

Généralisation des réfractions terrestres et bathymétriques : nouveau modèle dans le cas d'une stratification verticale de la célérité en Terre localement sphérique

■ Thomas TOUZÉ

La question de la réfraction survient en topométrie et en bathymétrie selon des modèles distincts qui diffèrent, pour l'essentiel, dans le fait qu'en bathymétrie, des profils de célérité sont mesurés tandis qu'en topométrie est introduit le coefficient de réfraction qui permet de décrire la déviation du point de vue angulaire. De plus, les modèles proposés reposent sur la loi de Snell-Descartes ou sur l'équation eikonale. Dans cet article, dans un premier temps, nous montrons que la loi de Snell-Descartes implique l'équation eikonale. La substitution de l'indice de réfraction par la célérité, en considérant le problème de manière tensorielle, permet d'obtenir l'expression tensorielle de l'équation eikonale valable tant en topométrie qu'en bathymétrie et indépendante de tout système de coordonnées. La résolution de cette équation différentielle de second ordre nous permet de construire un modèle généralisé de la réfraction dans le cas spécifique de couches de célérité stratifiées verticalement en Terre sphérique. Nous obtenons un résultat qui généralise les formules de nivellement trigonométrique et qui sont compatibles avec des mesures d'un profil de célérité.

MOTS-CLÉS

Réfraction terrestre, réfraction acoustique, loi de Snell-Descartes, équation eikonale, nivellement trigonométrique, nivellement indirect, topométrie, hydrographie.

de ce problème. Ce point a été résolu grâce à la chaîne YouTube d'Eigenchris permettant d'apprendre à manipuler les tenseurs.

Cet article présente le fruit de ce travail mené, *in fine*, sur près de dix années. Il permettra au lecteur, nous l'espérons, de faire le lien entre les lois de Snell-Descartes et l'équation eikonale, de voir comment cette dernière s'exprime en Terre sphérique et d'en suivre la résolution pour un milieu de propagation stratifié verticalement. Cela nous permettra d'obtenir un modèle de réfraction qui généralise les équations du nivellement trigonométrique et qui sera également applicable au LiDAR et à la bathymétrie.

État de l'art

La topométrie et la bathymétrie recourent à des systèmes de mesures de proximité basés sur la propagation d'ondes, respectivement, électromagnétiques dans l'air et acoustiques dans l'eau. Si dans les milieux dans lesquels se propagent nos ondes, les obstacles rencontrés sont de tailles nettement supérieures aux longueurs d'onde, les cas de diffractions peuvent être exclus. Il est alors possible de faire l'hypothèse d'une propagation localement rectiligne : dans le cas de l'électromagnétisme, c'est là le fondement de l'optique géométrique. Cependant les milieux que nos rayons traversent peuvent subir des changements brusques ou continus, de nature, de pression, de température ou de

Introduction

La difficulté de la question de la réfraction s'est posée à nous en 2011 lorsqu'avec des étudiants de l'ENSTA Bretagne, au cours d'un projet ERASMUS sur le lac Vassivière, nous avons remarqué de très fortes erreurs de nivellement trigonométrique pour les longues visées, notamment celles à faible hauteur au-dessus du lac.

Par la suite, nous avons constaté que dans le contexte des réseaux d'auscultation d'ouvrages, la connaissance du coefficient de réfraction dans le modèle fonctionnel, ainsi que la prise en compte de l'effet de scintillement dans le modèle stochastique, étaient deux paramètres cruciaux dans la qualité des résultats. De plus amples études nous avaient

alors permis de définir des ordres de grandeur sur ces deux points, ainsi qu'une méthodologie des visées réciproques simultanées [Touzé et Hansen, 2019]. Ce travail avait ensuite mis en évidence que dans certains cas extrêmes en topométrie, un coefficient d'asymétrie devenait nécessaire en présence d'une forte perturbation thermique le long du trajet [Touzé et al., 2019].

Le fait d'être face à des enjeux de bathymétrie est alors devenu décisif puisque la réfraction est bien présente, mais traitée de toute autre manière. Ainsi, l'observation de profils de célérité en grande profondeur, avec la présence d'une thermocline, rendait évidente la nécessité d'un coefficient d'asymétrie. Il ne manquait plus que les outils mathématiques nécessaires à la résolution

composition chimique par exemple, qui engendreront des phénomènes de réfraction ou de réflexion.

■ Modèles physiques

Deux modèles permettent de traiter la réfraction : la loi de Snell-Descartes et l'équation eikonale.

Loi de Snell-Descartes

La réfraction est prise en compte dans les techniques terrestres de la topométrie, notamment en nivellement direct ou trigonométrique. Généralement la modélisation se fonde sur la loi de la réfraction de Snell-Descartes en *figure 1*, dans le cas discret de la présence d'un dioptre (voir *illustration en figure 2*).

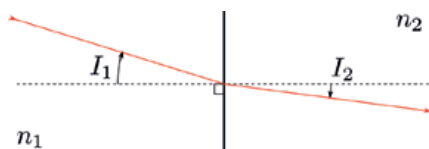


Figure 1. Loi de la réfraction de Snell-Descartes dans le cas de la traversée d'un dioptre séparant deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2 .

Loi de Snell-Descartes, cas discret
 $n \sin I = \text{constante} \quad (\text{DSD})$

Cependant, en topométrie, la variation de l'indice de réfraction se fait de manière continue. Considérons donc la situation décrite en *figure 3* dans laquelle, la trajectoire $\vec{p}(s)$ de notre



Figure 2. La réfraction dans trois milieux différents, l'air, l'eau et le verre¹

¹ Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9fraction#/media/>

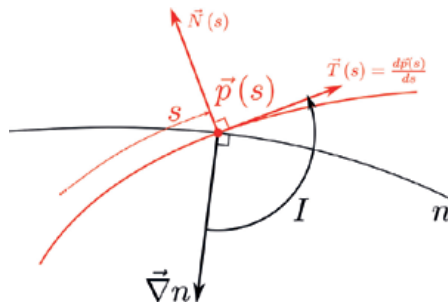


Figure 3. La réfraction d'un chemin $\vec{p}(s)$ dans le champ scalaire de l'indice de réfraction n .

rayon, paramétrée par son abscisse curviligne s , est déviée tout le long de sa traversée du champ scalaire de l'indice de réfraction n .

Prenons la différentielle totale de (DSD). Nous obtenons :

$$\delta I = -\frac{\delta n}{n} \tan I \quad (1)$$

Si nous considérons une section élémentaire $\delta \vec{p}$, de longueur δs , du trajet, l'indice de réfraction varie de δn . En considérant ce δn comme le travail du gradient de n le long d'une section élémentaire du rayon, nous pouvons noter que :

$$\delta n = \vec{\nabla} n \cdot \delta \vec{p} \quad (2)$$

En considérant que I est l'angle orienté, depuis $\vec{\nabla} n$, le gradient de n , vers la tangente au rayon $\vec{T} = \frac{d\vec{p}}{ds}$, autour de leur produit vectoriel, il est possible d'exprimer δn de la façon suivante :

$$\delta n = \|\vec{\nabla} n\| \cos I \delta s \quad (3)$$

À l'aide des résultats (1) et (3), nous pouvons obtenir l'expression de la loi de Snell-Descartes dans le cas continu [Touzé, 2018].

Loi de Snell-Descartes, cas continu

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{\|\vec{\nabla} n\|}{n} \sin I = \gamma \quad (\text{CSD})$$

Cette expression correspond à la courbure locale γ de notre rayon du fait de la réfraction [Torge, 2001]. Par définition de l'angle I , nous avons nécessairement $\sin I \geq 0$. De ce fait, selon la convention que nous avons choisie, la courbure γ est nécessairement négative.

Cette courbure étant liée à la dérivée seconde, si nous introduisons le second vecteur unitaire \vec{N} du repère de Frenet (voir *figure 3*), nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{ds^2} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dI} \frac{dI}{ds} = \gamma \vec{N} \quad (4)$$

Par conséquent, en appliquant (CSD) dans (4) :

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dI} \quad (5)$$

L'équation eikonale

L'équation eikonale est l'équation différentielle fondamentale de deuxième ordre qui décrit le trajet de la lumière dans un milieu donné. Elle peut être obtenue selon deux approches, le principe de Fermat et la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu réfractif [Guillaume, 2015]. Elle implique la loi de Snell-Descartes.

Équation eikonale

$$\frac{d}{ds} \left[n \frac{d\vec{p}}{ds} \right] = \vec{\nabla} n \quad (\text{E})$$

En développant cette expression, nous obtenons :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{ds^2} = \frac{\vec{\nabla} n}{n} - \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \frac{d\vec{p}}{ds} \quad (6)$$

En reprenant le résultat (2), nous pouvons remplacer δn par un produit scalaire, ce qui donne :

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{ds} = \frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \frac{d\vec{p}}{ds} \quad (7)$$

En introduisant ce résultat dans (6) nous obtenons une nouvelle formulation de l'équation eikonale qui est fort pratique pour du lancé de rayon, car la dérivation de n y est remplacée par un simple produit scalaire :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{\nabla} n}{n} - \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{T} \right) \vec{T} \quad (8)$$

Snell-Descartes implique l'eikonale

Par définition en section précédente, notre repère de Frenet est composé des deux vecteurs unitaires orthogonaux \vec{T} et \vec{N} (voir *figure 3*). Il est donc possible de définir le gradient de n dans la base formée par ces deux vecteurs :

$$\frac{\vec{\nabla} n}{n} = \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{T} \right) \vec{T} + \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \quad (9)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\vec{\nabla} n}{n} - \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{T} \right) \vec{T} = \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \quad (10)$$

Or, de par les définitions de notre angle I et du vecteur \vec{N} données précédemment et en *figure 3*, nous avons nécessairement :

$$\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{N} = \frac{\|\vec{\nabla} n\|}{n} \cos \left(\frac{\pi}{2} + I \right) = -\frac{\|\vec{\nabla} n\|}{n} \sin I \quad (11)$$



En appliquant (CSD), (4) et (11) dans (10), nous obtenons donc :

$$\frac{\vec{\nabla} n}{n} - \left(\frac{\vec{\nabla} n}{n} \cdot \vec{T} \right) \vec{T} = \gamma \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \quad (12)$$

Ce résultat, égal à (8), démontre que la loi de Snell-Descartes implique l'équation eikonale.

Traitement de la réfraction en topométrie

Nivellement direct

La réfraction fait partie des sources d'erreurs connues en nivellement direct [Rueger et Brunner, 2000]. Toutefois, elle n'est généralement pas prise en compte. En effet, si on fait les hypothèses de visées courtes, de portées sensiblement égales et à hauteurs à peu près constantes au-dessus du sol, alors les erreurs de réfraction sur les dénivelées sont, d'une part faibles, et, d'autre part, éliminées entre les lectures arrière et avant.

Nivellement trigonométrique

On appelle nivellement trigonométrique, ou nivellement indirect, l'art d'obtenir des dénivelées ΔH à partir d'observations tachéométriques. Pour ce faire, il est nécessaire de mesurer les hauteurs d'instrument et de prisme, respectivement notées h_I et h_S , les angles zénithaux ζ et les distances inclinées D . La dénivelée s'exprime en fonction de la dénivelée brute h et des corrections E , pour la courbure de la Terre, et R , pour la réfraction. On a :

Nivellement Trigonométrique (NT)

$$\begin{cases} \Delta H = h + E - R & \text{avec} \\ h = h_I - h_S + D \cos \zeta \\ E - R = (1 - k) \frac{D^2 \sin^2 \zeta}{2R} \end{cases} \quad \text{NT}$$

Ce modèle, somme toute assez connu [AFTOPO], requiert le rayon de la Terre R et le coefficient de réfraction k . Deux hypothèses majeures permettent d'obtenir ce modèle : d'une part le fait que l'indice de réfraction forme des couches verticalement stratifiées et, d'autre part, que le trajet du rayon forme un arc de cercle.

Les valeurs couramment employées pour le coefficient de réfraction k sont 0.13 [Torge, 2001] ou 0.16 [AFTOPO]. La première de ces deux valeurs aurait été déterminée par Gauss lui-même. La seconde se déduit des conditions

standard de l'atmosphère terrestre, notamment pour un gradient de température de -6.5°C pour une élévation de 1 000 m. Ces valeurs n'ont de sens que si la visée est suffisamment haute au-dessus du sol pour les effets thermiques du sol puissent être négligés. En topométrie classique, pour des visées couramment à hauteur d'homme, les valeurs de k peuvent être d'un autre ordre de grandeur [Hübner, 1977].

De plus, dans certains contextes, il peut arriver que les hypothèses de verticalité ou d'arc de cercle doivent être abandonnées [Willhelm, 1994]. Ainsi, en nous appuyant sur le travail de [Willhelm, 1994], nous avons pu ajouter au modèle du nivellement trigonométrique un coefficient d'asymétrie κ , compris entre 0 et 1, fonction de la distance D_T le long du trajet de l'onde, d'une éventuelle perturbation thermique ; par défaut, κ valant 1/2 [Touzé et al., 2019].

$$\exists \kappa \in]0, 1[$$

$$E - R = (1 - 2k(1 - \kappa)) \frac{D^2 \sin^2 \zeta}{2R} \quad (13)$$

avec $\kappa = \frac{D_T}{D}$

Réfraction bathymétrique

En bathymétrie, pour des mesures acoustiques immergées, l'approche est très différente des techniques terrestres. Elle passe par la mesure régulière, au cours de chaque levé, de profils de célérité du son dans l'eau v en fonction de la profondeur (voir la figure 4). Les navires sont également, en général, équipés de célérimètres de coque mesurant la célérité particulière v_0 au plus près du transducteur.

Comme il est actuellement invisable de pouvoir associer à chaque sonde mesurée un profil de célérité réel,

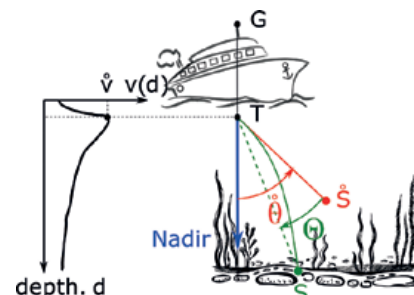


Figure 4. En bathymétrie, la prise en charge de la réfraction s'effectue par la mesure de profils de la célérité du son dans l'eau, appliquée aux sondes mesurées par lancé de rayon.

ceux-ci sont interpolés dans le temps ou dans l'espace parmi les profils disponibles. Le calcul de la position de la sonde mesurée se fait alors par lancé de rayon à partir de la loi de Snell-Descartes. L'hydrographe, lors du levé, est alerté du besoin de faire un nouveau profil de célérité quand sa célérité de coque, mesurée en continu, diffère trop du profil défini dans la configuration.

Équation eikonale en géométrie différentielle absolue

Du fait que la loi de Snell-Descartes implique l'équation eikonale, il est possible d'utiliser cette dernière pour décrire la réfraction acoustique utile en bathymétrie. Cependant, dans ce contexte, l'indice de réfraction n'a pas de sens physique. Nous verrons que ce problème peut être contourné en utilisant la célérité de l'onde.

D'autre part, nous avons pu exprimer l'équation eikonale sous la forme d'un produit scalaire. Or l'intégration de cette équation est délicate car dans la majorité des cas, on souhaite l'effectuer dans un repère euclidien tandis que le gradient de n , souvent lié à la gravité, suit un espace courbe. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur les tenseurs, ces puissants outils de la géométrie différentielle absolue fondée par Ricci et Levi-Civita et appliqués avec brio par Einstein dans sa théorie de la relativité générale.

Vitesse et gradient de vitesse

L'indice de réfraction est défini comme le rapport entre la célérité de la lumière dans le vide $c = 299\,792\,458$ m/s et la célérité de l'onde v dans le milieu qu'elle traverse.

$$n = \frac{c}{v} \quad (14)$$

Dérivons cette expression selon v pour obtenir :

$$\frac{dn}{dv} = -\frac{c}{v^2} = -\frac{n}{v} \quad (15)$$

De ce fait, nous pouvons définir la relation suivante reliant les gradients de l'indice de réfraction n et celui de la célérité v :

$$\frac{\vec{\nabla} n}{n} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dv} \vec{\nabla} v = -\frac{\vec{\nabla} v}{v} \quad (16)$$



Dans les études des effets de la réfraction, il est donc possible de substituer au champ scalaire de l'indice de réfraction n et au champ vectoriel de son gradient $\vec{\nabla}n$ ceux de v et de son gradient, tel qu'en bathymétrie. De plus, la loi de Snell-Descartes impliquant l'équation eikonale, nous pouvons appliquer la même équation, en l'occurrence l'eikonale tant aux réfractions terrestres que bathymétriques. Notre équation devient :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{\vec{\nabla}v}{v} + \left(\frac{\vec{\nabla}v}{v} \cdot \vec{T} \right) \vec{T} \quad (17)$$

avec $\vec{T} = \frac{d\vec{p}}{ds}$

■ Géométrie différentielle absolue

Remarque

Pour vous familiariser avec ces puissants outils de calcul différentiel, l'auteur vous recommande de suivre, sur la chaîne *YouTube* d'Eigenchris¹ les deux séries de vidéos dans l'ordre suivant :

- *Tensors for beginners*, 19 films ;
- *Tensors calculus*, 29 films

Ainsi, si vous avez un minimum de connaissances en calcul matriciel et en analyse, vous serez rapidement capable, comme l'auteur, de manipuler les tenseurs qui vont suivre.

Convention de sommation d'Einstein

Quand dans une expression, l'indice d'une variable se trouve deux fois, en position covariante (en indice) et contravariante (en exposant), cet indice, dit muet, est le signe d'une sommation implicite. Autrement dit, nous avons :

$$x_i y^i = \sum_{i=1}^n x_i y^i \quad (\text{ESC})$$

Prenons notre trajectoire \vec{p} paramétrée par son abscisse curviligne s . Soit un système de coordonnées quelconque de l'espace. Pour i allant de 1 à 3, un point de notre trajectoire sera décrit dans ce système par trois coordonnées contravariantes x^i associées chacune à un vecteur directeur covariant \vec{e}_i .

La difficulté provient notamment de la manière de définir ces vecteurs directeurs. Pour ce faire, dérivons notre trajectoire en appliquant (ESC) :

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} \quad (18)$$

Les vecteurs directeurs de notre système arbitraire de coordonnées sont définis localement à partir de ce résultat et notés \vec{e}_i :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^i} = \vec{\partial}_i \quad (19)$$

Par définition de l'abscisse curviligne s nous avons forcément $\|\delta \vec{p}\| = \delta s$, de ce fait, la relation suivante sera toujours respectée :

$$\left\| \frac{d\vec{p}}{ds} \right\| = 1 \quad (20)$$

Désormais, il est possible de définir le tenseur le plus important de la géométrie différentielle, en l'occurrence le tenseur métrique dont l'expression covariante est donnée par les produits scalaires des vecteurs directeurs. Il est toujours symétrique.

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = g_{ji} \quad (21)$$

L'équation suivante nous permet de déduire l'expression contravariante g^{kj} de ce même tenseur à l'aide du symbole de Kronecker, dont la définition est fournie. Cette équation tensorielle (22) équivaut à l'écriture matricielle $G G^{-1} = \text{Id}$.

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (22)$$

Dès lors, soient les deux vecteurs $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$ et $\vec{b} = b^j \vec{e}_j$, leur produit scalaire fait intervenir le tenseur métrique de la façon suivante :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = g_{ij} a^i b^j \quad (23)$$

Si on considère un champ scalaire quelconque μ dont on cherche à exprimer les composantes μ^i de son gradient $\vec{\nabla}\mu = \mu^i \vec{e}_i$, nous devons également faire intervenir le tenseur métrique sous sa forme contravariante :

$$\vec{\nabla}\mu = \mu^i \vec{e}_i \implies \mu^i = g^{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x^j} \quad (24)$$

Ce résultat se déduit de (2) en l'exprimant de manière tensorielle, pour $\mu = n$.

Le dernier outil nécessaire à notre étude sert à caractériser comment les vecteurs directeurs varient le long de notre trajectoire. C'est essentiel du fait qu'en géométrie différentielle, les vecteurs directeurs ne sont pas toujours immuables comme c'est le cas en géométrie euclidienne. Autrement dit, nous avons besoin de connaître des coefficients Γ_{ij}^k tels qu'il soit possible d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \quad (25)$$

Ces coefficients sont appelés "coefficients de connection" ou encore "symboles de Christoffel". Ils s'obtiennent par dérivation du tenseur métrique :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (26)$$

Ainsi, il est possible d'exprimer la dérivée seconde de notre trajectoire en espace courbe en tenant compte de la variation propre des vecteurs directeurs. En s'appuyant sur les résultats précédents, on peut prouver que :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{ds^2} = \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) \vec{e}_k \quad (27)$$

Pour la culture générale des lecteurs, on parlera de courbes géodésiques dans le cas précis où :

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (28)$$

Ainsi, une géodésique est une courbe dont l'accélération compense exactement la variation du référentiel ce qui, en espace courbe, correspond au chemin le plus direct.

■ Reformulation de l'eikonale

Nous disposons en équation (17) d'une formulation de l'équation eikonale faisant intervenir la célérité v de notre onde sous la forme d'une dérivée seconde. Nous avons pu également obtenir en formule (27) l'expression générale en géométrie différentielle absolue d'une telle dérivée seconde, quel que soit le système de coordonnées. Il ne nous reste qu'à exploiter l'égalité entre ces deux formulations : Tout d'abord, en nous appuyant sur (24), exprimons le gradient de v de manière tensorielle :

$$\frac{\vec{\nabla}v}{v} = \frac{g^{ki}}{v} \frac{\partial v}{\partial x^i} \vec{e}_k \quad (29)$$

En appliquant ce dernier résultat ainsi que (18), (22) et (23), on peut prouver que :

$$\frac{\vec{\nabla}v}{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \quad (30)$$

Ces deux derniers résultats appliqués dans notre eikonale (17) nous permettent d'obtenir :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{ds^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x^i} \left(\frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} - g^{ik} \right) \vec{e}_k \quad (31)$$

¹ <https://www.youtube.com/c/eigenchris>



Ainsi, en constatant l'égalité de (31) avec (17), et en ne nous intéressant qu'aux dérivées secondes des coordonnées, nous obtenons l'équation tensorielle de l'eikonale (TEE).

Équation tensorielle de l'eikonale

Soit une trajectoire d'une onde \vec{p} en fonction de sa position longitudinale s , soumise à un champ scalaire de célérité v , et de coordonnées quelconques x^k dont le tenseur métrique g_{ij} est connu, l'équation eikonale s'écrit :

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x^i} \left(\frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} - g^{ik} \right) - \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (\text{TEE})$$

(TEE) correspond en fait à autant d'équations que de dimensions spatiales k ; de plus, nous rappelons que nous y respectons la convention de sommation d'Einstein (ESC), ainsi, aux indices muets i et j correspondent des sommations implicites. Ce résultat est valable pour tout système de coordonnées et aucune hypothèse n'a été faite jusqu'à présent sur le champ de célérité v .

Résolution en Terre sphérique pour un champ de vitesse stratifié verticalement

Désormais, nous allons exploiter l'expression tensorielle de l'eikonale (TEE) en appliquant les deux hypothèses d'une Terre localement sphérique et d'un gradient vertical de la célérité.

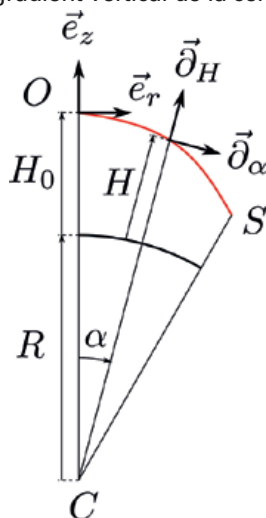


Figure 5. Dans le plan vertical de l'émission, repère local astronomique et repère lié à la courbure de la Terre le long de la trajectoire.

Métrie de la Terre sphérique

Soit le point O d'émission de notre onde, selon un angle zénithal ζ_0 . Plaçons-nous dans le cadre de la figure 5, dans le plan vertical de l'émission.

Prenons le repère local astronomique en O. Le plan vertical est défini par le vecteur \vec{e}_z de la verticale locale en O et du vecteur horizontal \vec{e}_r . Soient R le rayon de courbure locale du géoïde en O, H l'altitude (dont H_0 l'altitude en O) et α l'angle au centre de la Terre. Si nous notons r et z les coordonnées d'un point de la trajectoire, celles-ci peuvent s'exprimer en fonction de H et de α selon l'expression (32).

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+H) \sin \alpha \\ (R+H) \cos \alpha - (R+H_0) \end{bmatrix} \quad (32)$$

En appliquant à ce résultat la définition (19), nous pouvons définir les vecteurs directeurs de notre référentiel lié à l'altitude et à l'angle au centre de la Terre.

$$\vec{\partial}_\alpha = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \alpha} = (R+H) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\vec{\partial}_H = \frac{\partial \vec{p}}{\partial H} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (34)$$

En calculant, à partir de ces deux vecteurs, selon la définition (21), nous trouvons aisément l'expression covariante du tenseur métrique qui est diagonal. Dans l'expression g_{ij} , les indices i et j correspondent à α ou à H .

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} (R+H)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

En effet, on a :

$$\begin{cases} g_{\alpha\alpha} = \vec{\partial}_\alpha \cdot \vec{\partial}_\alpha = (R+H)^2 \\ g_{\alpha H} = g_{H\alpha} = \vec{\partial}_\alpha \cdot \vec{\partial}_H = 0 \\ g_{HH} = \vec{\partial}_H \cdot \vec{\partial}_H = 1 \end{cases} \quad (36)$$

L'expression contravariante du tenseur métrique s'obtient par l'inverse de cette matrice.

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R+H)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

La métrique étant maintenant résolue, vient l'étape simple – mais fastidieuse – du calcul des symboles de Christoffel selon la formule (26). Si notre référentiel a p coordonnées, il y a p^3 symboles à calculer, c'est-à-dire huit dans notre cas. Tout d'abord, vu que le tenseur métrique est diagonal, toutes valeurs de g_{ij} et de g^{ij} sont nulles pour $i \neq j$. Cela

va considérablement simplifier l'application de la formule (26).

Intéressons-nous maintenant à la détermination de $\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha$.

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \right) \quad (38)$$

Dans cette formule, toutes les dérivées sont nulles du fait de l'absence de l'angle au centre la Terre α dans le tenseur métrique, ce qui donne :

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = 0 \quad (39)$$

En appliquant la même méthode aux sept autres symboles de Christoffel, nous trouvons :

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \Gamma_{HH}^H = 0 \\ \Gamma_{\alpha H}^\alpha = \Gamma_{H\alpha}^\alpha = \frac{1}{R+H} \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^H = -\frac{1}{R+H} \\ \Gamma_{\alpha H}^H = \Gamma_{H\alpha}^H = \Gamma_{HH}^H = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Champ de vitesse stratifié verticalement

La seconde hypothèse que nous faisons consiste à considérer que la célérité v ne varie qu'en fonction de l'altitude. Certes, il y a des variables intermédiaires, telles que la température et la pression, mais celles-ci ne sont supposées dépendre – selon notre hypothèse – que de l'altitude ou être constantes (telle la longueur d'onde). Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$x^i \neq H \implies \frac{\partial v}{\partial x^i} = 0 \quad (41)$$

Pour réduire les expressions par la suite, nous allons noter v' la dérivée de la célérité selon l'altitude :

$$\frac{\partial v}{\partial H} = v' \quad (42)$$

Ainsi, le gradient de la célérité est toujours vertical. La première conséquence, fort de notre équation eikonale en (17), est que la trajectoire de notre onde appartient toujours au plan vertical contenant la tangente à l'émission. C'est la raison pour laquelle, en section précédente, nous avons défini un référentiel en deux dimensions qui est suffisant pour décrire la trajectoire suivie par notre onde dans le plan vertical de l'émission, pour peu que l'azimut de ce plan soit connu.

Nouvelles équations différentielles

Nous pouvons alors introduire tous ces résultats dans (TEE) pour obtenir



les équations différentielles de second ordre régissant, tout d'abord, l'angle au centre de la Terre α :

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{dH}{ds} \left(\frac{v'}{v} - \frac{2}{R+H} \right) \quad (43)$$

Puis l'altitude H :

$$\frac{d^2H}{ds^2} = \frac{v'}{v} \left(\left(\frac{dH}{ds} \right)^2 - 1 \right) + (R+H) \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 \quad (44)$$

Cette dernière expression peut être simplifiée. En effet, rappelons-nous que la norme de la tangente est nécessairement égale à 1 (voir la formule (20)). Ainsi :

$$1 = \left\| \frac{d\vec{p}}{ds} \right\|^2 = \frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \frac{d\vec{p}}{ds} = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (45)$$

Ce qui, dans notre référentiel en Terre sphérique, donne :

$$(R+H)^2 \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dH}{ds} \right)^2 = 1 \quad (46)$$

D'où la relation suivante, liant les dérivées de l'angle au centre de la Terre et l'altitude :

$$\left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 = \frac{1}{(R+H)^2} \left(1 - \left(\frac{dH}{ds} \right)^2 \right) \quad (47)$$

Introduisons désormais l'angle zénithal ζ de la tangente à la trajectoire de notre onde en un point. En figure 3 et la section associée, nous avons défini l'angle orienté I du gradient de n vers cette même tangente. Sachant, depuis la formule (16), que les gradients de n et de v sont de sens opposés, et que le gradient de v , par hypothèse, est vertical, on peut déduire que :

$$\zeta = I \quad \text{ou} \quad \zeta = \pi - I \quad (48)$$

De ce fait :

$$\sin \zeta = \sin I \quad (49)$$

De plus, géométriquement, on peut remarquer que :

$$\cos \zeta = \frac{dH}{ds} \quad (50)$$

Donc, en introduisant les résultats (47) et (50) dans (44), nous obtenons :

$$\frac{d^2H}{ds^2} = \left(\frac{1}{R+H} - \frac{v'}{v} \right) \sin^2 \zeta \quad (51)$$

Si nous revenons au constat en formule (49), nous remarquons qu'il est possible de lui appliquer la loi de Snell-Descartes discrète (DSD). En introduisant l'angle zénithal à l'émission ζ_0 , ainsi que la célérité à l'émission v_0 , nous obtenons l'équation différentielle

régissant l'altitude en réfraction stratifiée verticalement en Terre sphérique.

$$\frac{d^2H}{ds^2} = \left(\frac{1}{R+H} - \frac{v'}{v} \right) \frac{v^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2} \quad (52)$$

Ainsi, en considérant une stratification verticale de la célérité, en Terre sphérique, la question de la réfraction en altimétrie revient à résoudre l'altitude $H(s)$ selon le système suivant :

$$\begin{cases} H(0) = H_0 \quad \text{et} \quad \frac{dH(0)}{ds} = \cos \zeta_0 \\ \frac{dH}{ds} = \cos \zeta \\ \frac{d^2H}{ds^2} = \left(\frac{1}{R+H} - \frac{v'}{v} \right) \frac{v^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2} \end{cases} \quad (53)$$

Pour obtenir ce dernier résultat, que nous allons exploiter par la suite, nous avons considéré que l'altitude H est suffisamment petite par rapport au rayon de la Terre R pour que $\frac{1}{R+H} \approx \frac{1}{R}$.

■ Un mot sur les sommes doubles

Le système (53) que nous allons devoir résoudre va nécessiter deux intégrations que nous allons approcher par deux sommations. Une propriété de ces sommes doubles particulièrement importante pour nos besoins est la suivante :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i u_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n u_{ij} \quad (54)$$

Pour comprendre cette égalité, il suffit de remarquer qu'au fond, seul compte le respect de l'inégalité $1 \leq j \leq i \leq n$. Pour s'en convaincre, nous invitons le lecteur à lire la démonstration illustrée au lien ci-après². Cette propriété nous sera fort utile dans le cas où $u_{ij} = a_i b_j$ puisque nous pouvons déduire de (54) le résultat suivant en (55) :

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i b_j = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=j}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=i}^n a_j \quad (55)$$

Prenons désormais le cas particulier – qui nous servira naturellement – où $b_i = a_i$. Nous pouvons écrire la somme des termes de i à n de la manière suivante :

$$\sum_{j=1}^i a_j = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=i}^n a_j + a_i \quad (56)$$

² https://fr.wikiversity.org/wiki/Sommentation/Sommentation_double

En appliquant (55) et (56), il est aisé de démontrer cette dernière propriété utile (57) :

$$2 \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=i}^n a_j = 2 \sum_{i \leq j} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (57)$$

Si nous considérons \hat{a} et σ^2 comme étant, respectivement, la moyenne arithmétique et l'écart-type empirique des a_i , nous obtenons :

$$2 \sum_{i \leq j} a_i a_j = n(n+1) \hat{a}^2 + (n-1) \sigma_a^2 \quad (58)$$

■ Profil de la célérité le long du trajet

Le long du trajet de notre onde, nous supposons que nous traversons n couches de célérité v_i telles que la traversée de chaque couche est de durée constante δt . Nous supposons aussi que nous connaissons également, en chacune de ces couches, la valeur du gradient de la célérité $v'_i = \frac{dv_i}{dH}$ qui, par hypothèse, ne varie que selon l'altitude H .

■ Longueur du trajet

Avant tout, nous pouvons constater qu'une longueur élémentaire δs du trajet parcouru est liée à la célérité et à la durée élémentaire δt pour traverser cette section.

$$\delta s = v \delta t \quad (59)$$

Soient Δt la durée du trajet aller et retour de notre onde entre l'émission et la réception et S la distance curviligne entre l'émetteur et le point mesuré. On a :

$$S = \int_0^S ds = \int_0^{\frac{\Delta t}{2}} v dt \quad (60)$$

Fort de notre hypothèse en section précédente de couches isochrones, nous avons :

$$\delta t = \frac{\Delta t}{2n} \quad (61)$$

D'où l'expression de la distance curviligne S en fonction de la moyenne arithmétique \hat{v} de la célérité :

$$S \approx \delta t \sum v_i = \frac{\Delta t}{2n} \sum v_i = \hat{v} \frac{\Delta t}{2} \quad (62)$$

De ce résultat (62), retenons un point supplémentaire qui sera fort utile par la suite, en l'occurrence :

$$\delta t = \frac{S}{\sum v_i} \quad (63)$$





Résolution de l'altitude

Commençons par la première intégration du système (53) jusqu'au point d'abscisse curviligne s_i .

$$\frac{dH_i}{ds} = \cos \zeta_i = \cos \zeta_0 + \int_0^{s_i} \frac{d^2 H}{ds^2} ds \quad (64)$$

C'est-à-dire, en appliquant (59), (53) et (63) :

$$\frac{dH_i}{ds} \approx \cos \zeta_0 + \frac{S \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 \sum v_i} \sum_{j=1}^i v_j^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{v'_j}{v_j} \right) \quad (65)$$

La dénivelée est donnée par l'intégrale de ce résultat, ce qui donne, en appliquant (59) et (63) :

$$\Delta H = \int_0^S \frac{dH}{ds} ds \approx \frac{S}{\sum v_i} \sum_{i=1}^n v_i \frac{dH_i}{ds} \quad (66)$$

En introduisant (65) dans (66) nous obtenons ce qui suit :

$$\Delta H = S \cos \zeta_0 + \mathcal{E} - \mathcal{R} \quad (67)$$

Avec

$$\mathcal{E} - \mathcal{R} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 (\sum v_i)^2} \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^i \left(\frac{v_j^3}{R} - v_j^2 v'_j \right) \quad (68)$$

Nous pouvons désormais nous servir de la propriété des doubles sommes (55).

$$\mathcal{E} - \mathcal{R} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 (\sum v_i)^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i^3}{R} - v_i^2 v'_i \right) \sum_{j=i}^n v_j \quad (69)$$

Fort de (59), nous pouvons écrire que :

$$v = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s}{S} \sum v_i \quad (70)$$

En en faisant la somme, nous obtenons :

$$\sum_{j=i}^n v_j = \frac{\sum v_i}{S} \sum_{j=i}^n \delta s_j = \frac{\sum v_i}{S} \left(S - \sum_{j=1}^i \delta s_j \right) \quad (71)$$

En rappelant que s_i est l'abscisse curviligne du point i , nous obtenons donc :

$$\sum_{j=i}^n v_j = \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \sum v_i \quad (72)$$

Ce qui, une fois introduit dans (69), nous donne :

$$\mathcal{E} - \mathcal{R} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 \sum v_i} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \left(\frac{v_i^3}{R} - v_i^2 v'_i \right) \quad (73)$$

Ces expressions (67) et (73) nous donnent la dénivelée d'une onde acoustique ou électromagnétique émise selon l'angle zénithal ζ_0 ayant parcouru la

longueur S au travers de n couches isochrones de célérité v_i , de gradient v'_i et de position s_i le long du trajet. Nous allons désormais la simplifier.

Simplification de l'expression

Posons

$$\mathcal{E} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 R \sum v_i} \sum_{i=1}^n v_i^3 \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \quad (74)$$

Et

$$\mathcal{R} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 \sum v_i} \sum_{i=1}^n v_i^2 v'_i \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \quad (75)$$

Considérons comme négligeables les variations relatives de la célérité v_i par rapport à leur moyenne \bar{v} . En effet, dans les conditions habituelles, les ordres de grandeur sont :

Bathymétrie : $\frac{\Delta v}{\bar{v}} \approx 10^{-2}$

Topométrie : $\frac{\Delta v}{\bar{v}} \approx 10^{-4}$

Cette approximation nous permet d'obtenir :

$$\mathcal{E} = \frac{\bar{v}^2 S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 R \sum v_i} \sum_{i=1}^n v_i \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \quad (76)$$

Or, en appliquant (72), on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^n v_i \left(1 - \frac{s_i}{S} \right)}{\sum v_i} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n v_j}{(\sum v_i)^2} \quad (77)$$

Si on considère la propriété (58) avec n grand, ainsi que de faibles variations relatives des v_i , on en déduit que :

$$\frac{\sum_{i=1}^n v_i \left(1 - \frac{s_i}{S} \right)}{\sum v_i} \approx \frac{1}{2} \quad (78)$$

Ce qui nous donne :

$$\mathcal{E} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{2R} \frac{\bar{v}^2}{v_0^2} \quad (79)$$

En faisant la même approximation de variations relatives faibles des v_i , atteignons-nous à R . Nous obtenons :

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{v} S^2 \sin^2 \zeta_0}{v_0^2 \sum v_i} \sum_{i=1}^n v_i v'_i \left(1 - \frac{s_i}{S} \right) \quad (80)$$

Nous définissons désormais les gradients moyens \bar{v}' et le coefficient d'asymétrie κ définis par les moyennes pondérées suivantes :

$$\bar{v}' = \frac{\sum v_i v'_i}{\sum v_i} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{\sum v_i v'_i s_i}{\sum v_i v'_i} \quad (81)$$

Nous obtenons d'expression de R :

$$\mathcal{R} = S^2 \sin^2 \zeta_0 (1 - \kappa) \frac{\bar{v} \bar{v}'}{v_0^2} \quad (82)$$

In fine, nous obtenons comme expression de la dénivelée :

$$\Delta H = S \cos \zeta_0 + \mathcal{E} - \mathcal{R} \quad (83)$$

Avec

$$\mathcal{E} - \mathcal{R} = \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{2R} \left(\frac{\bar{v}^2}{v_0^2} - 2(1 - \kappa) k \right) \quad (84)$$

Dans laquelle, k est le coefficient de réfraction tel qu'utilisé en topométrie classique. Son expression est :

$$k = \frac{R \bar{v} \bar{v}'}{v_0^2} \quad (85)$$

Cas particuliers

Si le gradient varie peu, le coefficient d'asymétrie se simplifie. En effet, en se basant sur (78) :

$$\forall i, v'_i \approx \bar{v}' \Rightarrow \kappa = \frac{\sum v_i v'_i s_i}{\sum v_i v'_i} \approx \frac{\sum v_i s_i}{\sum v_i} = \frac{1}{2} \quad (86)$$

Si la visée est proche de l'horizontale, vu l'hypothèse de stratification verticale de la célérité, notre résultat se simplifiera encore davantage. En effet :

$$\zeta_0 \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\bar{v}}{v_0} \approx 1 \quad (87)$$

En appliquant ces deux résultats dans (84), alors nous retrouvons exactement les formules classiques du nivellement trigonométrique (NT). Cela nous permet de mieux comprendre les hypothèses sous-jacentes à ces formules classiques de la topométrie et donc d'en cerner les limites.

Correction angulaire

Plaçons-nous désormais dans le cadre de la figure 6. Nous allons chercher à déterminer la correction angulaire $\Delta \zeta$ à apporter à l'angle zénithal d'émission ζ_0 de manière à obtenir l'angle zénithal corrigé.

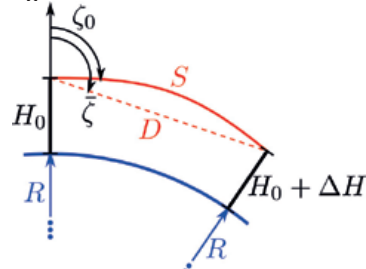


Figure 6. Trajet de l'onde acoustique ou électromagnétique émise selon l'angle zénithal ζ_0 .

Pour ce faire, nous allons considérer que la distance euclidienne D entre l'émission et le point mesuré est égale à la longueur curviligne du trajet S . Ensuite il suffit d'appliquer la loi des cosinus avec la dénivelée définie selon (83). Il est possible de montrer que la correction angulaire s'exprime,



en négligeant les termes correctifs de second ordre, selon la formule (88).

$$\Delta\zeta = \bar{\zeta} - \zeta_0 = \frac{S \sin \zeta_0}{R} \left((1 - \kappa) k + \frac{v_0^2 - \hat{v}^2}{2v_0^2} \right) \quad (88)$$

Conclusion

Tout d'abord, en montrant que la loi de Snell-Descartes impliquait l'équation eikonale, puis en nous intéressant à la célérité plutôt qu'à l'indice de réfraction, il a été possible de traiter exactement dans le même cadre théorique les réfractions acoustiques et électromagnétiques que nous pouvons rencontrer en hydrographie et en topométrie.

Ensuite, en utilisant les puissants outils de la géométrie différentielle absolue, nous avons pu établir l'équation tensorielle de l'eikonale qui régit la réfraction, et ce, quel que soit le système de coordonnées utilisé et sans aucune hypothèse.

La résolution de cette équation tensorielle en Terre sphérique, selon une stratification verticale de l'atmosphère en couches isochrones nous a permis d'obtenir un modèle généralisé de la réfraction. Il serait intéressant de résoudre cette équation tensorielle dans le cadre d'un tunnel avec un gradient radial pour la question de la réfraction latérale en topométrie souterraine. Sur notre proposition, nous montrons que :

Si une onde est émise, avec une célérité v_0 à l'émission, selon un angle zénithal ζ_0 , et une durée de trajet aller-retour Δt au travers de n couches isochrones de célérité v_i et de gradient de célérité v_i' connu, alors nous pouvons définir les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \text{Célérité moyenne} \quad \hat{v} &= \frac{\sum v_i}{n} \\ \text{Gradient moyen} \quad \hat{v}' &= \frac{\sum v_i v_i'}{\sum v_i} \\ \text{Longueur curviligne} \quad S &= \hat{v} \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coefficient d'asymétrie} \quad \kappa &= \frac{\sum v_i v_i' s_i}{\sum v_i v_i'} \\ \text{Coefficient de réfraction} \quad k &= \frac{R \hat{v} \hat{v}'}{v_0^2} \end{aligned}$$

De ces paramètres, il est possible de déduire la dénivelée ΔH :

$$\Delta H = S \cos \zeta_0 + \frac{S^2 \sin^2 \zeta_0}{2R} \left(\frac{\hat{v}^2}{v_0^2} - 2(1 - \kappa) k \right)$$

Ainsi que la correction $\Delta\zeta$ sur l'angle zénithal :

$$\Delta\zeta = \frac{S \sin \zeta_0}{R} \left((1 - \kappa) k + \frac{v_0^2 - \hat{v}^2}{2v_0^2} \right)$$

En faisant les hypothèses d'un gradient variant peu (dans ce cas, $\kappa \approx 0.5$), et d'une visée proche de l'horizontale (pour laquelle $\hat{v} \approx v_0$), ce modèle est strictement identique aux formules habituelles du nivellement trigonométrique.

Ainsi, pour la topométrie, ce résultat nous informe des hypothèses pour lesquelles le modèle standard est valable et nous fournit une alternative si ce n'est pas le cas. De plus, une expression rigoureuse définit désormais le coefficient de réfraction k en fonction de la célérité et de son gradient. Grâce à ce lien rigoureusement établi, il est envisageable d'imaginer comment un drone équipé de capteurs météorologiques pourrait permettre de réaliser régulièrement des profils de célérité le long des visées d'un réseau d'auscultation d'ouvrage.

Dans un prochain article, nous exploiterons ce nouveau modèle à des simulations de mesures bathymétriques LiDAR aéroportés ainsi que dans le cas extrême d'un LiDAR bathymétrique aéroporté (émission dans l'air pour un point mesuré immergé). Ces tests nous permettront d'évaluer de manière plus concrète la valeur ajoutée de ce travail. ●

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Michel Kasser. En effet, il y a quelques années, il avait, d'une part, pressenti les intérêts d'une approche tensorielle en géomatique et, d'autre part, compris que des profils de température le long de visées permettraient de modéliser la réfraction. Ayant partagé plusieurs années le même bureau que lui, Michel m'a parlé de tout cela. S'il m'a fallu plusieurs années pour être en mesure d'en proposer un modèle, je tiens à rappeler que ces idées brillantes viennent de lui.

Contact

Thomas Touzé, EDF Hydro / DTG
thomas.touze@edf.fr

Bibliographie

[Guillaume, 2015] Guillaume, S. (2015). *Determination of a Precise Gravity Field for the CLIC Feasibility Studies*. Thèse de doctorat, ETHZ. <https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/126895>
[Hübner, 1977] Hübner, E. (1977). *Einfluss*

der terrestrischen refraction auf den laserstrahl in bodennahen luftschichten. Vermessungstechnik, 25(10)

[Rueger et Brunner, 2000] Rueger, J. M. et Brunner, F. K. (2000). *On system calibration and type testing of digital levels*. Zeitschrift für Vermessungswesen, (125):p.120-130

[Torge, 2001] Torge, W. (2001). *Geodesy, third completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter

[Touzé, 2018] Touzé, T. (2018). *How to solve the refraction problem of long distance measurements ?* In Trimble Dimensions. <https://trimbledimensions.com/session-info/catalog/?search=refraction#/>

[Touzé et al., 2019] Touzé, T., Chevallier, N. et olzon, N. (2019). *N'ayez pas peur du coefficient de réfraction ! deuxième partie sur la réfraction latérale ou asymétrique*. XYZ n° 161.

[Touzé et Hansen, 2019] Touzé, T. et Hansen, M. (2019). *N'ayez pas peur du coefficient de réfraction, première partie sur les enjeux de réfraction en nivellement trigonométrique*. XYZ n° 158, (158).

[Wilhelm, 1994] Wilhelm, W. (1994). *Die seitenrefraktion : Ein unbeliebtes thema ? oder ein thema nur für insider ?* Géomatique Suisse. <https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=geo-006:1994:92::747>.

ABSTRACT

The issue of refraction arises in topometry and in bathymetry according to distinct models which differ, for the most part, in the fact that in bathymetry, velocity profiles are measured while in topometry the coefficient of refraction is introduced. This coefficient allows the description of the angular deviation. In addition, the models proposed are based either on Snell-Descartes law or on the eikonal equation.

In this article, first, we show that Snell-Descartes law involves the eikonal equation. The substitution of the refractive index by the celerity, and considering the problem in a tensor way, we manage to obtain the tensor expression of the eikonal equation valid both in topometry and in bathymetry and independent of any coordinate system.

Solving this second-order differential equation allows us to construct a generalized model of refraction in the specific case of layers of celerity stratified vertically in spherical Earth. We obtain a result which generalizes the trigonometric leveling formulas and which are compatible with observations of a velocity profile.