

La déviation de la verticale, mal-aimée de la géodésie

■ Thomas TOUZÉ

L'instrumentation traditionnelle du topographe est liée au champ de pesanteur terrestre. En effet, lorsque nous verticalisons une canne ou une mire, ou lorsque nous mettons en station un tachéomètre ou un niveau, de fait, nous nous appuyons sur la direction de la verticale locale pour orienter nos instruments ou nos réflecteurs, c'est-à-dire sur la direction de la pesanteur. De la même façon, mais de manière plus discrète car bien enfouie dans les équations et les logiciels, les systèmes de mesures cinématiques requérant des gyroscopes ou, plus généralement, des centrales inertielles ou d'attitude utilisent le champ de pesanteur pour leurs orientations. La difficulté réside dans le fait qu'en dehors de l'altitude, les autres coordonnées globales que nous manipulons généralement sont indépendantes du champ de pesanteur : coordonnées Est et Nord projetées, longitude, latitude, hauteur ellipsoïdale ou encore coordonnées cartésiennes géocentriques sont toutes indépendantes de la pesanteur¹. C'est une autre affaire pour les systèmes locaux de coordonnées dont nous ne parlerons pas aujourd'hui.

MOTS-CLÉS

Déviation de la verticale, techniques terrestres de la géodésie

verrons notamment que même dans une basique réduction des distances à l'ellipsoïde, elle peut être significative. Enfin, nous parlerons des différentes façons de la déterminer.

De quoi s'agit-il ?

Tout part de la pesanteur locale : prenez un fil à plomb ou faites tomber un objet, la direction matérialisée par le premier ou suivie par le second est celle de la pesanteur. Si vous définissez le vecteur unitaire directeur de cet axe pointant vers le zénith, vous obtenez la verticale locale. Cette direction est orthonormale au plan horizontal local. Soit dit en passant, ce plan est la tangente à la surface équipotentielle de pesanteur.

Alors, lorsque nous calons la nivellette torique en mettant en station un tachéomètre ou un niveau, nous matérialisons ce plan horizontal. Ainsi, une fois mis en

Le topographe a donc besoin d'outils pour traiter ses mesures liées à la pesanteur afin d'obtenir des coordonnées exactes liées à l'ellipsoïde. Parmi ces outils, le plus connu est la côte du géoïde, fournie sous la forme d'une grille de conversion altimétrique et qui permet, avec succès et la plupart du temps avec une incertitude centimétrique, de passer des hauteurs ellipsoïdales aux altitudes et vice-versa. Il en existe d'autres qui sont nécessaires dans certains contextes afin d'éviter de petits biais évitables. Nous parlerons ainsi des longitudes et latitudes astronomiques desquelles découle notre mal-aimée, la déviation de la verticale.

L'objectif de cet article est de contribuer à réhabiliter ce paramètre géodésique. En effet, la déviation de la verticale est mal-connue, peu employée. Certes, comme nous le verrons, son application engendre rarement des améliorations plus grandes que quelques centimètres, mais ces cas peuvent survenir. Pour les détecter, il est nécessaire de connaître et comprendre un minimum ce paramètre.

¹ Il existe tout de même un lien au sens où l'ellipsoïde doit correspondre à une régression régionale ou globale du géoïde

Dans cet article, nous allons brièvement définir la déviation de la verticale, donner quelques exemples où elle devrait être prise en compte, avec les ordres de grandeur associés. Nous

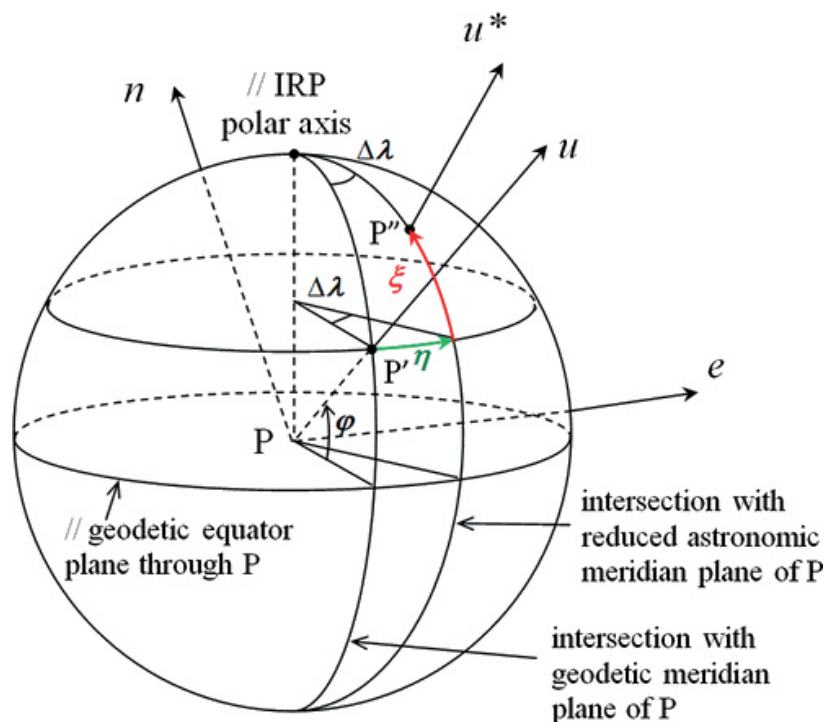


Figure 1. Schéma de la déviation de la verticale comme étant l'écart angulaire entre la normale à l'ellipsoïde u et la verticale locale u^* [1].



station, si l'appareil est bien réglé, son axe principal coïncide avec la verticale locale.

Ces faits peuvent paraître évidents, néanmoins il nous a paru important de les rappeler, car l'objet de cet article se ramène à la connaissance de la verticale locale dans les différents systèmes de coordonnées sur lesquels nous nous appuyons dans notre travail. Par ces exemples, nous espérons convaincre que la verticale est une chose concrète. Prenons la *figure 1*, issue de [1], ainsi qu'un point P défini sur l'ellipsoïde par ses coordonnées géographiques (longitude λ , latitude ϕ et hauteur ellipsoïdale h). Le vecteur directeur u de la normale à l'ellipsoïde en ce point peut s'exprimer dans le repère cartésien géocentrique par la formule suivante [2], dans laquelle TRF désigne le repère cartésien géocentrique.

$$\vec{u}|_{TRF} = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Sur la *figure 1*, l'observateur verra la direction de la normale à l'ellipsoïde intersecter une sphère unitaire centrée sur lui au point P'. Du fait des ondulations du champ de pesanteur, la normale à ce champ en P, c'est-à-dire la verticale locale, n'est pas égale à la normale à l'ellipsoïde. Le vecteur de la verticale locale, u^* en *figure 1*, intersecte la sphère unitaire au point P''. Ce vecteur peut s'exprimer dans le repère cartésien géocentrique en imaginant qu'il existe une longitude Λ et une latitude Φ telles que :

$$\vec{u}^*|_{TRF} = \begin{bmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Lambda \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix}$$

Λ et Φ sont appelées respectivement, longitude et latitude astronomique. Le qualificatif d'astronomique, contre-intuitif désormais, s'explique par des raisons historiques. En effet, si vous déduisez votre longitude et votre latitude par des mesures angulaires astrogéodésiques, du fait que votre instrument soit connecté à la pesanté par la mise en station, ce sont ces valeurs-là que vous obtiendrez.

À ce stade nous recommandons fortement aux lectrices et lecteurs de cet article de se plonger ou replonger dans l'exceptionnel chapitre 5 du cours de géodésie de Françoise &

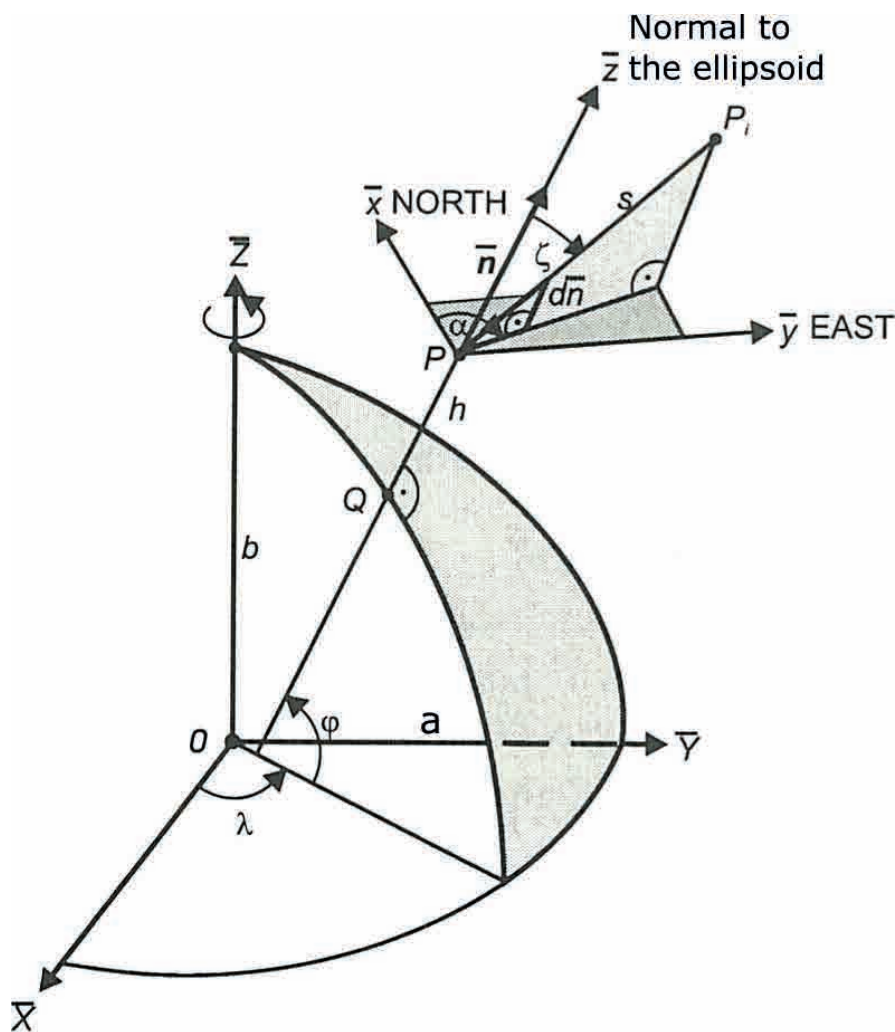


Figure 2. Le repère local géodésique au point P.

Henri Duquenne [2] intitulé "Techniques terrestres de la géodésie". Ce chapitre contient les définitions et les démonstrations des affirmations qui vont suivre dans cette section.

Tout d'abord, nous avons besoin d'introduire les repères locaux géodésiques et astronomiques :

- le repère local géodésique (RLG) en P (voir *figure 2*) est composé des trois vecteurs formant une base orthonormée directe : l'Est géodésique, tangent au parallèle en P, le Nord géodésique, tangent au méridien en P et la normale u à l'ellipsoïde. Il existe une matrice de changement de repère C_{LGF}^{TRF} permettant de transformer un vecteur exprimé dans le RLG pour le définir dans le TRF. Cette matrice est une matrice de rotation qui s'exprime en fonction de la longitude λ et de la latitude ϕ (voir la transposée de cette matrice dans [2] Chap. 5 formule 7) ;

- de la même manière, le repère local astronomique (RLA) en P est composé de trois vecteurs tangents ou normaux à l'équipotentielle de pesanteur en P pointant vers l'Est astronomique, le Nord astronomique et la verticale locale. La transformation du RLA vers le TRF peut donc elle aussi s'exprimer en fonction des longitudes et latitudes astronomiques Λ et Φ ([2] Chap. 5 formule 16). Un tachéomètre mis en station, à son orientation près, mesure dans le RLA.

$$C_{RLG}^{TRF} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$C_{RLA}^{TRF} = \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & -\cos \Lambda \sin \Phi & \cos \Lambda \cos \Phi \\ \cos \Lambda & -\sin \Lambda \sin \Phi & \sin \Lambda \cos \Phi \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \end{bmatrix}$$

Il est donc possible d'obtenir la matrice de changement de repère pour passer du RLA au RLG :

$$C_{RLA}^{RLG} = C_{TRF}^{RLG} C_{RLA}^{TRF} = (C_{RLG}^{TRF})^{-1} C_{RLA}^{TRF}$$

Cette matrice s'exprime en fonction de λ , ϕ , Λ et Φ . Son expression, un peu effrayante il faut bien l'admettre, se trouve dans ([2] Chap. 5 formule 19). Par définition des repères locaux géodésiques et astronomiques, nous pouvons écrire :

$$\vec{u}|_{RLG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}^*|_{RLA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La verticale locale u^* peut donc être exprimée dans le repère local géodésique, lié à l'ellipsoïde, de la manière suivante :

$$\vec{u}^*|_{RLG} = C_{RLA}^{RLG} \vec{u}^*|_{RLA}$$

Ce qui donne [2] :

$$\vec{u}^*|_{RLG} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \eta \approx (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \\ \xi \approx \Phi - \varphi \\ \zeta \approx 1 \end{cases}$$

Les paramètres η (êta) et ξ (xi) sont les composantes Est et Nord de la déviation de la verticale. Ce sont des termes proches de zéro qui caractérisent les écarts vers l'Est et le Nord géographiques de la verticale locale par rapport à la normale à l'ellipsoïde. Telle que définie précédemment, la déviation de la verticale s'exprime comme un vecteur unitaire dont η et ξ sont deux des trois composantes.

Souvent ces deux paramètres sont exprimés sous la forme d'angles (tels qu'en figure 1) en microradians ou en secondes d'arc. L'ordre de grandeur, en France métropolitaine, de ces composantes est la dizaine de secondes d'arc soit environ 50 μrad .

La matrice de changement de repère du RLA au RLG peut également s'exprimer en fonction de ces composantes ainsi que de la latitude. L'expression linéarisée de cette matrice est :

$$C_{RLA}^{RLG} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\eta \tan \varphi & \eta \\ \eta \tan \varphi & 1 & \xi \\ -\eta & -\xi & 1 \end{bmatrix}$$

Il est possible, naturellement, d'exprimer de manière rigoureuse cette matrice afin, notamment, de conserver son orthogonalité.

Enfin, si nous imaginons une visée dans un plan vertical d'azimut α , en figure 3, il est possible de calculer l'expression θ de la déviation de la verticale selon l'azimut α . Cela correspond à la différence entre l'angle zénithal ζ^* mesuré avec un tachéomètre, par rapport à la verticale, et l'angle zénithal géodésique

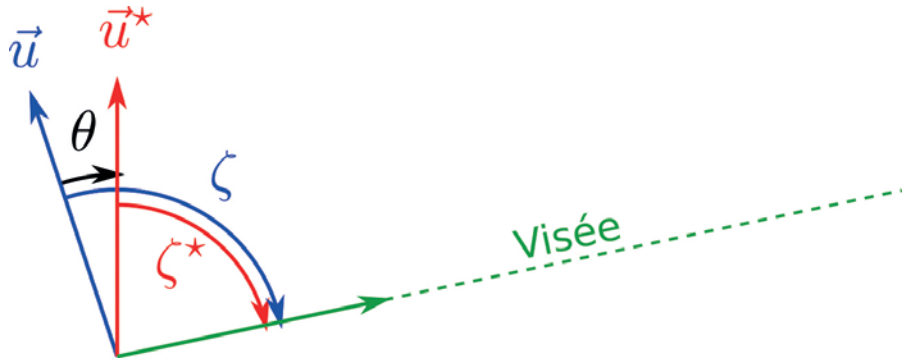


Figure 3. Déviation de la verticale dans le plan vertical d'une visée. ζ^* est ici l'angle zénithal mesuré (sans réfraction).

ζ , par rapport à la normale à l'ellipsoïde. On a ([2] chap. 5 formule 34) :

$$\theta = \zeta - \zeta^* = \eta \sin \alpha + \xi \cos \alpha$$

Exemple d'un levé LiDAR

Prenons un premier exemple d'un levé LiDAR aéroporté mesurant un point P à la surface de la Terre. Soit C, le centre de la Terre, G le centre de phase du GNSS et L le centre optique du LiDAR, nous pouvons écrire la relation de Chasles reliant ces différents points :

$$\vec{CP} = \vec{CG} + \vec{GL} + \vec{LP}$$

En introduisant nos repères connus TRF, RLG, RLA, mais également le repère I de la centrale d'attitude et L du LiDAR, obtenons l'équation de géolocalisation du point P :

$$P|_{TRF} = G|_{TRF} + C_{RLG}^{TRF} C_{RLA}^{RLG} C_I^{RLA} (\vec{GL}|_I + C_L^I \vec{LP}|_L)$$

Dans cette formule, nous avons les mesures :

- les coordonnées de G correspondant aux mesures GNSS, desquelles découle C_{RLG}^{TRF} ;
- le vecteur $LP|_L$ correspondant aux mesures LiDAR dans leur repère propre L ;
- la matrice de changement de repère C_I^{RLA} pour la rotation selon les trois angles mesurés par la centrale d'attitude.

Pour les paramètres de calibration, nous avons :

- le vecteur $GL|_I$ correspondant au bras de levier du LiDAR ;
- la matrice d'alignement (boresight) du LiDAR C_L^I .

Par la physique, les angles fournis par la centrale d'attitude nous amènent dans le repère local astronomique. Or, à notre connaissance, la rotation du RLA au repère local géodésique est toujours négligée et remplacée par la matrice identité. Regardons les conséquences que cette simplification engendre pour un levé aéroporté à la hauteur H au-dessus du sol et de largeur de fauchée F.

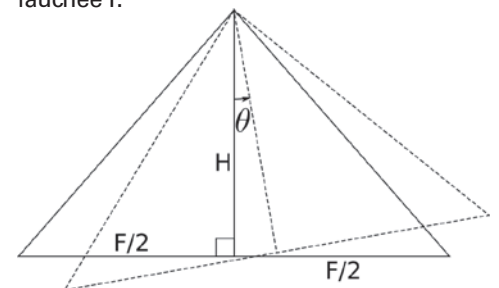


Figure 4. Schéma de l'effet de la non-prise en compte de la déviation de la verticale sur un levé LiDAR aéroporté.

Cette situation est illustrée en figure 4 où les pointillés indiquent le levé non corrigé de la déviation de la verticale dans le plan de la mesure. On peut y distinguer l'erreur altimétrique au nadir ε_n et celle en bout de fauchée ε_f . Par la trigonométrie sur cette figure, nous pouvons déduire que :

$$\varepsilon_n = \frac{H \theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_f = \frac{H \theta^2}{2} + \frac{F \theta}{2}$$

Si nous imaginons un vol fait à H = 500 m et une ouverture à 45°, c'est-à-dire F = 1 km, alors, pour une déviation de la verticale de 10'', soit 50 μrad , l'erreur altimétrique au nadir est négligeable, inférieure à 1 μm , tandis qu'en bout de fauchée, elle atteint 2.5 cm.



C'est un biais indépendant du sens du vol. Ainsi, si on imagine deux fauchées parallèles sans recouvrement, nous constaterons une marche de 5 cm entre les deux nuages de points associés.

Nous lisons parfois en LiDAR des articles rédigés par des entreprises rigoureuses et compétentes, maîtrisant parfaitement les problématiques de calibration, dans lesquels elles ont toujours besoin de faire du *strip adjustment* afin que les fauchées se recouvrent effectivement. Si les questions inertielles, de positionnement et de calibration sont maîtrisées, qu'est-ce qui peut expliquer ces problèmes de recouvrement ? Les seules explications que nous supposons sont la réfraction et la déviation de la verticale.

Exemple de la réduction des distances à l'ellipsoïde

Prenons maintenant un cas de figure qui est très connu, et bien que contenant quelques pièges, comme nous allons le montrer, nous mènera également à une nouvelle façon de mesurer la déviation de la verticale : la réduction des distances à l'ellipsoïde.

Si on mesure la distance D entre les points A et B , de hauteurs ellipsoïdales respectives h_A et h_B , et que le rayon de courbure de l'ellipsoïde selon l'azimut de la mesure est noté R , nous pouvons déduire de la loi des cosinus dans les triangles ACB et $A'CB'$ l'expression de la corde d'ellipsoïde c :

$$c = \sqrt{\frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R}\right)}}$$

Dans laquelle Δh est la différence de hauteur ellipsoïdale de A à B . L'étude du triangle $A'CB'$ nous permet alors d'exprimer la longueur de l'arc d'ellipsoïde l en fonction de la corde c :

$$l = 2R \arcsin \frac{c}{2R}$$

Il n'y a pas grand-chose à dire sur cette méthode de réduction qui est précise et rigoureuse, tant qu'il s'agit bien des hauteurs ellipsoïdales et non des altitudes.

Une autre méthode existe. Soit β l'angle au centre de courbure de l'ellipsoïde C . Nous pouvons remarquer, d'une part que : $l = R\beta$

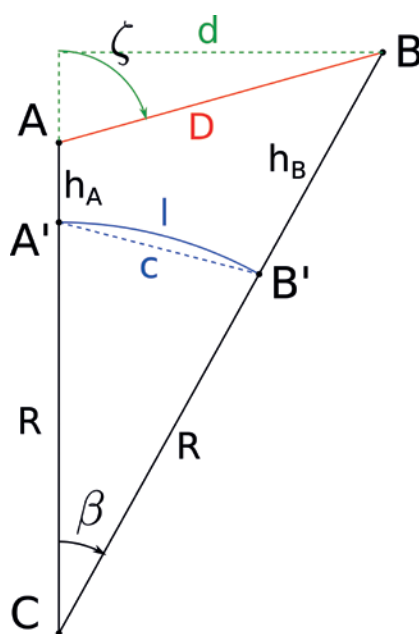


Figure 5. Schéma général de la réduction des distances à l'ellipsoïde.

Et d'autre part que :

$$\sin \beta = \frac{d}{R + h_B} \approx \beta$$

avec $d = D \sin \zeta$ la distance horizontale.

D'où la formule de réduction suivante :

$$l = \frac{d}{1 + \frac{h_B}{R}}$$

Nous lisons sur cette formule beaucoup de bêtises avant tout du fait d'une confusion sur le terme h_B .

Il s'agit obligatoirement de la hauteur ellipsoïdale au point visé. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier le sinus de l'angle β en figure 5. Or, nous lisons souvent qu'il faut utiliser l'altitude de la station ou l'altitude moyenne des deux points.

Nous ne jetons pas la pierre, puisque nous n'avons cessé de commettre cette erreur que depuis quelques années. Par paresse, nous n'avons jamais jugé bon de revoir les fondements de cette méthode de réduction des distances, présente dans de nombreux cours de topométrie de manière imprécise.

La deuxième erreur est plus subtile. Quelle est la distance d appliquée dans cette formule ? Sur la figure 5, c'est l'ellipsoïde qui est schématisé. Ainsi, l'axe CA correspond à la direction normale à l'ellipsoïde. L'angle ζ est donc ici l'angle zénithal géodésique et la distance d est la distance horizontale géodésique.

Si nous reprenons nos notations en figure 3, l'angle zénithal ζ^* que nous mesurons au tachéomètre diffère de ζ de la composante θ de la déviation de la verticale dans le plan vertical de la visée. Soit $d^* = D \sin \zeta^*$, la vraie distance horizontale et θ la déviation de la verticale dans le plan de la visée de A à B , nous pouvons démontrer que :

$$l = \frac{d^* (1 + \theta \cot \zeta^*)}{1 + \frac{h_B}{R}}$$

Ainsi, la réduction des distances horizontales mesurées sur le terrain à l'ellipsoïde fait intervenir la déviation de la verticale. Le résultat est aussi exact et précis qu'avec la méthode basée sur uniquement les hauteurs ellipsoïdales.

De cette formule, nous constatons, du fait de la cotangente, que l'effet de la déviation de la verticale est nulle pour des visées proches de l'horizontale. Le calcul est par contre singulier pour des visées proches de la verticale. Mais dans ce contexte, la distance horizontale perd sa pertinence.

Le tableau suivant nous donne la valeur de ce terme correctif pour une distance horizontale d^* de 100 m et une déviation de la verticale de $10''$. Nous voyons que les effets ne sont significatifs que pour les visées très inclinées.

ζ^* [deg]	$d^* \theta \cot \zeta^*$ [mm]
15	18.0
30	8.4
45	4.8
60	2.8
75	1.3
90	0.0

Une conséquence inattendue

Désormais, nous disposons de deux manières d'exprimer la longueur de l'arc d'ellipsoïde en faisant intervenir h_A , h_B et D , d'une part, ou h_B , D (ou d^*) et ζ^* . En exploitant l'égalité entre ces deux modèles, quelques lignes de calcul permettent d'obtenir la formule suivante :

$$\theta = \frac{\tan \zeta^*}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \zeta^*} \left(1 - \frac{\Delta h^2}{D^2} \right) \left(1 + \frac{\Delta h}{R} \right) - 1 \right)$$

Ainsi, en combinant les techniques terrestres de la géodésie, par la mesure de ζ^* , et spatiales, par les différences



de hauteurs ellipsoïdales Δh au GNSS, il est possible de déduire la déviation de la verticale selon le plan vertical de la visée. La distance D peut être déterminée selon les deux techniques. En faisant cette opération selon plusieurs plans de visées, d'azimuts différents, il serait alors possible d'en déduire η et ξ , les composantes Est et Nord de la déviation de la verticale.

Nous n'avons pas encore eu le temps d'analyser les dérivées partielles de cette formule pour savoir dans quelles conditions une précision de 1" pouvait être atteinte, ni de l'éprouver sur le terrain. Il est clair, cependant, que les angles zénithaux devront être corrigés de la réfraction, ce qui implique l'emploi de visées réciproques simultanées.

Détermination de la déviation de la verticale

Nous connaissons deux méthodes permettant d'obtenir la déviation de la verticale.

La première consiste simplement à déterminer la pente du géoïde. C'est un calcul très simple qui permet de déduire la déviation de la verticale au niveau du géoïde, ce qui est mieux que rien. Cependant, il ne faut pas oublier le non-parallélisme des surfaces équipotentielles de pesanteur. La conséquence de cela est que la déviation de la verticale n'est pas constante avec l'altitude, autrement dit, un fil à plomb ne forme pas exactement une droite euclidienne. La manière la plus rigoureuse consiste à appliquer les méthodes astrogéodésiques. En effet, par des observations angulaires datées soigneusement (voir [2] chap. 2), il est possible de déduire les longitudes et latitudes astronomiques. Connaissant, par GNSS, les longitudes et latitudes géodésiques, nous pouvons déduire, à l'aide des formules fournies précédemment, les composantes Est et Nord de la déviation de la verticale. Sur cette méthode, l'école polytechnique fédérale de Zürich (ETHZ) a développé il y a quelques années le système QDaedalus adaptable à des tachéomètres robotisés (en démontant le réticule) et connecté à un ordinateur. Ce système (hardware et software) dont le coût est de l'ordre de 10 k€, permet

de convertir l'instrument en photothéodolite avec datation GNSS. Son logiciel est équipé d'un module très efficace de détermination de la déviation de la verticale permettant d'obtenir des incertitudes de 0.5 à 1".

Conclusion

L'avènement des techniques spatiales de la géodésie, notamment le GNSS, a rendu l'ellipsoïde mesurable avec une grande précision. Mais les techniques terrestres, connectées à la pesanteur, n'ont pas pour autant disparu. Cette coexistence actuelle rend d'autant plus nécessaire la maîtrise des liens profonds entre l'ellipsoïde et les surfaces équipotentielles de pesanteur. Si les topographes d'aujourd'hui sont au point sur le premier de ces liens qu'est la cote du géoïde, il reste du travail pour qu'ils s'emparent du second qu'est la déviation de la verticale.

Le fait, en France, d'employer un ellipsoïde global plutôt qu'un ellipsoïde local moyennant sur le territoire national le géoïde, augmente les valeurs quantitatives de ces liens.

Après avoir défini cette déviation, nous avons pu montrer que sa non-prise en compte dans un levé LiDAR aéroporté pouvait engendrer des incohérences centimétriques dans les zones de recouvrement des fauchées. Nous avons pu également montrer dans quelle mesure ce paramètre intervenait dans la réduction des distances à l'ellipsoïde. Pour le premier exemple du LiDAR, nous considérons, vu les incertitudes centimétriques obtenues aujourd'hui, qu'il est indispensable d'en tenir compte. Pour la réduction des distances, la prise en compte de la déviation de la verticale n'a d'intérêt que pour les visées très inclinées.

De ce dernier exemple, nous avons déduit une nouvelle manière de déterminer la déviation de la verticale à partir de mesures tachéométriques et GNSS. Cela n'a aucunement vocation à remplacer la manière la plus précise et élégante qui soit pour mesurer la déviation de la verticale, en l'occurrence l'astrogéodésie. Cette nouvelle manière a le mérite de pouvoir être déterminée sans aucune instrumentation spéciale.

Enfin, nous espérons que cet article contribuera à faire prendre conscience que la déviation de la verticale n'est pas un paramètre abstrait qui n'intéresse que les spécialistes, engendrant des corrections négligeables. Elle peut être significative et sa maîtrise contribue à comprendre les liens profonds entre les techniques terrestres et spatiales de la géodésie. En effet, la cote du géoïde ne suffit pas à tout expliquer.

Bibliographie

- [1] On deflection of the vertical components and their transformations, Tomás Soler, Jen-Yu Han et Neil D. Weston, Journal of surveying engineering, volume 140 issue 2, mai 2014
- [2] Cours de géodésie, Françoise Duquenne et Henri Duquenne, ESGT, 2003

Contact

Thomas TOUZÉ
thomas.touze@edf.fr

ABSTRACT

Nowadays, the land surveyors are using both spatial and terrestrial techniques of geodesy with, on the one hand GNSS and, on the other hand levelling systems and total stations. One can see the difference between those techniques as being gravity dependent or not. Similarly, we are using coordinates that also are gravity dependent or not, such as the projected easting and northing (independent) or altitude (strongly dependent). There are two bonds between all this: the geoid height above the ellipsoid, that is well known and used, and the vertical deflection, that is most of the time neglected and misunderstood. In this article we intend to describe the vertical deflection and the importance of its understanding. We also present two examples in which its taking into account might improve the accuracy: an airborne LiDAR survey and total station distances reduction to the ellipsoid. From the very last example, we propose a new method to determine the vertical deflection.