

# Illustration par un exemple pratique de l'utilisation de méthodes d'ajustement robustes en topographie

■ Stéphane DURAND

*Dans la méthode des moindres carrés, la présence de fautes dans les mesures impacte directement la solution ajustée et les résidus sur les observations. En particulier, du fait de la corrélation entre les résidus, une faute sur une observation peut être indétectable sur le résidu correspondant, mais affecter les résidus associés aux autres observations, ce qui complique fortement le processus de détection et d'identification des fautes. Il est parfois préférable d'utiliser des méthodes robustes d'ajustement qui possèdent deux principaux atouts : la solution ajustée est très peu affectée par la présence de fautes, et les valeurs des résidus permettent de mieux faire ressortir les observations portant les fautes. Dans cette contribution, nous utilisons un exemple pratique pour montrer, d'une part, l'impact des fautes sur la solution des moindres carrés et la technique classiquement employée pour détecter et identifier les mesures portant les fautes et, d'autre part, les avantages que peut présenter l'utilisation d'estimateurs robustes.*

## Introduction

En topographie où les notions de contrôle et de redondance des observations sont reines, la méthode des moindres carrés est la méthode privilégiée pour l'ajustement des observations. Flexible, relativement simple à mettre en œuvre, d'autant plus efficace que les observations sont surabondantes par rapport aux inconnues, elle permet, en plus d'obtenir des valeurs ajustées pour les inconnues cherchées, de calculer leur précision formelle et d'estimer les erreurs de mesures.

La méthode des moindres carrés suppose des observations exemptes de fautes et uniquement affectées d'erreurs accidentelles. Néanmoins, si, malgré toutes les précautions prises lors de l'acquisition des mesures, il reste des fautes dans les observations, la solution ajustée obtenue est directement affectée par ces fautes, sous la forme d'un biais faussant sa valeur, parfois de manière inacceptable pour l'utilisateur.

Afin d'étudier la sensibilité d'une méthode d'ajustement aux données

aberrantes, on exploite la notion de fonction d'influence, ou courbe d'influence, introduite par Hampel (1974), associée à la solution ajustée considérée comme une variable statistique. La sensibilité aux erreurs aberrantes est alors définie comme la borne supérieure de la norme de sa fonction d'influence. Dans le cas de la méthode des moindres carrés, en supposant une distribution gaussienne des erreurs, cette fonction d'influence n'est pas bornée, d'où une sensibilité aux valeurs aberrantes infinie et une non-robustesse de la méthode.

Il est donc essentiel, lors de la mise en œuvre de la méthode des moindres carrés, de s'assurer qu'aucune faute n'est présente dans les mesures, ou au minimum, que les fautes restantes ont un impact négligeable, ou acceptable pour l'utilisateur, sur la solution ajustée.

Une première approche est d'exploiter les propriétés statistiques de la solution des moindres carrés, associées à l'hypothèse supplémentaire d'un comportement gaussien des erreurs accidentelles de mesures. Il est alors possible de mettre en œuvre des tests

statistiques permettant, dans une certaine mesure, et avec un certain seuil de probabilité, de détecter la présence de fautes (test de validation globale dit test du  $\chi^2$  [chi-deux ou chi-carré]) et d'identifier la ou les observations portant des fautes (test individuel sur la valeur du résidu normé). Il est également possible de quantifier l'ordre de grandeur d'une faute ainsi que l'impact des fautes non détectables par nos tests sur la solution ajustée (notion de fiabilité externe). La dépendance des résidus de mesures dans la méthode des moindres carrés complique malheureusement les choses et oblige le topographe à adopter une méthodologie particulière pour l'identification des fautes et l'analyse de leurs causes.

Une seconde approche consiste à délaisser la méthode des moindres carrés au profit de méthodes moins sensibles à la présence de fautes. Ces méthodes, dites robustes, sont caractérisées par une fonction d'influence bornée et permettent de disposer d'une solution ajustée peu impactée par la présence de fautes, d'identifier plus facilement les observations portant des fautes, ainsi que l'ordre de grandeur de la faute, directement en étudiant les résidus de mesures.

Il faut néanmoins garder à l'esprit que ces méthodes robustes n'ont pas que des avantages. Elles ne permettent souvent que de calculer la solution ajustée au problème, sans permettre d'obtenir de précision formelle associée. Elles sont également souvent plus complexes à mettre en œuvre et plus gourmandes en calculs que la méthode des moindres carrés. Et surtout, elles possèdent toutes un point d'effondrement (ou de rupture), c'est-à-dire un niveau de contamination des observations par des fautes au-delà duquel elles



perdent leur robustesse : quantité trop importante, valeurs trop fortes ou localisation sur certains types d'observations à certains endroits du réseau.

En pratique, les méthodes robustes sont généralement exploitées comme étape préliminaire et supplémentaire à l'ajustement des observations par la méthode des moindres carrés, dans des situations où l'on dispose d'une quantité importante d'observations avec des interrogations sur leur qualité.

L'objectif de cette contribution est d'illustrer, à partir d'un exemple pratique, l'impact de la présence de fautes sur la solution classique des moindres carrés et l'intérêt que peuvent avoir les méthodes robustes dans certains cas. Cet article est basé sur une partie du cours dispensé depuis plusieurs années aux étudiants en dernière année du cycle ingénieur de l'École supérieure d'ingénieurs géomètres et topographes du Cnam (ESGT).

Il existe de très nombreuses méthodes d'ajustement robustes, développées au cours du temps pour répondre à des besoins dans différents domaines : transformée de Hough [Hough, 1959], M-estimateurs [Huber, 1964] moindres carrés médians [Rousseeuw, 1984], méthodes de type RANSAC [*Random Sample Consensus* dérivées de Fischler and Bolles, 1981] et bien d'autres. L'idée de cet article n'est pas de proposer une revue exhaustive des méthodes robustes et des concepts associés, mais de mettre en application, sur un exemple concret, certaines d'entre elles. Le lecteur intéressé par plus d'informations sur les aspects théoriques et une liste plus complète de méthodes robustes pourra se tourner vers des documents tels que [Morineau, 1978; Jajo, 2005 ; Banaś, 2012].

## Jeu de données test

Afin d'illustrer cet article, nous avons besoin d'observations et de fautes sur ces observations. Considérons donc le problème suivant : dans le plan horizontal, nous disposons d'un ensemble de points  $P_1, \dots, P_5$  de coordonnées connues, et d'un point  $M$  dont on cherche à déterminer les coordonnées, à partir d'observations de distances

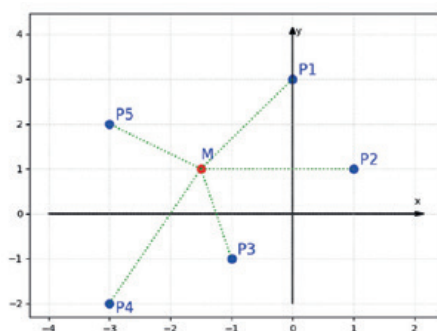


Figure 1. Localisation des points du réseau de multilatération.

horizontales réalisées depuis le point  $M$  sur chaque point  $P_i$ . La figure 1 illustre la répartition des points et la forme de notre réseau test : en bleu les points connus en coordonnées, en rouge le point avec les coordonnées à ajuster. Pour fabriquer un jeu d'observations associé à ce problème, considérons les coordonnées locales planes théoriques pour les points indiquées dans la *tableau 1*.

| Point | Coordonnées locales |          |
|-------|---------------------|----------|
|       | Est (m)             | Nord (m) |
| $P_1$ | 0                   | 3        |
| $P_2$ | 1                   | 1        |
| $P_3$ | -1                  | -1       |
| $P_4$ | -3                  | 2        |
| $P_5$ | -3                  | 2        |
| $M$   | -1.6                | 1.1      |

Tableau 1. Coordonnées planes locales théoriques des points du réseau.

Ces coordonnées théoriques permettent de calculer les distances horizontales théoriques entre le point  $M$  et chaque point  $P_i$ . En considérant une précision *a priori* pour chaque mesure de  $\sigma = 2$  mm, et un comportement gaussien des erreurs de mesures, nous pouvons facilement générer des observations de distances horizontales entre le point

$M$  et chaque point  $P_i$  par addition de la distance théorique à une valeur d'erreur accidentelle tirée aléatoirement de la loi normale centrée d'écart-type  $\sigma$ . La colonne "jeu sans faute" du *tableau 2* indique les valeurs des observations ainsi générées.

Afin de disposer d'un second jeu d'observations, cette fois possédant des fautes, ajoutons, comme indiqué dans la colonne "jeu avec fautes" du *tableau 2*, une faute de 5 cm sur la mesure de distance entre  $M$  et  $P_1$  ainsi qu'une faute de 2 cm sur la mesure de distance entre  $M$  et  $P_3$ .

Nous pouvons maintenant utiliser les deux jeux d'observations du *tableau 2* pour réaliser l'ajustement des coordonnées planes du point  $M$ , en utilisant la méthode des moindres carrés et quelques méthodes d'ajustement robustes, et comparer les résultats obtenus.

## Ajustement par la méthode des moindres carrés

Une formalisation classique de la résolution d'un problème par la méthode des moindres carrés est de considérer un ensemble de  $n$  observations  $l_i$  regroupées dans un vecteur  $L$  et de ( $m \leq n$ ) inconnues  $x_i$ , regroupées dans un vecteur  $X$ . On peut relier chaque observation  $l_i$  à l'ensemble des inconnues par une équation d'observation de la forme :

$$l_i = f_i(X) + v_i \quad (1)$$

Expression dans laquelle  $f_i$  correspond à la fonction mathématique exprimant la relation théorique entre la mesure et les inconnues et  $v_i$  à l'erreur accidentelle sur la mesure.

En regroupant l'ensemble des équations d'observation sous la forme

| Station | Point visé | Distance horizontale théorique (m) | Jeu sans faute (distance en m) | Faute (m) | Jeu avec fautes (distance en m) |
|---------|------------|------------------------------------|--------------------------------|-----------|---------------------------------|
| $M$     | $P_1$      | 2.48395                            | 2.484                          | 0.05      | 2.534                           |
| $M$     | $P_2$      | 2.60192                            | 2.599                          |           | 2.599                           |
| $M$     | $P_3$      | 2.18403                            | 2.183                          | 0.02      | 2.203                           |
| $M$     | $P_4$      | 3.40147                            | 3.399                          |           | 3.399                           |
| $M$     | $P_5$      | 1.66433                            | 1.669                          |           | 1.669                           |

Tableau 2. Distances horizontales théoriques, jeu d'observations sans faute, fautes et jeu d'observations avec fautes



d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut exprimer le modèle fonctionnel sous la forme vectorielle :

$$L = f(X) + V \quad (2)$$

La résolution par la méthode des moindres carrés d'un tel problème passe par sa linéarisation (développement de Taylor au premier ordre) autour de valeurs approchées  $X_0$  des inconnues sous la forme :

$$B = A(X - X_0) + V \quad (3)$$

Expression dans laquelle  $B = L - L_0$  est le vecteur des différences entre observation  $L$  et valeur théorique des observations  $L_0 = f(X_0)$  calculée à partir des équations d'observation et de la valeur approchée des inconnues, et  $A$  la matrice des dérivées partielles des équations d'observation par rapport à chaque inconnue calculées en  $X_0$ . Le défaut de linéarité impliqué par la linéarisation est pris en compte par itération sur la solution approchée, jusqu'à convergence du système [Mikhail and Ackermann, 1976; Caspary and Rüeger, 2000].

En sciences de la mesure, on souhaite en général tenir compte de la précision de la mesure pour pondérer les observations. On utilise alors la matrice de covariance  $s_0^2 Q_L$  sur les observations, avec  $Q_L$  la matrice de covariance *a priori*, qui indique les précisions relatives des mesures les unes par rapport aux autres et  $s_0^2$  appelé facteur unitaire de variance, qui fait le lien entre précision relative et absolue. On forme alors la matrice de pondération des mesures  $P = Q_L^{-1}$  et on peut calculer la solution des moindres carrés, notée  $\hat{X}$  par la suite, par :

$$\hat{X} - X_0 = (A^T P A)^{-1} (A^T P B) \quad (4)$$

À l'issue d'un traitement par la méthode des moindres carrés, on obtient également une estimation des erreurs accidentelles sur les mesures, donnée par le vecteur des résidus de mesures :

$$\hat{V} = B - A(\hat{X} - X_0) \quad (5)$$

Ce vecteur des résidus est un indicateur essentiel pour juger de la qualité du traitement réalisé et permettre d'identifier d'éventuelles fautes sur les observations.

Comme indiqué dans [Caspary and Rüeger, 2000], dans le processus de détection de fautes associé à la mise en œuvre de la méthode des moindres carrés, une première étape est la réalisation d'un test de validation globale, aussi appelé test du  $\chi^2$ . Il s'agit de vérifier l'hypothèse d'un comportement de loi normale centrée, de matrice de covariance  $s_0^2 Q_L$  pour le vecteur  $V$  des erreurs accidentelles de mesures, à partir de la statistique :

$$T = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{s_0^2} \sim \chi_{n-m}^2 \quad (6)$$

Si l'hypothèse  $V \sim N(0, s_0^2 Q_L)$  est vérifiée, alors la statistique  $T$  suit une loi du chi-carré à  $(n-m)$  degrés de liberté, ce qui permet de construire un intervalle de validation de sa valeur pour un seuil de confiance donné. L'échec de ce test de validation globale permet de détecter la présence de fautes potentielles dans les mesures. La stratégie aujourd'hui la plus largement employée pour identifier les observations portant des fautes lorsque les erreurs sont normalement distribuées est celle proposée par [Baarda, 1968]. Elle fait l'hypothèse d'un facteur de variance  $s_0^2$  connu et utilise comme statistique la valeur du résidu normé (aussi appelé résidu "studentisé" ou normalisé), associé à chaque observation, défini par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \hat{w}_i = \frac{\hat{v}_i}{s_0 \sqrt{q_{v_{ii}}}} \quad (7)$$

Expression dans laquelle  $q_{v_{ii}}$  est l'élément  $(i, i)$  de la matrice de covariance  $Q_V$  associée au vecteur  $\hat{V}$  des résidus de mesures définie par :

$$Q_V = Q_L - A(A^T P A)^{-1} A^T \quad (8)$$

Sous l'hypothèse que l'erreur accidentelle  $v_i$  associée à la  $i$ -ème observation suit une loi normale centrée de précision  $s_0 q_{L_{ii}}$  (notée  $N(0, s_0 q_{L_{ii}})$ ), avec  $s_0$  connu, le résidu normé suit

une loi normale centrée réduite. Pour un seuil de confiance donné, on peut ainsi construire un intervalle de validation de la valeur du résidu normé et tester la présence de faute sur une observation à la vue de son résidu. On parle ainsi de validation individuelle des observations à partir de son résidu normé.

Dans le cas de notre exemple, notre problème est constitué de  $n = 5$  observations, les distances horizontales mesurées entre les points et  $m = 2$  inconnues, les coordonnées planes du point  $M$ . Les équations d'observation liant les coordonnées  $(x_M, y_M)$  du point  $M$  ainsi que les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des points  $P_i$  aux observations de distance horizontale  $Dh_i$  entre  $M$  et  $P_i$  sont de la forme :

$$Dh_i = \sqrt{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2} \quad (9)$$

La linéarisation de ces équations nécessite de disposer de coordonnées approchées pour le point  $M$  qui peuvent s'obtenir de différentes manières, l'une d'elles étant l'utilisation d'un opérateur de calcul topographique (multilatération) sur un sous-ensemble des observations. Il est également possible de recourir à des opérateurs topographiques "robustes" pour déterminer ces coordonnées approchées, comme proposé par [Tracol, 2012] dans son projet de fin d'études à l'Insa Strasbourg. Dans notre exemple, nous considérerons les coordonnées approchées du point  $M$  données par le *tableau 1*.

Il nous faut également fixer un seuil d'arrêt du processus itératif, appelé critère de convergence  $\theta$ , dont la valeur est indiquée dans le *tableau 3*. Ce faisant, le processus itératif sur la solution approchée dans les moindres carrés s'arrêtera dès lors que la différence entre la solution ajustée obtenue et la solution approchée sera inférieure en valeur absolue au critère de convergence utilisé.

| Paramètre de traitement             | Valeur                                        |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Coordonnées approchées du point $M$ | $(x_M = -1.6 \text{ m}, y_M = 1.1 \text{ m})$ |
| Critère de convergence              | $\theta = 0.1 \text{ mm}$                     |

**Tableau 3.** Paramètres de traitement utilisés dans la méthode des moindres carrés.

|                                           | Jeu sans faute | Jeu avec fautes |
|-------------------------------------------|----------------|-----------------|
| <b>Coordonnées ajustées (en m)</b>        |                |                 |
| $\hat{x}_M$                               | -1.5973        | -1.6161         |
| $\hat{y}_M$                               | 1.0976         | 1.0911          |
| <b>Résidus (en mm)</b>                    |                |                 |
| (Distance de $M$ vers $P_1$ ) $\hat{v}_1$ | 0.0            | 34.8            |
| (Distance de $M$ vers $P_2$ ) $\hat{v}_2$ | -0.2           | -15.7           |
| (Distance de $M$ vers $P_3$ ) $\hat{v}_3$ | 2.0            | 23.9            |
| (Distance de $M$ vers $P_4$ ) $\hat{v}_4$ | -1.4           | 11.0            |
| (Distance de $M$ vers $P_5$ ) $\hat{v}_5$ | 1.1            | 10.8            |

**Tableau 4.** Résultats du traitement par la méthode des moindres carrés des jeux d'observations sans faute et avec fautes.

Le *tableau 4* indique les coordonnées ajustées en mètres, pour les coordonnées du point  $M$  ainsi que les valeurs des résidus (en millimètres), pour le jeu de mesures sans faute (colonne 2) et le jeu de mesures avec fautes (colonne 3).

Si l'on s'intéresse aux résultats du jeu de mesures sans faute, on constate que la solution ajustée obtenue ne correspond pas aux vraies coordonnées du point, même en tenant compte de notre critère de convergence de  $\theta = 0.1$  mm. Ce résultat est tout à fait normal : l'estimateur des moindres carrés étant un estimateur sans biais, nous obtiendrions les coordonnées théoriques du point  $M$  si nous utilisions les distances théoriques et non des mesures incluant des erreurs accidentelles. On constate également des valeurs de résidus faibles, inférieures à la précision  $a$

*priori* considérée pour nos mesures de  $\sigma = 2$  mm.

Regardons maintenant les résultats obtenus pour le jeu de mesures avec fautes. On constate déjà un impact important des fautes sur les coordonnées ajustées : presque 20 mm de décalage sur la coordonnée  $x_M$  et 7 mm sur la coordonnée  $y_M$ . Ce résultat illustre bien la forte sensibilité de la solution des moindres carrés à la présence de fautes dans les mesures. Au niveau des résidus obtenus, on constate que pour toutes les observations, la valeur du résidu, en valeur absolue, dépasse à chaque fois les 10 mm, alors que seules les mesures numéro 1 et 3 contiennent effectivement une faute. Ce résultat illustre le fait que, dans la méthode des moindres carrés, du fait de la dépendance des résidus, une faute

sur une mesure peut impacter la valeur du résidu associé à une autre mesure. Dans certaines situations également, le résidu associé à une mesure possédant une faute peut ne pas être impacté par cette faute. La notion de fiabilité locale associée à une observation, introduite par [Baarda, 1968], permet de quantifier cet impact.

Les valeurs des résidus données dans le *tableau 4* pour le jeu de mesures avec fautes nous poussent naturellement à envisager la présence effective d'une ou plusieurs fautes. En suivant le processus classique de détection et d'identification de fautes associé à la mise en œuvre de la méthode des moindres carrés, nous choisissons un seuil de confiance classique de 95 %, et réalisons les tests de validation globale et individuelle (avec un facteur unitaire de variance connu  $s_0^2 = 1$ ). Les valeurs des différentes statistiques utilisées, ainsi que les intervalles de validation des tests sont indiqués dans le *tableau 5*. On constate, sans surprise, pour le jeu de mesures sans faute, la validation du test global ainsi que des tests individuels sur chaque observation au seuil de 95 %.

Pour le jeu de mesures avec fautes, le test de validation globale échoue, nous permettant de détecter la présence potentielle de fautes dans nos observations. Le test de validation individuelle des observations échoue pour nos cinq observations, les résidus normés associés étant tous en dehors de l'intervalle de validation. Pour autant, cela ne signifie pas que nous sommes en présence de cinq fautes, une sur chaque observation. Nous constatons simplement le fait que, du fait de la corrélation entre les résidus, les résidus associés à des mesures saines sont impactés par la présence de fautes sur d'autres mesures.

Afin d'identifier la ou les mesures portant effectivement des fautes, on fait l'hypothèse que pour la mesure portant la faute de module le plus important, le résidu normé associé aura également un module important. Cette hypothèse n'est malheureusement pas toujours vérifiée, l'impact effectif de la faute sur le résidu associé à la mesure dépendant de la valeur de la fiabilité locale

|                                      | Jeu sans faute  | Jeu avec fautes |
|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| <b>Validation globale</b>            |                 |                 |
| Seuil de confiance utilisé :         | 95 %            |                 |
| Valeur de la statistique :           | 1.809           | 566.402         |
| Intervalle de validation :           | [0.216 ; 9.348] |                 |
| Résultat du test :                   | Validé          |                 |
| <b>Validation des résidus normés</b> |                 |                 |
| Seuil de confiance utilisé :         | 95 %            |                 |
| Intervalle de validation             | [-1.96 , 1.96]  |                 |
| $\hat{w}_1$                          | 0.018           | -22.125         |
| $\hat{w}_2$                          | 0.101           | 10.330          |
| $\hat{w}_3$                          | -1.265          | -15.336         |
| $\hat{w}_4$                          | 0.900           | -6.983          |
| $\hat{w}_5$                          | -0.751          | -7.109          |

**Tableau 5.** Tests de validation globale et de validation individuelle pour le traitement par la méthode des moindres carrés des jeux de mesures sans et avec fautes.



sur la mesure. Avec cette hypothèse, on peut mettre en œuvre la méthodologie suivante :

- On s'intéresse en priorité à la mesure pour laquelle le résidu normé possède le module le plus important ;
- On réalise un nouvel ajustement en supprimant temporairement cette observation. Si cette mesure était incohérente avec les autres, son absence doit permettre d'obtenir, pour le test de validation globale, une valeur de la statistique du test plus proche des bornes de l'intervalle de validation du test (en tenant compte d'une variation du degré de liberté associé à la loi du  $\chi^2$  du fait de la mesure supprimée) ;
- Si cela est le cas, la mesure supprimée temporairement semble bien être source d'incohérence dans le traitement, et on cherche à identifier les causes de la présence d'une faute : erreur de retranscription de la mesure, erreur dans la correction préalable d'erreurs systématiques (réfraction, constante de prisme...), erreur dans la hauteur de station ou de prisme... Il est en particulier possible de calculer, à partir de la valeur du résidu et de la fiabilité locale de l'observation, un ordre de grandeur associé à la faute potentielle, qui peut être un bon guide pour identifier la nature de la faute en présence et permettre sa correction. On peut également être amené à supprimer ou repondérer la mesure, si une faute est avérée sans qu'il soit possible d'en comprendre la cause ;
- Si cela n'est pas le cas, c'est que le résidu normé associé à cette mesure était impacté par une faute associée à une autre mesure. On réintègre donc la mesure dans le traitement et on s'intéresse à la mesure possédant le résidu normé en second par ordre d'importance de son module.

Dans le cas de notre exemple, où le type d'observation est toujours le même et le nombre peu important, cette méthodologie est effectivement efficace :

- En enlevant la 1<sup>re</sup> observation (distance entre  $M$  et  $P_1$ ), le test de validation globale échoue toujours, mais avec une valeur de la statistique qui diminue fortement ;
- Sans information permettant de comprendre les causes de la faute, elle ne peut être que supprimée et

on réalise un ajustement sans cette mesure ;

- On identifie ensuite l'observation entre  $M$  et  $P_3$  comme celle ayant le résidu normé avec le module le plus important. En l'enlevant du traitement, le test de validation globale réussit et on a bien enlevé les deux mesures où nous avons inséré des fautes.

Cette méthodologie ne permet malheureusement pas toujours d'identifier à coup sûr les fautes présentes dans un jeu d'observations. Tout dépend en pratique de la quantité et de la diversité des mesures en présence, du nombre d'inconnues ainsi que des causes potentielles de fautes dans ces mesures. L'expérience de l'utilisateur et sa connaissance de la méthodologie de mesure employée jouent également un rôle important. La cause principale de cette complexité est la dépendance entre les résidus dans la méthode des moindres carrés, qui ne facilite pas l'identification des mesures portant des fautes.

## Ajustement robuste par M-estimateurs robustes

Dans la méthode des moindres carrés, on cherche à minimiser l'écart en distance, au sens de la norme induite par la matrice de pondération, entre les observations et leur valeur théorique calculée à partir du modèle fonctionnel et de la solution ajustée. Déterminer la solution des moindres carrés de l'équation (2), revient donc à déterminer la solution au problème de minimisation :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^m} \|L - f(X)\|_P^2 = \min_{X \in \mathbb{R}^m} V^T P V \quad (10)$$

En considérant que le vecteur  $V$  des erreurs de mesures suit une loi normale centrée, de matrice de covariance  $\sigma_0^2 \Sigma_L$ , la solution des moindres carrés correspond, d'un point de vue statistique, à l'estimateur du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire à la valeur des inconnues permettant d'obtenir les valeurs d'erreurs les plus probables (maximisant la probabilité d'occurrence).

En 1964, Peter J. Huber a proposé une généralisation de la notion d'estimateur par maximum de vraisemblance en introduisant la notion de M-estimateur

[Huber, 1964]. Un M-estimateur correspond à la solution du problème :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n \rho(v_i) \quad (11)$$

Expression dans laquelle la fonction  $\rho$  est positive, symétrique et possède un minimum en zéro. La solution des moindres carrés est donc un M-estimateur particulier, avec  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \rho(v_i) = \sum_{j=1}^n q_{Lij} v_i v_j$  dans le cas général et avec  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \rho(v_i) = q_{Lii} v_i^2$  dans le cas d'observations indépendantes.

Parmi les M-estimateurs robustes, certains sont exploités comme méthode principale ou secondaire d'ajustement, dans des logiciels spécialisés dans l'ajustement de mesures topographiques comme LTOP<sup>1</sup>, JAG3D<sup>2</sup>, Move3<sup>3</sup> ou CoMeT<sup>4</sup>. Deux M-estimateurs en particulier sont exploités, que nous mettrons donc en œuvre dans cette étude :

Le M-estimateur associé à l'ajustement en norme L1 :

$$\rho(u) = |u| \quad (12)$$

Le M-estimateur de Huber, défini par :

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2} & \text{si } |u| \leq k \\ k|u| - \frac{k^2}{2} & \text{si } |u| > k \end{cases} \quad (13)$$

Dans cette équation, le paramètre  $k$  est fixé par l'utilisateur. [Rey, 1983] propose la valeur  $k = 1.345$  correspondante à une efficacité asymptotique de l'estimateur de 95 % dans le cas d'erreurs normalement distribuées.

Supposons des observations indépendantes et de même poids. Alors, comme illustré par la figure 2, dans la méthode des moindres carrés, une erreur ayant un module important aura un rôle prédominant par rapport aux autres (car élevée au carré par  $\rho(u) = u^2$ ). Alors que pour les autres méthodes basées sur les M-estimateurs de la norme L1 ( $\rho(u) = |u|$ ) ou de Huber

1 <https://www.swisstopo.admin.ch/fr/geodata/applications/geosoftwares/ltop.html>

2 <https://software.applied-geodesy.org/en/>

3 <https://move3software.com/>

4 <https://comet.esgt.cnam.fr/>

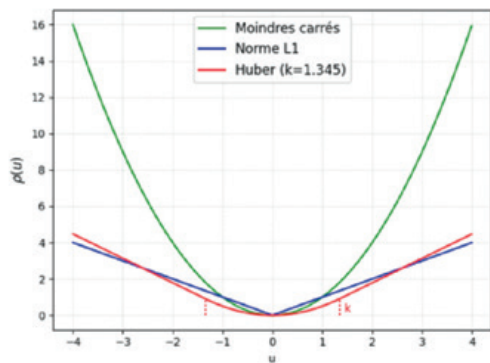


Figure 2. Illustration de la fonction  $\rho$  associée à différents M-estimateurs.

( $\rho(u) = k|u| - \frac{k^2}{2}$  dès que  $|u| > k$ ), son influence sur la solution sera moindre.

Intéressons-nous à la mise en œuvre pratique, pour l'ajustement de mesures topographiques, des M-estimateurs de la norme L1 et de Huber.

## Mise en œuvre de l'ajustement en norme L1

L'objectif est ici de déterminer la solution  $\hat{X}_{L1}$  du problème de minimisation en valeur absolue :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (14)$$

Une première approche de mise en œuvre est de ramener le problème de minimisation en valeur absolue à la résolution d'un problème de programmation linéaire dont la forme canonique pure est :

$$\begin{cases} \text{Maximiser : } f^T Y \\ \text{sous les } p \text{ contraintes : } CY \leq D \\ \text{avec : } Y \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Expression dans laquelle  $Y$  est le vecteur des  $q$  inconnues à déterminer,  $f$  est un vecteur réel de taille  $q$ ,  $D$  est un vecteur réel de taille  $p$  et  $C$  une matrice réelle possédant  $p$  lignes et  $q$  colonnes. Comme indiqué dans [Morineau, 1978; Bonnel, 1999; Durand, 2021], les éléments  $Y, f, C, D$  peuvent s'exprimer en fonction des matrices  $X, B, A$  classiques associées à la résolution d'un problème par la méthode des moindres carrés, au prix d'une augmentation du nombre des inconnues à déterminer. Il est également possible d'intégrer une pondération des observations, en modifiant les valeurs du vecteur  $f$ .

De nombreuses méthodes existent aujourd'hui pour résoudre un problème de programmation linéaire, avec principalement deux approches. La première consiste à tester les sommets du polyèdre défini par les  $p$  contraintes, illustré par la fameuse méthode du simplexe [Dantzig, 1948, 2016]. La seconde consiste à partir d'un point à l'intérieur de ce polyèdre et à se diriger progressivement vers le sommet solution, comme pour la méthode de Karmarkar (1984).

Pour l'application numérique présentée dans cet article, la résolution du problème de programmation linéaire est réalisée à travers la librairie `Ip_solve`<sup>5</sup>, disponible sous licence LGPL, et facile à interfacer avec différents langages de programmation.

Une autre approche pour la résolution du problème de minimisation en valeur absolue est d'utiliser la technique *IRLS-Iteratively Reweighted Least Squares* [Rice and Usow, 1968; Holland and Welsch, 1977]. L'idée est ici de reformuler le problème de minimisation en valeur absolue sous la forme :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n |v_i| = \min_{X \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n |v_i|^{-1} |v_i|^2 \quad (16)$$

On considère alors que  $r_i = |v_i|^{-1}$  est un poids associé au problème de minimisation par les moindres carrés, et on peut déterminer la solution en norme L1 en utilisant la méthode des moindres carrés classique, et en réalisant des itérations sur la matrice de poids utilisée.

## Mise en œuvre de l'ajustement par M-estimateur de Huber

À la connaissance de l'auteur, deux méthodes numériques peuvent être utilisées pour calculer une solution au problème d'ajustement par le M-estimateur de Huber : la méthode de Newton [Chen and Pinar, 1998; Guo, 2003] et la technique IRLS.

Pour produire les résultats présentés dans cette étude, la technique IRLS est utilisée, ainsi qu'une valeur  $k = 1.345$  pour le paramètre de la fonction de

Huber. Avec la technique IRLS, le problème de minimisation est reformulé sous la forme :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n \alpha(v_i) v_i^2 \quad (17)$$

Avec  $\alpha(v_i)$  considéré comme un poids dans la méthode des moindres carrés d'expression :

$$\alpha(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |u| \leq k \\ k|u|^{-1} - \frac{k^2}{2} u^2 & \text{si } |u| > k \end{cases} \quad (18)$$

## Ajustement robuste par algorithme de type RANSAC

Initialement proposé par [Fischler and Bolles, 1981] l'algorithme RANSAC se décline aujourd'hui en toute une famille d'algorithmes, adaptés à différentes situations et besoins d'optimisation des caractéristiques de l'original [Choi, Kim and Yu, 2009]. Largement utilisés dans les domaines de la vision par ordinateur, les algorithmes de type RANSAC peuvent également être utilisés pour réaliser l'ajustement robuste de mesures en topographie [Tarsha-Kurdi et al., 2007].

Comme expliqué par exemple dans [Simonetto, 2021], dans un problème où l'on dispose de  $n$  observations et  $m$  inconnues, l'algorithme RANSAC consiste à sélectionner  $N$  échantillons de  $m$  mesures parmi les  $n$  disponibles, et à calculer  $N$  solutions ajustées. Pour chaque solution, on calcule le nombre  $n_i$  de mesures compatibles, c'est-à-dire pour lesquelles l'écart entre la mesure et sa valeur théorique calculée à partir de la solution ajustée est inférieure en absolue à une tolérance  $t$  fixée. Si une solution comptabilise suffisamment de mesures compatibles (i.e.  $n_i > T$ ), la solution est validée. Schématiquement, il consiste en la réalisation des étapes suivantes :

- déterminer ou choisir les valeurs des paramètres  $N, t$  et  $T$
- répéter  $N$  fois ;
- sélectionner aléatoirement un échantillon de  $m$  mesures,
- calculer la solution ajustée à partir de cet échantillon,

<sup>5</sup> <http://lpsolve.sourceforge.net>



- calculer le nombre  $n_i$  de mesures compatibles avec cette solution, suivant la tolérance  $t$ ,
- (valider le modèle si  $n_i > T$ , l'algorithme pouvant être stoppé dès que cette condition est atteinte),
- sélectionner la solution comptabilisant le plus de mesures compatibles avec elle ;
- recalculer éventuellement une solution ajustée à partir de l'ensemble des mesures compatibles avec la solution sélectionnée.

Plusieurs paramètres sont donc à choisir avant d'utiliser l'algorithme RANSAC :

- la tolérance  $t$  pour considérer une mesure compatible avec la solution calculée à chaque itération ;
- le nombre  $T$  de mesures compatibles avec la solution permettant de considérer la solution valide et d'arrêter le calcul itératif ;
- le nombre  $N$  d'itérations réalisées sur l'algorithme, calculé par la formule :

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\varepsilon)^m)} \quad (19)$$

Expression dans laquelle  $p$  est la probabilité de tirer aléatoirement parmi les  $N$  échantillons au moins un échantillon ne contenant pas de fautes et  $\varepsilon$  le pourcentage de fautes dans les mesures.

Dans le cas qui nous intéresse en topographie, où le pourcentage de fautes dans les mesures est inconnu, l'algorithme RANSAC adaptatif proposé par [Hartley and Zisserman, 2004] est plus adapté :

- choisir les paramètres  $t$  et  $T$ , fixer  $N = +\infty$  et  $N_{min} = 0$  ;
- répéter tant que  $N > N_{min}$ 
  - sélectionner aléatoirement un échantillon de  $m$  mesures,
  - calculer la solution ajustée à partir de cet échantillon,
  - calculer le nombre  $n_i$  de mesures compatibles avec cette solution, suivant la tolérance  $t$ ,
  - (valider le modèle si  $n_i > t$  et éventuellement stopper le processus itératif),
  - calculer le paramètre  $\varepsilon$  par la formule :

$$\varepsilon = 1 - n_i/n \quad (20)$$

- calculer le paramètre  $N$  associé avec la formule de l'équation (19),

- incrémenter la valeur  $N_{min} = N_{min} + 1$ ,
- sélectionner la solution comptabilisant le plus de mesures compatibles avec elle ;
- recalculer éventuellement une solution ajustée à partir de l'ensemble des mesures compatibles avec la solution sélectionnée.

C'est cet algorithme adaptatif que nous avons utilisé pour notre étude :

- le calcul des coordonnées du point  $M$  à partir de  $m = 2$  observations est réalisé par la méthode des moindres carrés en tenant compte des précisions des mesures. Il n'y a alors aucune surabondance d'observations. À l'itération  $k$  de l'algorithme, on obtient une solution  $\hat{X}_{ransac}^{(k)}$  ;
- le critère utilisé pour vérifier la compatibilité des mesures avec la solution ajustée est la valeur du résidu, c'est-à-dire l'écart entre la mesure et sa valeur théorique  $f_i(\hat{X}_{ransac}^{(k)})$  ;
- pour qu'une observation soit considérée compatible avec la solution ajustée, on considère une tolérance de  $t = 1.96 \times \sigma$  soit, pour des erreurs distribuées suivant la loi normale centrée d'écart type  $\sigma = 2 \text{ mm}$ , un intervalle de confiance de 95 % sur les valeurs ;
- la valeur de la probabilité d'avoir au moins un échantillon sans faute est considérée à  $p = 0.99$  ;
- le nombre d'observations dans notre exemple étant faible, nous avons choisi ne pas stopper le processus itératif lorsqu'un certain nombre de mesures compatibles avec une solution était trouvé ;

- à partir des mesures compatibles avec la solution sélectionnée, un ajustement est réalisé par la méthode des moindres carrés. Pour les mesures non compatibles avec la solution sélectionnée, des résidus sont également calculés.

## Résultats obtenus avec les méthodes robustes sur le jeu sans faute

L'objectif est ici, dans un premier temps, de comparer les résultats obtenus par les différentes méthodes d'ajustement testées sur le jeu de mesures sans faute (moindres carrés, norme L1, Huber et RANSAC adaptatif). Le *tableau 6* résume, pour chaque méthode, la solution ajustée obtenue sur les coordonnées du point, en mètres, ainsi que les valeurs des résidus en millimètres. On constate que les valeurs de la solution ajustée et des résidus pour la méthode des moindres carrés, du M-estimateur de Huber et RANSAC sont identiques. En effet, sans présence de faute, la fonction de Huber de l'équation (13) correspond à celle utilisée dans les moindres carrés, à un coefficient 0.5 près. Il est donc normal d'obtenir les mêmes résultats que pour la méthode des moindres carrés. Dans le cas de l'algorithme RANSAC, puisqu'aucune faute n'est présente, toutes les observations de notre jeu de mesures sont considérées comme compatibles avec tout échantillon de deux mesures sélectionnées aléatoirement parmi les cinq. La dernière étape de la méthode



|                                           | Moindres carrés | Norme L1 | Huber   | RANSAC  |
|-------------------------------------------|-----------------|----------|---------|---------|
| <b>Coordonnées ajustées (en m)</b>        |                 |          |         |         |
| $\hat{x}_M$                               | -1.5973         | -1.5972  | -1.5973 | -1.5973 |
| $\hat{y}_M$                               | 1.0976          | 1.0976   | 1.0976  | 1.0976  |
| <b>Résidus (en mm)</b>                    |                 |          |         |         |
| (Distance de $M$ vers $P_1$ ) $\hat{v}_1$ | 0.0             | 0.0      | 0.0     | 0.0     |
| (Distance de $M$ vers $P_2$ ) $\hat{v}_2$ | -0.2            | 0.0      | -0.2    | -0.2    |
| (Distance de $M$ vers $P_3$ ) $\hat{v}_3$ | 2.0             | 2.1      | 2.0     | 2.0     |
| (Distance de $M$ vers $P_4$ ) $\hat{v}_4$ | -1.4            | -1.4     | -1.4    | -1.4    |
| (Distance de $M$ vers $P_5$ ) $\hat{v}_5$ | 1.1             | 1.0      | 1.1     | 1.1     |

**Tableau 6.** Coordonnées ajustées et résidus obtenus par les différentes méthodes d'ajustement sur le jeu de mesures sans faute.



RANSAC utilisée consistant en un ajustement par moindres carrés à partir de l'ensemble des mesures compatibles avec la solution retenue, nous obtenons logiquement la solution des moindres carrés.

Dans le cas de la méthode d'ajustement en norme L1, des écarts parfois supérieurs au critère de convergence utilisé peuvent être constatés sur les valeurs ajustées et les résidus par rapport à la méthode des moindres carrés. Les deux méthodes s'appuient sur des M-estimateurs, donc avec un minimum de la fonction  $\rho$  associée en zéro, mais le critère d'optimisation est légèrement différent : minimisation de la somme des carrés des écarts (moindres carrés) ou de la somme des valeurs absolues (norme L1), conduisant à des valeurs optimales différentes.

## Résultats obtenus avec les méthodes robustes sur le jeu avec fautes

Intéressons-nous maintenant aux valeurs ajustées et résidus obtenus par les différentes méthodes sur le jeu de mesures avec deux fautes présentes (1<sup>re</sup> et 3<sup>e</sup> observations). Le *tableau 7* résume ces valeurs et indique également pour chaque méthode, la différence entre les solutions ajustées obtenues en utilisant le jeu avec et sans fautes, en millimètres.

Nous avons déjà discuté le cas de la méthode des moindres carrés et constaté le fort impact de ces fautes sur la solution ajustée et les résidus. Dans le cas des méthodes robustes, on constate que la solution ajustée est peu impactée par la présence des fautes, avec au maximum 2 à 3 mm d'écart sur la coordonnée  $x_M$  dans le cas de la méthode du M-estimateur de Huber. Ceci illustre bien la capacité des méthodes robustes à fournir un résultat cohérent même en présence de fautes.

L'autre intérêt de ces méthodes robustes est leur capacité à fournir des résidus permettant d'identifier plus facilement les observations pouvant contenir des fautes, et estimer l'ordre de grandeur de la faute. Dans ces méthodes, les résidus associés aux mesures portant les fautes sont très proches de la valeur de la faute : 48,8 mm, 48,8 mm et 47,7 mm au lieu de 50 mm sur la première observation pour respectivement la norme L1, RANSAC et la méthode de Huber. On constate également que pour les autres mesures, les valeurs des résidus sont très faibles : moins d'un millimètre pour la norme L1 et RANSAC. Dans le cas de la méthode du M-estimateur de Huber, les résidus obtenus sur les mesures sans faute sont légèrement plus élevés de l'ordre de 2-3 mm, et également plus

importants que sur la solution sans faute, montrant une légère influence des fautes. En effet, le M-estimateur de Huber est un compromis entre la méthode classique des moindres carrés et l'ajustement en norme L1, comme le montre la fonction de Huber de l'équation 13.

Les résultats du *tableau 7* montrent bien l'intérêt que peuvent avoir les méthodes robustes d'ajustement pour la détection et l'identification de fautes dans les mesures, mais également pour déterminer une solution ajustée robuste, même en présence de fautes. Il faut cependant garder à l'esprit quelques points importants.

Comme cela a déjà été indiqué, les méthodes robustes possèdent un point de rupture, c'est-à-dire une quantité de fautes au-delà de laquelle elles perdent leur robustesse, et qui peut dépendre de différents paramètres : degré de liberté du système, quantité et module des fautes, type de mesures, etc. (cf. par exemple [Meer *et al.*, 1991; Zhang and Li, 1998]).

Le calcul de la solution ajustée dans le cas des méthodes robustes est souvent plus compliqué (pas de solution algébrique) et gourmand en opérations de calcul que dans le cas de la méthode des moindres carrés, et ce d'autant plus que le nombre d'observations et d'inconnues augmente. De plus, pour certaines, il n'est pas possible d'estimer, en plus de la solution, la précision formelle associée. Dans cette étude, l'ajustement en norme L1 est un cas où l'on ne peut pas calculer la précision associée à la solution ajustée. Au contraire, dans la méthode du M-estimateur de Huber et RANSAC, telle que mise en œuvre ici, il est possible d'obtenir cet élément.

## Conclusion

L'objectif de cet article est d'illustrer sur un exemple simple, mais concret, l'intérêt potentiel de remplacer la méthode des moindres carrés par des méthodes d'ajustement robustes pour la détection et l'identification de fautes. Après avoir présenté les jeux de mesures utilisés, l'impact des fautes sur la solution des moindres carrés est illustré, et la

|                                             | Moindres carrés | Norme L1 | Huber   | RANSAC  |
|---------------------------------------------|-----------------|----------|---------|---------|
| <b>Coordonnées ajustées (en m)</b>          |                 |          |         |         |
| $\hat{x}_M$                                 | -1.6131         | -1.5972  | -1.5996 | -1.5971 |
| $\hat{y}_M$                                 | 1.0911          | 1.0960   | 1.0966  | 1.0960  |
| <b>Écarts à la solution sans faute (mm)</b> |                 |          |         |         |
| Sur $\hat{x}_M$                             | -18.8           | 0        | -2.3    | 0.2     |
| Sur $\hat{y}_M$                             | -6.5            | -1.6     | -1      | -1.6    |
| <b>Résidus (en mm)</b>                      |                 |          |         |         |
| (Distance de $M$ vers $P_1$ ) $\hat{v}_1$   | 34.8            | 48.8     | 47.7    | 48.8    |
| (Distance de $M$ vers $P_2$ ) $\hat{v}_2$   | -15.7           | 0.0      | -2.4    | 0.1     |
| (Distance de $M$ vers $P_3$ ) $\hat{v}_3$   | 23.9            | 23.5     | 22.4    | 23.6    |
| (Distance de $M$ vers $P_4$ ) $\hat{v}_4$   | 11.0            | 0.0      | 0.5     | 0.0     |
| (Distance de $M$ vers $P_5$ ) $\hat{v}_5$   | 10.8            | 0.2      | 2.4     | 0.1     |

**Tableau 7.** Coordonnées ajustées et résidus obtenus par les différentes méthodes d'ajustement sur le jeu de mesures avec fautes.



méthodologie classiquement adoptée pour la détection et l'identification des fautes avec cette méthode est présentée. Nous nous sommes ensuite intéressés à trois estimateurs robustes particuliers : l'ajustement en norme L1, le M-estimateur de Huber et une méthode de type RANSAC adaptative et avons illustré par l'exemple les capacités de ces méthodes à obtenir, malgré les fautes, des solutions ajustées pas ou peu impactées et à faciliter la détection et l'identification de fautes par étude des résidus associés aux mesures. ●

## Contact

Stéphane Durand

stephane.durand@lecnam.net

## Bibliographie

- Baarda, W. (1968) *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission (Netherlands Geodetic Commission: Publications on Geodesy).
- Banaś, M. (2012) 'A review of robust estimation methods applied in surveying', *Geomatics and Environmental Engineering*, 6, p. 13. doi:10.7494/geom.2012.6.4.13.
- Bonnel, T. (1999) *Combinaisons de jeux de coordonnées de stations terrestres en norme L1*. Mémoire de fin d'études ESGT. ESGT.
- Caspary, W. and Rüeger, J.M. (2000) *Concepts of network and deformation analysis*. 3rd (corrected) impression. Sydney, N.S.W. : School of Geomatic Engineering, University of New South Wales.
- Chen, B. and Pinar, M.C. (1998) 'On Newton's method for Huber's robust M-estimation problems in linear regression', p. 11.
- Choi, S., Kim, T. and Yu, W. (2009) *Performance evaluation of RANSAC family*, *Proceedings of the British Machine Vision Conference 2009*. doi:10.5244/C.23.81.
- Dantzig, G. (2016) *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press. Available at: <https://doi.org/10.1515/9781400884179>.
- Dantzig, G.B. (1948) 'Programming in a Linear Structure'. Comptroller, USAF, Washington, D.C.
- Durand, S. (2021) *Topométrie de Précision*. 2. Support de cours. Cycle ingénieur ESGT, 5<sup>e</sup> année.
- Fischler, M.A. and Bolles, R.C. (1981) 'Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography', *Commun. ACM*, 24(6), pp. 381-395. doi:10.1145/358669.358692.
- Guo, Y. (2003) *Application and computation of Huber's M-estimator in the global positioning system*. Master of Science. School of Computer Science.
- Hampel, F.R. (1974) 'The Influence Curve and its Role in Robust Estimation', *Journal of the American Statistical Association*, 69(346), pp. 383-393. doi:10.1080/01621459.1974.10482962.
- Hartley, R.I. and Zisserman, A. (2004) *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Second. Cambridge University Press, ISBN: 0521540518.
- Holland, P.W. and Welsch, R.E. (1977) 'Robust regression using iteratively reweighted least-squares', *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 6(9), pp. 813-827. doi:10.1080/03610927708827533.
- Hough, P.V.C. (1959) 'Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures', *Conf. Proc. C*. Edited by L. Kowarski, 590914, pp. 554-558.
- Huber, P.J. (1964) 'Robust Estimation of a Location Parameter', *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(1), pp. 73-101.
- Jajo, N. (2005) 'A Review of Robust Regression and Diagnostics Procedures', *Acta Mathematicae Applicatae Sinica-English series*, 21, pp. 209-224.
- Karmarkar, N. (1984) 'A new polynomial-time algorithm for linear programming', *Combinatorica*, 4(4), pp. 373-395. doi:10.1007/BF02579150.
- Meer, P. et al. (1991) 'Robust regression methods for computer vision: A review', *International Journal of Computer Vision*, 6(1), pp. 59-70. doi:10.1007/BF00127126.
- Mikhail, E.M. and Ackermann, F. (1976) *Observations and least squares*. New York: IEP.
- Morineau, A. (1978) 'Régressions robustes méthodes d'ajustement et de validation', *Revue de Statistique Appliquée*, 26(3), pp. 5-28.
- Rey, W.J.J. (1983) 'Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods', in: Rice, J.R. and Usow, K.H. (1968) 'The Lawson Algorithm and Extensions', *Mathematics of Computation*, 22(101), pp. 118-127. doi:10.2307/2004769.
- Rousseeuw, P.J. (1984) 'Least Median of Squares Regression', *Journal of the American Statistical Association*, 79(388), pp. 871-880. doi:10.1080/01621459.1984.10477105.
- Simonetto, E. (2021) 'Cours Traitement numérique des images IG4'.
- Fayez Tarsha-Kurdi, Tania Landes, Pierre Grussenmeyer. *Hough-Transform and Extended RANSAC Algorithms for Automatic Detection of 3D Building Roof Planes from Lidar Data*. ISPRS Workshop on Laser Scanning 2007 and SilviLaser 2007, Sep 2007, Espoo, Finland. pp.407-412. halshs-00264843
- Tracol, M. (2012) *Intégration du logiciel de compensation LTOP aux méthodes de travail de TPLM-3D pour les chantiers spéciaux*. PFE de l'INSA Strasbourg.
- Zhang, J. and Li, G. (1998) 'Breakdown properties of location M-estimators', *The annals of statistics*, 26(3), pp. 1170-1189.

## ABSTRACT

*In the least squares adjustment method, the existence of gross errors in the measurements impacts both the adjusted values and the residuals. In particular, due to the correlation between the residuals, an error on a particular observation may be undetectable on the corresponding residual but may affect residuals on other observations, complicating the detection and identification process. It is sometime better to use robust adjustment methods that have two main advantages: the adjusted values are very little affected by the presence of gross errors, and the residuals enable to better detect and identify the errors and their values. In this contribution, we use a practical example to show both the impact of gross errors on the least squares adjustment method and the classical methodology used to detect and identify the faulty observations, and the advantages of using robust estimators.*