ce contexte.

MOTS-CLÉS

Réfraction terrestre, réfraction acoustique, loi de Snell-Descartes, équation eikonale

Version finale du modèle

■ Résumé des travaux précédents

Dans notre précédent article [Touzé, 2022], publié dans cette revue, nous avons :

1. Démontré que la loi de Snell-Descartes impliquait l'équation eikonale ;
2. Exprimé l'équation eikonale de manière tensorielle ;
3. En partant de cette dernière, sous les hypothèses d'une Terre localement sphérique et de la verticalité du gradient de célérité, obtenu l'équation différentielle de degré 2 (voir éq. 53 p. 33) régissant la dénivelée le long du chemin ;
4. Résolu cette équation en approchant les intégrales par des sommes.

Pour cette dernière étape, nous avons supposé connaître, tout le long de la trajectoire de notre onde, les valeurs v_i et v'_i de la célérité et de son gradient selon n couches isochrones, c'est-à-dire des couches que l'onde traverse selon une durée constante. Ce prérequis ne nous satisfaisait pas du fait que ces couches ne peuvent pas être connues a priori. Par conséquent, de tels profils de célérité et de gradient sont impossibles à mesurer.

Nous avons donc entrepris de repartir de l'équation différentielle. Nous sommes parvenus à la résoudre d'une manière plus rigoureuse et élégante. Nous n'allons pas présenter ici la démonstration, mais simplement les résultats. Présentement, nous préparons un article qui fera la synthèse de tous ces travaux et inclura cette résolution.

Nous sommes donc toujours dans le cadre de la *figure 1* dans laquelle, connaissant l'angle d'émission, la durée

Notre précédent article sur la réfraction partait du constat qu'en topométrie et en hydrographie, le même phénomène physique était traité selon deux approches très différentes, à savoir :

- du lancer de rayons en bathymétrie en s'appuyant sur la mesure régulière de profils de célérité ;
- en topométrie, une dissociation de l'échelle et de la rotation, avec, pour cette dernière, l'introduction du coefficient de réfraction que les topographes peinent à lier à des mesures météorologiques.

Dans cet article, nous avons pu démontrer que les réfractions topométriques et bathymétriques étaient équivalentes en termes de modélisation. Nous avons également proposé une modélisation qui, malheureusement, reposait sur des profils de célérité impossibles à mesurer.

Dans ce nouvel article sur la réfraction, nous présentons les résultats de notre modèle corrigé. En effet, la modélisation des effets de la réfraction sur la longueur et la déviation angulaire se fonde désormais sur des profils de célérité mesurables sur le terrain. La démonstration de ce modèle ne sera pas présentée ici. Nous préparons actuellement une publication finale et anglophone qui contiendra l'intégralité de ce travail. Ainsi, nous nous concentrons ici sur le résultat de notre proposition de modélisation de la réfraction sur des levés bathymétriques simulés, mais reposant sur de réelles mesures de célérité gracieusement mises à notre disposition par les sociétés GEOxyz et iXBlue. L'analyse de ces résultats bathymétriques nous permet enfin d'estimer ce qui pourrait être obtenu en topométrie ou lors de levés aéroportés.

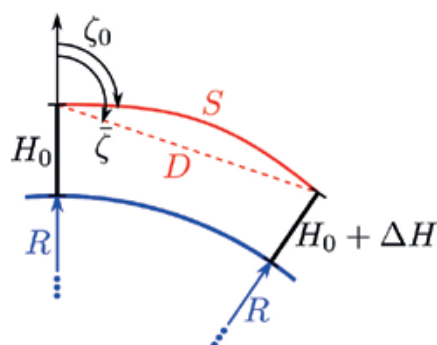


Figure 1. Soit une visée émise selon un angle zénithal ξ_0 et une durée de trajet Δt . Nous cherchons à résoudre la longueur S et l'angle ξ corrigé de la réfraction.

■ Profil de célérité

De l'émetteur à la sonde mesurée, nous mesurons, à *pas spatial constant*, p valeurs v_i de la célérité et de son gradient v'_i . Le long du trajet, nous disposons donc des profils de la célérité et du gradient de célérité.

Soit l'altitude H . Pour exprimer le gradient, nous introduisons h que nous définissons ainsi :

- pour des mesures immergées,
 $h = H - H_{SL}$ avec H_{SL} l'altitude de la surface libre, ainsi, h est l'opposé de la profondeur ;
- pour des mesures émergées,
 $h = H - H_{sol}$ avec H_{sol} l'altitude du sol.

Nous définissons ainsi le gradient v' de la manière suivante.

$$v' = \frac{dv}{db}$$

■ Résolution de la longueur S du trajet

Nous connaissons la durée du trajet Δt . Cette durée correspond ici à la moitié de celle du trajet aller-retour. Nous cherchons la célérité moyenne vraie¹ \hat{v} telle qu'il soit possible d'écrire :

$$S = \hat{v} \Delta t$$

Cette célérité moyenne peut se déduire de la moyenne arithmétique des inverses de la célérité le long du trajet selon l'expression suivante [Touzé, 2023] :

$$\frac{1}{\hat{v}} = \frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{v} ds \approx \frac{1}{p} \sum_{i=0}^p \frac{1}{v_i}$$

¹ En hydrographie, on parle de célérité harmonique.

$\hat{w} = \frac{1}{S} \int_0^S v \, ds \approx \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v_i$	$\rho = \frac{\int_0^S s v \, ds}{S \int_0^S v \, ds} \approx \frac{\sum s_i v_i}{S \sum v_i}$
$\hat{w}' = \frac{1}{S} \int_0^S v' \, ds \approx \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v'_i$	$\rho' = \frac{\int_0^S s v' \, ds}{S \int_0^S v' \, ds} \approx \frac{\sum s_i v'_i}{S \sum v'_i}$
$\sigma_w^2 = \frac{1}{S} \int_0^S \Delta v^2 \, ds \approx \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \Delta v_i^2$	$\rho_{ww} = \frac{\int_0^S s \Delta v^2 \, ds}{S \int_0^S \Delta v^2 \, ds} \approx \frac{\sum s_i \Delta v_i^2}{S \sum \Delta v_i^2}$
$\sigma_{ww'} = \frac{1}{S} \int_0^S \Delta v \Delta v' \, ds \approx \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \Delta v_i \Delta v'_i$	$\rho_{ww'} = \frac{\int_0^S s \Delta v \Delta v' \, ds}{S \int_0^S \Delta v \Delta v' \, ds} \approx \frac{\sum s_i \Delta v_i \Delta v'_i}{S \sum \Delta v_i \Delta v'_i}$

Tableau 1. Pour la détermination de la dénivelée vraie et de la correction angulaire, il est nécessaire de déduire des profils de célérité et du gradient les moyennes, moyennes pondérées, variances et covariances suivantes.

■ Expressions de la dénivelée vraie et de la correction angulaire

Avec ce nouveau modèle, dans sa version corrigée, nous pouvons exprimer exactement la dénivelée vraie ΔH entre l'émetteur et la sonde mesurée en fonction des huit paramètres dans le *tableau 1* (avec $\Delta v = v - \hat{w}$ et $\Delta v' = v' - \hat{w}'$). Si ces profils sont bien mesurés à pas spatial constant le long du trajet, alors ces huit paramètres s'obtiennent par des moyennes arithmétiques, des moyennes pondérées, des variances empiriques ou des covariances empiriques [Touzé, 2023].

Dans la première ligne de ce tableau, nous trouvons la célérité moyenne spatiale \hat{w} et le coefficient ρ . Le couple formé par \hat{w} et la longueur ρS peut être interprété comme le barycentre du profil de célérité le long du trajet. Pour la deuxième ligne, de la même façon, le couple $(\hat{w}', \rho' S)$ correspond au barycentre du profil du gradient.

Les quatre autres termes, en lien avec la variance de la célérité (troisième ligne) et la covariance célérité-gradient (dernière ligne), ont une influence bien plus faible dans le résultat final, mais permettent d'obtenir une expression exacte de la dénivelée.

Nous pouvons alors introduire les coefficients suivants :

- la correction de variance

$$\mu = (1 - \rho_{ww}) \frac{\sigma_w^2}{\hat{w}^2}$$

- la correction de covariance

$$\mu' = (1 - \rho_{ww'}) \frac{\sigma_{ww'}}{\hat{y}\hat{y}'}$$

- le coefficient de réfraction $k = \frac{R\hat{w}'}{\hat{w}}$

Exprimons maintenant la dénivelée vraie ΔH et la correction angulaire $\Delta \zeta$. Nous obtenons :

$$\Delta H = S \cos \zeta_0 + K \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{2B}$$

$$\Delta\zeta = \bar{\zeta} - \zeta_0 = \frac{S \sin \zeta_0}{2R} (1 - K)$$

Avec v_0 la célérité à l'émission et K défini par

$$K = \frac{\hat{w}^2}{v_0^2} ((3 - 4\rho + 2\mu) - k(3 - 2\rho - 2\rho' + 2\mu'))$$

Simplification

Lorsque les variations relatives de la célérité et du gradient sont faibles, nous avons :

- $\mu \approx \mu' \approx 0$
- $\rho \approx \rho' \approx 1/2$

Ce qui donne

$$K \approx \frac{\hat{W}^2}{v_0^2}(1-k)$$

Si de surcroît les visées sont proches de l'horizontale (ce qui implique $\hat{w} \approx v_0$), nous retombons sur le modèle standard, en topométrie, du nivellement trigonométrique.

Simulations en bathymétrie

■ Profils de célérité en fonction de la profondeur

Lors de levés bathymétriques, des
profils de célérité selon la profondeur

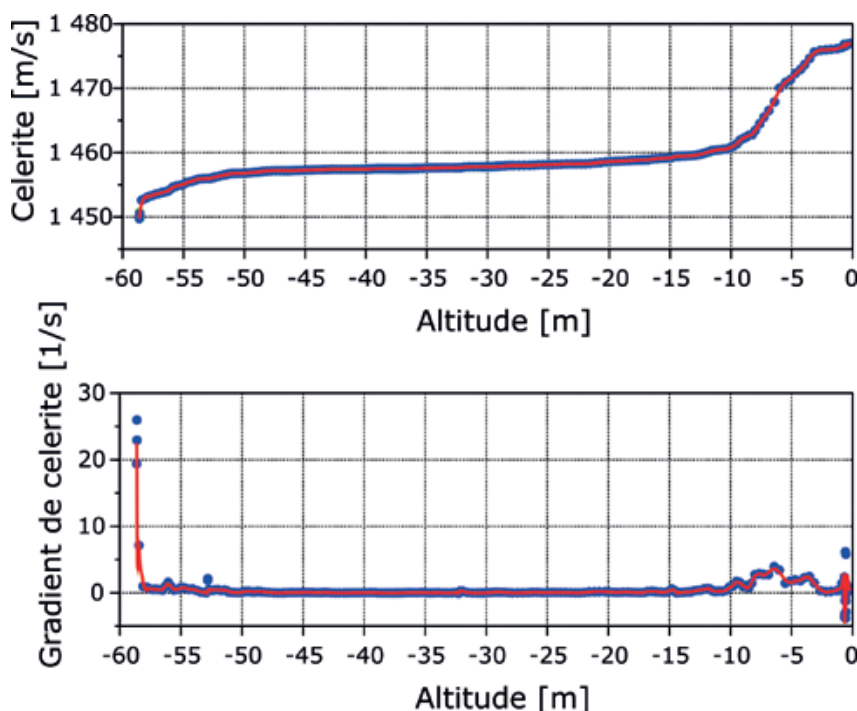


Figure 2. Profil de célérité mesuré en juin 2019 sur le lac de Monteynard par la société GEOxyz. Le gradient est déduit du profil. En bleu les mesures, en rouge les courbes extrapolées.

sont régulièrement mesurés à l'aide de systèmes de mesures idoines (SVP pour *Sound Velocity Profiler*). Il est également fréquent qu'un célérimètre de coque (SVS) soit présent à proximité immédiate du sonar. Lorsque la célérité mesurée par ce dernier diffère trop du dernier profil de

célérité mesuré, l'hydrographe reçoit une alerte, signe qu'il est temps de mesurer un nouveau profil. En figure 2 et en figure 3, nous présentons deux profils réels de célérité mesurés, respectivement, en eau douce lacustre par GEOxyz et en Méditerranée par iXBlue.

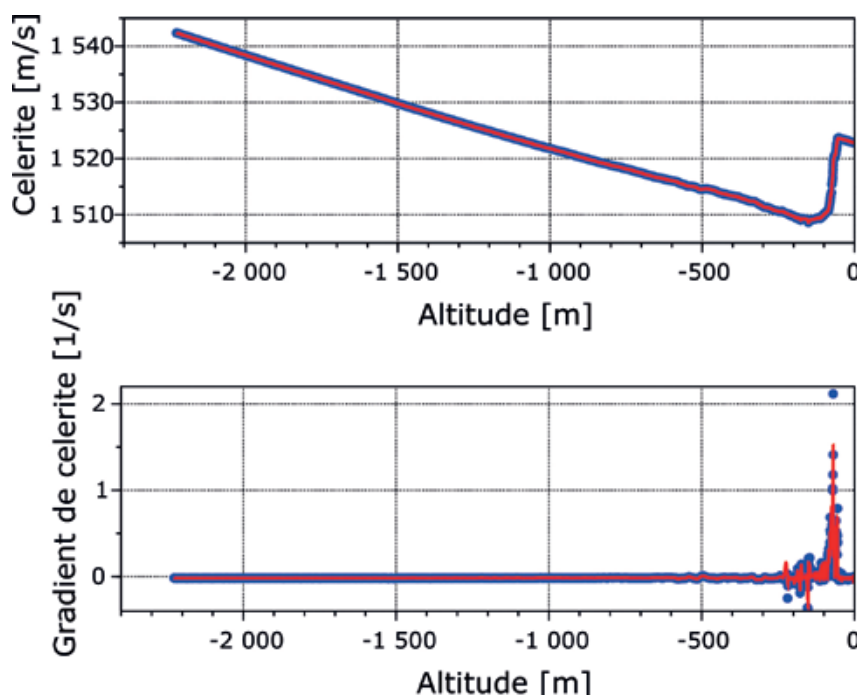


Figure 3. Profil de célérité au large de Toulon en grande profondeur mesuré par la société iXBlue.

Pour appliquer notre modèle, il est nécessaire de connaître la célérité et son gradient le long de la visée. Or, en bathymétrie, le profil est mesuré à peu près verticalement. S'il s'agit d'un levé au sonar monofaisceau, notre modèle peut être appliqué tel quel. Cependant, dans le cas d'un levé au sonar multifaisceaux, une correction doit être apportée du fait de la non-verticalité des mesures.

■ Méthodologie en bathymétrie

Avant tout nous remarquons que

$$\frac{dH}{ds} = \cos \zeta$$

C'est-à-dire

$$\delta s = \frac{\delta H}{\cos \zeta}$$

De plus, le cosinus peut se déduire de deux manières différentes en fonction de la célérité et de l'angle d'émission. La première est exacte, mais perd le signe tandis que la seconde conserve le signe, mais est approximative.

$$|\cos \zeta| = \sqrt{1 - \frac{v^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2}}$$

$$\cos \zeta \approx \left(1 - \frac{v - v_0}{v_0} \tan^2 \zeta_0\right) \cos \zeta_0$$

Nous pouvons donc déduire le signe de la seconde expression et l'appliquer à la première pour obtenir le cosinus. Ainsi, dans nos intégrales définissant tous les paramètres utiles de notre modèle, nous pouvons remplacer ds par $dH / \cos \zeta$. Et si les profils de célérité et du gradient sont définis selon un pas constant en profondeur, alors les intégrales se simplifient très bien en sommes.

Par exemple, pour la célérité moyenne isométrique, nous obtenons :

$$\bar{w} \approx \frac{\sum \frac{v_i}{\cos \zeta_i}}{\sum \frac{1}{\cos \zeta_i}}$$

Pour le calcul des coefficients ρ , ρ' , ρ_{ww} et $\rho_{ww'}$, nous pouvons employer une astuce reposant sur une matrice triangulaire inférieure contenant les inverses des cosinus.

La résolution se fait de manière itérative en estimant grossièrement la dénivelée à partir de la célérité de coque et l'angle d'émission. Cela permet de sélectionner l'intervalle du profil de célérité à partir

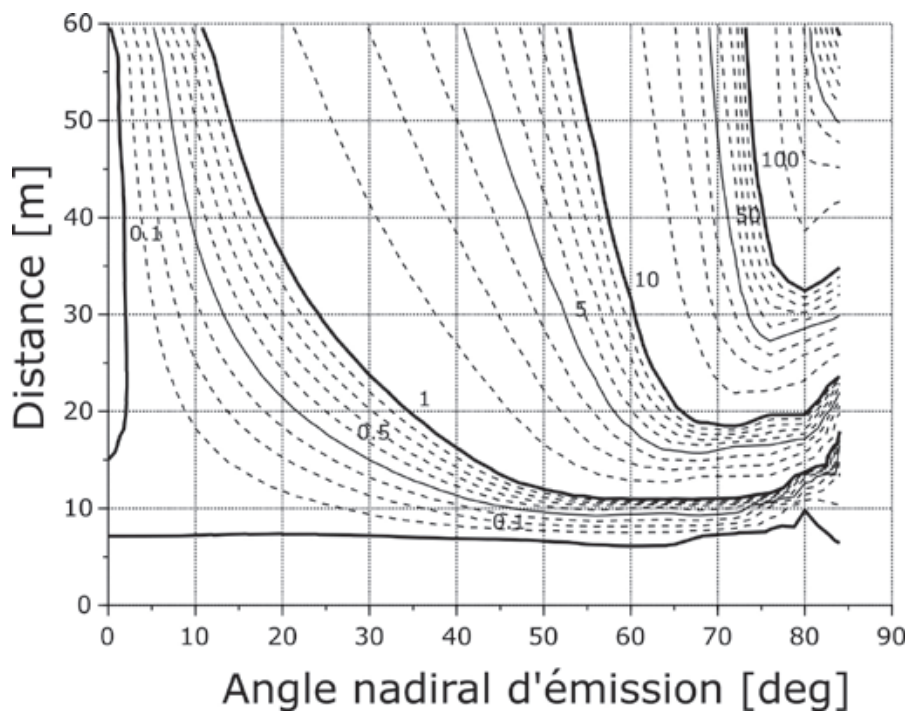


Figure 4. Écarts 3D en mm entre le lancer de rayon au pas de 2 cm et le nouveau modèle sur la simulation d'un levé bathymétrique sur le lac de Monteynard.

duquel nous calculons nos paramètres. À chaque itération, nous améliorons l'estimation de la longueur du trajet et de la correction angulaire.

■ Comparaison en milieu lacustre, sur 60 m, avec du lancer de rayons

À partir du profil de célérité mesuré sur le lac de Monteynard, nous avons effectué 440 simulations de lancer de rayon, avec un angle nadiral allant de 0 à 84° tous les 4° et des distances allant de 1 m à 60 m. Le pas du lancer de rayon était de 2 cm. Nous avons alors comparé les coordonnées issues de notre modèle avec celles issues du lancer de rayon. Les écarts en mm sont représentés en figure 4.

Nous constatons des écarts qui se dégradent pour les visées les plus longues et les plus horizontales. Toutefois, les résultats sont prometteurs. En effet, pour des angles nadiraux d'émission inférieurs à 55°, les écarts sont inférieurs au centimètre. Au plus près du nadir, jusqu'à 12°, les écarts sont inférieurs au millimètre.

Nous supposons que la dégradation en s'approchant de l'horizontale vient du terme correctif de la célérité en $1/\cos \zeta$ qui, pour ces visées, devient crucial tout autant que délicat à estimer exactement. À notre décharge, il est logique

que l'estimation de la trajectoire depuis un profil de célérité vertical perde en précision pour des visées horizontales.

■ Comparaison sur 2 300 m en mer Méditerranée

La même comparaison a été faite à partir du profil de célérité en grande profondeur en figure 3, jusqu'à près de 2 250 m. Le pas du lancer de rayon était

cette fois-ci de 50 cm. Nous obtenons les écarts, exprimés en millimètres, en figure 5. Les résultats sont globalement supérieurs d'un ordre de grandeur à ceux du lac de Monteynard. Ils sont également plus bruités.

En général, sur de telles profondeurs, l'ouverture des sonars multifaisceaux ne dépasse pas 40°. Les écarts que nous obtenons à une telle ouverture angulaire sont inférieurs à 5 cm pour les distances inférieures à 1 500 m et atteignent 10 cm au-delà de 2 200 m.

Le bruit pourrait être réduit en diminuant le pas du lancer de rayon, cependant le temps de calcul s'en trouverait augmenté.

Nous supposons, par rapport au résultat obtenu sur Monteynard, que cet exemple est plus difficile du fait de la rupture de célérité à 80 m jusqu'à la thermocline vers 100 m. De telles variations requièrent, notamment pour le calcul du gradient, un meilleur traitement de la célérité que celui que nous avons mis en œuvre.

Utilisation potentielle en topométrie

■ Lien entre le modèle et les mesures physiques

Le modèle proposé repose sur la mesure de profils de célérité desquels

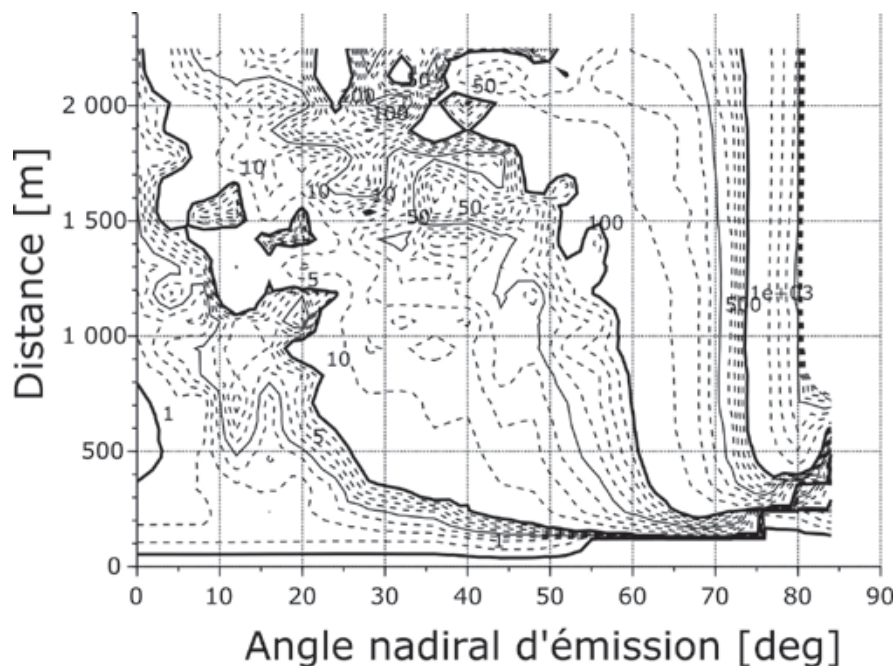


Figure 5. Écarts 3D en mm entre le lancer de rayon au pas de 50 cm et le nouveau modèle sur la simulation d'un levé bathymétrique en mer Méditerranée.



découlent les profils du gradient, puis les paramètres nécessaires aux formules présentées. Si nous mesurons des profils de température, complétés par quelques mesures de pression et d'humidité relative, et connaissant la longueur d'onde du signal à traiter, alors, en appliquant et en dérivant les formules de Ciddor² [Ciddor, 1996], il est possible d'en déduire le profil de célérité ainsi que son gradient.

■ En auscultation

Imaginons un drone équipé d'une sonde de température capable de mesurer à une fréquence de l'ordre du Hertz et d'éviter les biais thermiques potentiellement engendrés par le vol et le Soleil. Une mesure de profils de température le long de quelques visées bien choisies serait possible et permettrait de calculer les paramètres de réfraction nécessaires à l'exacte correction des angles zénithaux. Dans le cadre du monitoring, nous pourrions même appliquer une tactique inspirée de la bathymétrie en comparant la température au niveau de la station par un thermomètre fixe et celle déduite du profil : un écart trop grand déclenchant automatiquement un nouveau profil.

■ En LiDAR et en photogrammétrie

Le modèle proposé permet, *in fine*, d'exprimer tous les effets de la réfraction sous la forme d'une rotation et d'un facteur d'échelle. En effet, pour la rotation, nous avons pu déterminer la correction angulaire $\Delta\zeta$ à apporter à l'angle zénithal d'émission. Ainsi, si nous prenons le vecteur tangent à l'émission, la direction vers le point mesuré s'obtient en appliquant la rotation d'angle $\Delta\zeta$ autour du vecteur normal au plan vertical de l'émission.

De cette manière, tant en LiDAR qu'en photogrammétrie, la réfraction pourrait s'insérer sans aucune difficulté dans leurs équations de géolocalisation respectives, car dans les deux cas, celles-ci sont matricielles.

De plus, pour les levés photogrammétriques et LiDAR aéroportés, les profils

de célérité pourraient, *a minima*, être mesurés au décollage et à l'atterrissage.

Conclusion

Ces premiers résultats sont encourageants pour plusieurs raisons. Tout d'abord, en dehors des émissions proches de l'horizontale, les comparaisons en bathymétrie avec le lancer de rayons donnent des écarts tout à fait satisfaisants par rapport à la norme S44 de l'OHI (Organisation hydrographique internationale) sur les levés hydrographiques. Nous obtenons ainsi des écarts de l'ordre du centimètre pour des sondes à moins de 60 m et de l'ordre du décimètre jusqu'à 2 000 m.

Notre approche présente également un avantage en termes de temps de calcul. En effet, sur de telles longueurs, les lancers de rayon que nous avons effectués se faisaient pour Monteynard et Toulon, respectivement, en 3 000 et 4 500 pas pour les faisceaux les plus longs. Le modèle proposé, quant à lui, nécessitait en moyenne six itérations. Certes, nous n'avons pas encore effectué de mesures ni de simulations en optique ni en LiDAR. Cependant, des résultats obtenus en bathymétrie, nous pouvons extrapoler ceux que nous pourrions avoir en mesures optique ou laser. En effet, l'ordre de grandeur des variations relatives maximales des célérités testées était de 0.02 (environ 30 m/s pour une vitesse de 1 500 m/s). Or, dans le domaine visible ou proche infrarouge, les variations relatives de la célérité du fait des variations météorologiques sont considérablement plus faibles : de l'ordre de 1 ppm par degré Celsius. Prenons 20 °C de variations dans un cas très défavorable, ce qui correspond à une variation relative maximale de la célérité de la lumière de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$; mille fois plus faible qu'en bathymétrie ! Nous nous attendons donc à des résultats mille fois meilleurs en topométrie. Nous sommes évidemment preneurs de données pour mettre à l'épreuve tout cela dans les contextes de levés topométriques, LiDAR et photogrammétriques.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement les sociétés GEOxyz et iXBlue pour la mise

à disposition de données nécessaires à nos simulations, ainsi que pour leur intérêt dans nos développements. ●

Bibliographie

[Touzé, 2022] *Généralisation des réfractions terrestres et bathymétriques : nouveau modèle dans le cas d'une stratification verticale de la célérité en Terre localement sphérique*, T. Touzé, 2022, XYZ n° 170, pp. 28 à 35.

[Touzé, 2023] *Generalization of terrestrial and bathymetric refractions: New model in the case of a vertically stratified propagation velocity on a locally spherical Earth*, T. Touzé, en cours de rédaction, à publier dans une revue à définir.

[Ciddor, 1996] *Refractive Index of Air : new equations for the visible and near infrared*, Philip E. Ciddor, Applied Optics, volume 35 n° 9, 1566-1573 (1996).

Contact

Thomas TOUZÉ
thomas.touze@edf.fr

ABSTRACT

This article extends the previous one [Touzé, 2022] on the proposal of a new modeling of refraction based on bringing together the methods used in surveying and hydrography. In this new opus, we highlight the limits of the hypothesis of the last model that we were able to correct. Thus, we provide the formulas of this new proposal which are exploitable because the celerity profiles it requires are measurable on the ground using an SVP probe in bathymetry, or temperature profiles on land. These new formulas are not demonstrated in this article, however a final publication, summarizing all this work, is currently being written. In this article, then, we present the results of bathymetric simulations based on two real celerity profiles and which show an adequation with ray tracing which is centimetric, for measurements up to 60 m, or decimetric, for bathymetries at very great depths (2,250 m). Finally we discuss the implementation of this model in land-surveying or for airborne surveys and estimate the performance it could achieve in this context.

² Les formules proposées par Ciddor permettent, connaissant la température, la pression atmosphérique, la pression de vapeur d'eau saturante et la teneur en CO₂, de calculer l'indice de réfraction. Ce modèle est recommandé par l'association internationale de géodésie (IAG).