

Transformation polynomiale par fonctions radiales de base les conséquences des changements de référentiels

Application au cas des raccordements parcellaires

■ Claude MILLION (AFT) et Jacques CHAMBARETAU (Inspecteur du Cadastre)

Après l'application de points d'un référentiel dans un autre, si le système est surdéterminé, il subsiste, sur les points d'appuis de départ, des résidus de compensation. Si on admet que les coordonnées d'origine des points d'appui soient adoptées comme exactes et définitives, les positions des points transformés qui leur sont voisins, présenteront des écarts qui pourront être jugés inadmissibles, le résidu ne portant que sur ces positions, sans être réparti au-delà. On a cherché une méthode de répartition de ces écarts qui ne détruise pas la compensation et qui satisfasse cette exigence.

La nécessité de résorber les résidus de compensation

Lorsqu'on applique un réseau de points connus dans un autre référentiel, par un simple changement de base ou par une transformation polynomiale conforme ou quelconque, on utilise, pour se contrôler, ou plutôt pour contrôler la validité des données, plus de points d'appui qu'il ne serait strictement nécessaire : le minimum étant de deux points pour une transformation conforme linéaire, dite d'Helmert, trois points pour une transformation polynomiale conforme du deuxième degré, quatre points pour une transformation du troisième degré etc..., mais on ne dépasse le troisième degré que si on est très sûr de ses données, ce qui est rarement le cas. De fait, on admet souvent d'utiliser le double de points d'appuis à des fins de contrôle.

Donc, on doit faire une compensation laquelle fait apparaître des résidus aux points de base qui ont servis à calculer les paramètres de la transformation a et b :
 $X^{\&} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2 + a_6 \cdot x^2 \cdot y + a_7 \cdot x \cdot y^2 + a_8 \cdot x^3 + a_9 \cdot y^3$
 $Y^{\&} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot x \cdot y + b_4 \cdot x^2 + b_5 \cdot y^2 + b_6 \cdot x^2 \cdot y + b_7 \cdot x \cdot y^2 + b_8 \cdot x^3 + b_9 \cdot y^3 + \dots$
 avec $X^{\&}$, $Y^{\&}$ coordonnées vraies des points d'appui, les coefficients a et b sont déterminés à la suite de la compensation ce sont des valeurs moyennes de telle sorte qu'après leur détermination on trouve : $\bar{X} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot x + \bar{a}_2 \cdot y + \bar{a}_3 \cdot x \cdot y + \bar{a}_4 \cdot x^2 + \bar{a}_5 \cdot y^2 + \bar{a}_6 \cdot x^2 \cdot y + \bar{a}_7 \cdot x \cdot y^2 + \bar{a}_8 \cdot x^3 + \bar{a}_9 \cdot y^3$

$\bar{Y} = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \cdot x + \bar{b}_2 \cdot y + \bar{b}_3 \cdot x \cdot y + \bar{b}_4 \cdot x^2 + \bar{b}_5 \cdot y^2 + \bar{b}_6 \cdot x^2 \cdot y + \bar{b}_7 \cdot x \cdot y^2 + \bar{b}_8 \cdot x^3 + \bar{b}_9 \cdot y^3 + \dots$ Les valeurs surmontées d'une barre (-) sont issues de la compensation. On a évidemment, $X^{\&} \neq \bar{X}$, $Y^{\&} \neq \bar{Y}$, les valeurs compensées des points de base dont les coordonnées sont en majuscules sont un peu différentes de celles déduites de la compensation. Evidemment, on adopte les coordonnées considérées comme vraies, $X^{\&}$, $Y^{\&}$ ce qui fait apparaître des écarts sur ces points, on pose :

$$\Delta_A^r = \frac{X_A^{\&} - \bar{X}_A}{Y_A^{\&} - \bar{Y}_A}$$

le vecteur d'écart au point d'appui A. Ce qui pose problème c'est que les points transformés M, voisins de A, ne seront pas déplacés comme A, on constatera entre M et A une discordance qui peut être inacceptable pour l'utilisation ultérieure des points M.

Tout notre propos est de résorber ces écarts de façon à les répartir élégamment dans la masse des points M de façon à les rendre insensibles. Evidemment, la première idée qui vient à l'esprit est d'augmenter le degré du polynôme de telle sorte qu'une compensation ne soit plus nécessaire, et que de la sorte les positions des points de base et leurs voisins restent cohérentes.

A la suite d'une compensation par les moindres carrés, les écarts, souvent appelés résidus de compensation, ont quelques propriétés intéressantes :
D'abord leur somme est nulle, et, si la

transformation a été correcte, ils sont complètement erratiques, donc aucune loi continue ne peut leur être appliquée. Ensuite, pour une transformation du premier degré, un point de base qui se trouverait au voisinage de centre de gravité G n'aurait aucun résidu de compensation, soit : $\Delta_G^r = 0$.

Application pratique de la nouvelle méthode

La numérisation complète du plan cadastral est en voie d'achèvement. Les plans qui ont été digitalisés par voie de convention avec les collectivités territoriales ainsi que les plans qui ont été récemment rajeunis grâce à la procédure de remaniement seront disponibles dans le système de gestion graphique PCI-Vecteur ; quant aux autres plans, ils sont en cours de scannage et seront disponibles au travers de l'application PCI-Image. L'objectif annoncé est la dématérialisation totale des 580 000 feuilles du plan cadastral et, à terme, leur mise à la disposition du public sur l'internet.

La gestion des plans cadastraux vectorisés soulève un certain nombre de questions relatives aux raccords d'amas parcellaires auxquelles la transformation polynomiale par fonctions radiales de base apporte une réponse satisfaisante.

■ Le cas des raccords de feuilles

La vectorisation des plans fournit l'occa-

■ ■ ■ sion d'assembler les feuilles cadastrales entre elles. Pour des raisons évidentes de disparité d'échelles et de qualité de lever initial, ce rapprochement n'avait presque jamais été effectué et, naturellement, les discordances sont fréquentes.

La méthode utilisée actuellement consiste, dans un premier temps, à translater les feuilles dans le système de coordonnées générales Lambert. Cette opération conduit à constater des trous et des chevauchements. Dans la mesure où les écarts n'excèdent pas la tolérance fixée, les écarts entre feuilles sont éliminés par rapprochement entre les masses parcellaires suivant des règles empiriques. En tout état de cause, les parcelles limitrophes sont modifiées tant dans leur forme que dans leur contenance alors que les parcelles plus éloignées ne sont pas du tout affectées. La transformation polynomiale décrite dans cet article permet une déformation harmonique de la totalité des points du plan donc de la totalité des parcelles sans défavoriser particulièrement les parcelles de jonction. Ces observations sur le raccord des feuilles peuvent facilement être transposées au raccord des limites communales.

■ L'insertion des éclatés

Les feuilles cadastrales présentent quatre variétés d'éclatés : des portions de parcellaire ne rentrant pas dans le cadre de la feuille physique, des amas parcellaires que le dessinateur n'a pas été capable d'insérer dans du parcellaire existant, des groupes de parcelles agrandis en marges pour des raisons de lisibilité et des exclus de remembrement. Le plan numérique implique la continuité du parcellaire et ces amas isolés doivent impérativement être rapatriés dans le tissu général. La méthode consiste à choisir des points de contact les plus probables et à réaliser une transformation de coordonnées conforme linéaire de type Helmert calée sur ces points d'appui pour passer des coordonnées locales dans le système général. Des résidus apparaissent qui ne sont pas compensés mais qui sont éliminés par déformation. Là encore, la transformation polynomiale, en s'appuyant sur la quasi-totalité du périmètre d'insertion permet, non seulement d'éliminer les résidus, mais

encore de répartir l'écart harmonieusement sur la totalité de l'amas. Une des propriétés remarquable des cas d'insertion d'éclatés est que dans certaines situations, c'est le trou qui est à adapter à l'amas isolé.

■ L'application de certains documents d'arpentage

Un document d'arpentage (ou document de modification du parcellaire cadastral) est un plan dressé par un géomètre-expert en vue de modifier des limites de propriété sur le plan cadastral. Les règles administratives de conservation du plan imposent de travailler dans le cadre de la parcelle ancienne. Supposons un lotissement dont le plan d'arpentage au 1/200^e est à insérer dans un plan cadastral mis à jour au 1/2500^e. Inévitablement des différences parfois importantes vont apparaître sur le pourtour de l'ensemble immobilier. Au lieu d'écarter les lots périmétriques, la nouvelle méthode va nous permettre d'insérer équitablement le lotissement dans sa parcelle d'origine.

■ La lambertisation des feuilles non rattachées

Pour rattacher au système général une feuille cadastrale mise à jour (c'est à dire qui a été élaborée par simple mise à jour du plan napoléonien), une des méthodes utilisées consiste à repérer une collection de points remarquables et à en calculer les coordonnées par G.P.S. (Global Positioning System). Tous les points constitutifs de la feuille sont ensuite déterminés dans le système général au moyen de la transformation conforme d'Helmert. Pour éviter de conserver des résidus parfois importants sur les points d'appui, la transformation polynomiale pourrait, dans ce cas également, être d'un emploi judicieux.

On voit bien qu'il est constant que les situations de raccordement d'amas parcellaires posent des difficultés dans la mesure où la position réelle des objets n'est pas connue avec précision. Les méthodes utilisées jusqu'à présent laissent un sentiment d'insatisfaction et parfois d'injustice. Outil puissant, la méthode de transformation polynomiale, sans être une panacée, peut apporter un surcroît de qualité et d'équité.

Transformation locale pondérée

On peut procéder comme suit : Soient $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$ les vecteurs de correction à appliquer aux coordonnées des points A, B, C... pour qu'ils soient mis dans une position jugée correcte soit $A^*, B^*, C^* \dots$ avec $\Delta A = A^* - A, \Delta B = B^* - B \dots$ Soit un point M quelconque pour lequel on veut calculer les corrections ΔM à apporter à sa position calculée après la compensation pour qu'il soit placé dans une position correcte et compatible avec celles des points d'appui. On écrit :

$$\Delta M = \frac{p_A \Delta A + p_B \Delta B + p_C \Delta C + \dots}{p_A + p_B + p_C + \dots + p_G + \dots}$$

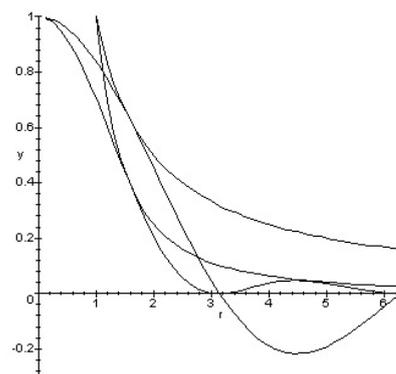
Avec les poids : p_A, p_B, p_C, \dots fonction de la position du point M par rapport aux points de base : A, B, C... et G, on verra plus loin ce qu'est ce dernier point. On adopte pour p_A une relation de la forme : $p_A = \frac{k}{(r_A + \epsilon)}$ où k est une constante qui

doit être déterminée en fonction du rayon d'action des points de base, et qu'il faudra choisir en fonction de la précision des calculs.[1]. ϵ est un petit nombre destiné à éviter des situations du genre $k/0$ si le point est très proche. On peut, par exemple poser : $\frac{k}{\epsilon} = 1$. r_A est la distance du point A au point M exprimée en unités à définir en fonction de k, n est un exposant égal à 1, 3/2, ou 2.

On peut adopter un système plus simple, soit : $p_A = 1 - \frac{r_A}{r}$ r sera défini plus loin, avec la condition supplémentaire que si $p_A = 1 - \frac{r_A}{r} < 0$ $p_A = 0$.

■ Choix de la fonction de pondération

On a reporté sur le graphique suivant les représentations qui sont proposées et qui pourraient être utilisées. On élimine d'abord les fonctions qui ne donnent pas assez de poids aux points



très voisins des points d'appui ceux dont les ordonnées sont inférieures aux autres dans le voisinage du point d'appui

$p_A = \frac{k}{(r_A^2 + \epsilon)}$ Il n'est pas non plus possible d'utiliser la fonction de transfert

$p_A = \frac{\sin(x)}{x}$ en raison de la présence de ses festons négatifs, on lui préférera la fonction

$p_A = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ qui reste positive mais qui présente aussi des festons ! On peut lui adjoindre une fonction

$p_A = \frac{1}{x^2}$ pour lisser les festons de la fonction, mais à l'usage cela paraît inutile.

Les points d'appui sont, soit uniformément répartis dans la surface à traiter, soit situés sur la périphérie de la surface des points à transformer.

On adopte pour la première partie de la courbe la fonction $p_A = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$,

à partir de $x = \frac{\pi}{2}$ en ce point l'ordonnée est égale à $p_A = \frac{4}{\pi}$.

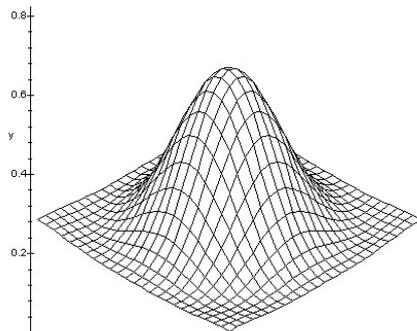
Le problème qui subsiste est de trouver une relation entre r distance du point et la variable x . On appellera cette opération étalonnage.

On se donnera une contrainte pour que la condition de nullité des résidus au centre de gravité reste respectée. D'abord, on crée un point d'appui G fictif situé exactement au centre de gravité des points d'appui, et on l'ajoute à la liste de ceux-ci, de telle sorte que les points qui lui sont proches aient, eux aussi, une correction voisine de 0. De plus, le point d'appui le plus proche de ce centre de gravité ne devra normalement pas apporter de correction significative en ce point, ou dans son voisinage, soit r_G la distance de ce point au centre de gravité des points d'appui, on pose que $p_G = 0$.

Il faut, en outre, éviter les situations de calcul imprécises ou indéterminées du type 0/0, pour cela il faut éviter les poids p trop petits et donner des instructions au programme telles que : si $x_A \geq \pi$, alors $p_A = 0$, de plus : si $p_A + p_B + p_C + \dots + p_N \leq 0,01.n$ alors $\Delta M = 0$, ces conditions sont indiquées ici en pseudo-code, avec n : nombre de points d'appuis.

Transformation polynomiale

La solution la plus généralement admise en infographie pour résoudre



Graphes de la fonction poids
Représentation 3D de la fonction poids centrée sur le point d'appui

ce problème est l'utilisation d'une transformation polynomiale quelconque, c'est-à-dire complète, mais sans redondance afin d'avoir autant d'inconnues que de données, ce qui fait qu'il n'y a plus de résidus sur les points d'appui.

On perdra tout contrôle et, évidemment, la conformité, c'est-à-dire qu'une droite transformée ne sera plus une droite. A chaque nouveau point d'appui on devra augmenter le nombre de monômes du polynôme, ce qui limitera le nombre des points d'appui que l'on pourra traiter sans rencontrer des problèmes de calcul numérique

$$X^8 = a_0 + a_1.X + a_2.Y + a_3.X.Y + a_4.Y^2 + a_5.Y^2 + a_6.X.Y^2 + a_7.X^2.Y + a_8.Y^3 + a_9.X^3 + \dots$$

$$Y^8 = b_0 + b_1.X + b_2.Y + b_3.X.Y + b_4.X^2 + b_5.Y^2 + b_6.X^2.Y + b_7.X.Y^2 + b_8.X^3 + b_9.Y^3 + \dots$$

Dans l'équation ci-dessus on s'est arrêté au troisième degré, ce qui permettrait déjà de traiter dix points d'appui, car il y a dix inconnues à déterminer, mais si on prenait des précautions de calcul rien ne s'opposerait à aller plus loin [2].

Selon les auteurs il faut également prendre la précaution d'alterner les monômes en privilégiant les termes en y lorsque l'équation est en X et en x lorsqu'elle est en Y .

On a utilisé ce procédé pour répartir les résidus du même exemple en s'arrêtant aux termes en $x.y$ puisqu'on a quatre points d'appui.

Rappelons que ce procédé a été employé, mais en se réservant une large redondance, pour adapter des photos prises à bord de satellites à des points de carte afin d'établir des topocartes, ce qui en fait un problème très voisin de celui qui nous intéresse. On a donc été très surpris de trouver des

résultats souvent aberrants. Voir le tableau des résultats en colonnes trois et quatre, de fait, les points d'appui mal répartis aux extrémités d'une bande étroite agissaient en la tordant en son milieu, là où apparaissent les corrections les plus fortes.

On a pensé corriger ce défaut en se rappelant que près du centre de gravité les résidus devraient être nuls. Pour cela, on a créé un point d'appui fictif, situé au centre de gravité ayant des résidus nuls. Le tableau indique en colonnes cinq et six les résultats. On remarquera le changement radical, et la stabilité apportée par ce point supplémentaire.

Transformation polynomiale conforme

Constatant que l'apport d'une contrainte supplémentaire introduisait plus de stabilité dans les résultats, pour lesquels le seul critère devrait être que les corrections à apporter sur les points transformés soient inférieures ou égales aux résidus constatés sur les points d'appui, on a par conséquent tenté d'introduire une contrainte supplémentaire, celle de la conformité de la figure compensée avec la figure initiale. Cette contrainte lie les corrections en x et y , alors que dans le cas précédent l'interpolation des corrections d'une des coordonnées est indépendante de celles de l'autre. Ce point est très important, car il faut éviter que la figure ne se déforme trop, loin des points d'appui, jusqu'à ne plus ressembler à la figure initiale. Autre avantage la transformée d'une droite reste une droite.

On se reportera à [1] et [2] en précisant bien qu'il ne s'agit plus de faire une compensation redondante, mais une transformation dans laquelle le nombre des inconnues est égal à celui des données et qui suivra tous les points de définition.

Rappelons, en deux mots, la clef des représentations conformes : Soit deux nombres complexes (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) leurs images forment entre elles un angle $(\theta_1 - \theta_2)$. Si on multiplie chacun d'eux par le même nombre complexe (r, θ) , les nouveaux arguments deviennent $(\theta_1 + \theta)$ et $(\theta_2 + \theta)$ et leur angle reste $(\theta_1 - \theta_2)$. On fait la même remarque pour la division.



■■■ Rappelons la formule de Moivre : $(\cos(\theta)+i.\sin(\theta))^n = \cos(n.\theta)+i.\sin(n.\theta)$. Ce qui va simplifier l'écriture par rapport à notre proposition faite en [2] : $Z = (a+i.b)$, $Z^m = (a+i.b)^m$, $Z^m = r^m.(\cos(m.\theta) + i.\sin(m.\theta))$ en simplifiant l'écriture, cette dernière formule donne le développement en puissances croissantes de ce binôme. On note d'abord : $\theta = \text{Arctg}(\frac{b}{a})$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou avec nos notations $\theta = \text{Arctg}(\frac{Y}{X})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ on développe :

$$\begin{aligned} X^{\&} &= a_0 + a_2 \cdot x - a_3 \cdot y + r^2 \cdot (a_4 \cdot \cos(2.\theta) - a_5 \cdot \sin(2.\theta)) + \dots \\ r^n \cdot (a_{2n} \cdot \cos(n.\theta) - a_{2n+1} \cdot \sin(n.\theta)) &+ \dots \\ Y^{\&} &= a_1 + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x + r^2 \cdot (a_4 \cdot \sin(2.\theta) + a_5 \cdot \cos(2.\theta)) + \dots \\ r^n \cdot (a_{2n} \cdot \sin(n.\theta) + a_{2n+1} \cdot \cos(n.\theta)) &+ \dots \end{aligned}$$

On a n points d'appui et 2.n inconnues. On peut réaliser les calculs sans développer en série par programme une seule ligne trigonométrique. En effet, on peut calculer le sinus et le cosinus de θ par la tangente y/x , puis se servir des relations d'addition des angles pour calculer progressivement $\sin(n.\theta)$ et $\cos(n.\theta)$:

$$\sin(\theta) = \frac{tg(\theta)}{\pm\sqrt{1+tg^2(\theta)}}, \cos(\theta) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2(\theta)}}$$

avec, évidemment : $\text{signe}(\sin(\theta)) = \text{signe}(y)$, $\text{signe}(\cos(\theta)) = \text{signe}(x)$ puis : $\cos(n.\theta+\theta) = \cos(n.\theta).\cos(\theta) - \sin(n.\theta).\sin(\theta)$ $\sin(n.\theta+\theta) = \sin(n.\theta).\cos(\theta) + \cos(n.\theta).\sin(\theta)$ on peut ainsi écrire les relations plus facilement qu'en développant les polynômes en x et y comme on l'avait fait dans [2].

On trouvera les résultats dans les septième et huitième colonnes du tableau des résultats ci-dessous, en notant qu'on a conservé le point d'appui fictif déjà employé au paragraphe précédent. On notera aussi que les corrections aux coordonnées compensées sont inférieures à celle du paragraphe précédent.

Interpolation radiale pondérée

Lorsque le nombre des points d'appui augmente le principal défaut des transformations polynomiales est d'entraîner des complications de calcul. Pour éviter cet obstacle, insurmontable au delà de six ou sept points d'appui, on a tenté de conserver les avantages de la répartition pondérée des résidus du début en lui donnant des développements plus complets. Selon les auteurs, cette méthode

donnerait des résultats équivalents à ceux obtenus à l'aide des développements polynomiaux, tout en évitant les problèmes de calcul numérique pour des polynômes de degré élevé.

Soit une fonction : $f(\hat{X}) = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \cdot h(\hat{X}_j - \hat{X}_i)$ dans laquelle $f(\hat{X})$ représenterait les vecteurs résidus sur les points d'appui soit : $f(\hat{X}) = \Delta \hat{a}_i$ et $\Delta \hat{a}_i = X^{\&}_i - \bar{X}_i$ avec, comme plus haut $X^{\&}_i$ coordonnées nominales de l'appui i, et \bar{X}_i coordonnées compensées du même appui. $h(\hat{X}_j - \hat{X}_i) = h_{ji}$ est une fonction de la différence des coordonnées entre les points i et j. Cette fonction est appelée fonction radiale de base (R B F) et a été largement étudiée et justifiée en [3] et [4]. Les interpolants sont des combinaisons linéaires des valeurs de la fonction radiale de base entre le point considéré et tous les points d'appui. Il sont calculés, en ne considérant au début du calcul, que les relations qui existent entre les points de définition comme dans la répartition pondérée.

En regroupant toutes les équations de ce type on obtient une matrice :

$$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} & p_1 & \Delta \hat{a}_1 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} & p_2 & \Delta \hat{a}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} & p_n & \Delta \hat{a}_n \end{matrix} = \Delta \hat{a}$$

On remarque immédiatement que cette matrice est symétrique $h_{ij} = h_{ji}$ et que sur la diagonale principale $h_{ii} = h(0)$ les différences de coordonnées étant nulles, la distance radiale est nulle. La résolution de ce système, non surabondant, permet de déterminer les inconnues que sont les "poids" \bar{p}_i , positifs ou négatifs.

La résolution d'un tel système linéaire symétrique pourrait commencer par une "descente de Cholesky" (ou décomposition LU) laquelle est, de toute évidence, impossible si les pivots de la diagonale principale sont nuls (divisions par zéro). Parmi les deux fonctions radiales proposées dans la littérature on a choisi celle qui permet une résolution du système linéaire normalisé (la matrice n'est pas définie positive) par la méthode de Cholesky, qui débute comme on vient de l'indiquer. On a choisi une fonction simple, dite "multiquadrique" de Hardy, parce

qu'elle peut s'appliquer à des espaces de plus de deux dimensions.

$$h_j = \sqrt{1 + (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

dans laquelle on aura : $h_{ii} = h(0) = 1$ On s'est ensuite largement écarté des propositions des auteurs qui réalisent, dans le même temps, un changement de base et une répartition des résidus, ce qui n'est possible que par une résolution par partition.

On a préféré, dans un premier temps, conserver les usages, qui consistent à réaliser, d'abord, une transformation conforme dite "d'Helmert" pour le premier degré, mais rien ne s'oppose à ce qu'on adopte des fonctions conformes plus compliquées : [1] et [2], puis, ensuite, une répartition des résidus, une fois que ceux-ci auront été jugés acceptables, par un examen visuel ou informatique. Les "poids" une fois déterminés, on remarque que si :

$\sum_{i=1}^n \Delta \hat{a}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \bar{p}_i = 0$, la somme des "poids" est nulle si la somme des résidus est nulle, puis on calcule en tout point du champ des points transformés les corrections à apporter aux coordonnées compensées dans la transformation initiale :

$\Delta \hat{a} = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \cdot h(\hat{X}_j - \hat{X})$ ou \bar{p}_j est le poids calculé affecté au point j, \hat{X}_j les coordonnées du point d'appui j, \hat{X} les coordonnées d'un point à transformer issu de la compensation initiale, et $\Delta \hat{a}$ les corrections à apporter à ces coordonnées. Les coordonnées définitives seront donc $\hat{X} + \Delta \hat{a}$ On notera qu'on a conservé l'habitude de créer un point d'appui fictif au centre de gravité des points d'appui en lui affectant des résidus nuls : $\Delta \hat{a}_G = \hat{Q}$ afin de stabiliser les résultats des situations particulières dans lesquelles les points d'appui sont mal répartis.

Soit H la matrice carrée symétrique composée des termes en $h(\hat{X}_j - \hat{X}_i) = h_{ji}$, son inverse sera H^{-1} , on aura $\hat{p} = H^{-1} \cdot \Delta \hat{a}$ les coordonnées des points transformés seront égales à $\Delta \hat{a} = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \cdot h(\hat{X}_j - \hat{X})$, \bar{p}_j est la ligne j de la colonne $H^{-1} \cdot \Delta \hat{a}$

Il est assez difficile de visualiser les résultats, imaginons que quatre points d'appui soient situés aux sommet d'un carré de 100 m de côté, alors H^{-1} aura la forme suivante :

-0,0072 0,0051 0,0000 0,0051
 -0,0072 0,0051 0,0000
 -0,0072 0,0051
 sym -0,0072
 avec un point d'appui fictif central
 on aurait
 -0,0079 0,0043 -0,0008 0,0043 0,0036
 -0,0079 0,0043 -0,0008 0,0036
 -0,0079 0,0043 0,0036
 -0,0079 0,0036
 sym -0,0174
 Les résultats de l'exemple destiné à illustrer ce qui vient d'être exposé sont donnés dans les deux dernières colonnes de droite du tableau des résultats.

Conclusions

A la suite de la publication de [2] on a reçu des remarques fort pertinentes concernant le sort des coordonnées des points transformés, voisins des points d'appui, lorsqu'ils affichaient de forts résidus. On a trouvé une solution à ce problème dans [1], mais, à l'usage, elle est apparue comme non satisfaisante du point de vue numérique, et on a alors recherché une solution qui serait

très différente quant aux résultats, tout en restant dans l'esprit de cette proposition. On a porté notre choix sur une fonction $p_i = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$, puis sur la fonction, $p_i = e^{-\frac{x^2}{2}}$ les graphes de ces deux fonctions étant assez comparables. Toutefois, la première fonction, privée de ses festons a été préférée sans la moindre justification théorique, d'ailleurs. Cette fonction donne le minimum de corrections sur les points transformés, et concentre ces corrections autour des points transformés proches des points d'appui.

On a essayé successivement de répartir les résidus à l'aide de polynômes quelconques, pour constater, qu'en l'état, ce n'était pas la solution lorsque les points d'appui étaient mal disposés et qu'il fallait ajouter un point d'appui fictif au centre de gravité des points d'appui "naturels" afin d'éviter des divagations de la répartition des résidus. La solution classique de l'infographie n'était donc pas valable pour la topographie ! Puis on a cherché une contrainte supplémentaire susceptible de mieux encore stabiliser la solution.

Résultats

| | Pondération | | Transf Polyno | | Transf polyn cont | | Trans Conf cont | | Interp pondérée | |
|----|-------------|-------|---------------|-------|-------------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|
| | X | Y | X | Y | X | Y | X | Y | X | Y |
| 1 | 0,97 | 1,59 | 0,97 | 1,59 | 0,97 | 1,59 | 0,97 | 1,59 | 0,97 | 1,59 |
| 2 | 0,00 | 0,00 | -9,48 | 11,75 | 2,42 | 1,19 | -0,47 | -1,35 | 0,75 | 0,46 |
| 3 | 0,00 | 0,00 | -9,56 | 11,83 | 2,46 | 1,17 | -0,61 | -1,25 | 0,75 | 0,44 |
| 4 | 0,00 | 0,00 | -9,37 | 11,48 | 2,59 | 0,83 | -1,53 | 0,20 | 0,69 | 0,34 |
| 5 | 2,23 | -0,10 | 2,23 | -0,10 | 2,23 | -0,10 | 2,23 | -0,10 | 2,23 | -0,10 |
| 6 | -0,07 | 0,28 | 0,58 | -0,10 | -0,13 | 0,11 | -0,26 | -0,63 | 0,16 | 0,25 |
| 7 | -2,77 | 0,73 | -2,77 | 0,73 | -2,77 | 0,73 | -2,77 | 0,73 | -2,77 | 0,73 |
| 8 | 0,00 | 0,00 | -12,35 | 9,67 | -1,24 | -0,47 | 0,84 | 0,05 | -0,55 | -0,33 |
| 9 | -0,43 | -2,23 | -0,43 | -2,23 | -0,43 | -2,23 | -0,43 | -2,23 | -0,43 | -2,23 |
| 10 | 0,17 | -0,59 | 0,64 | -1,51 | -0,34 | -1,18 | -0,74 | -0,91 | 0,03 | -0,97 |
| 11 | 0,26 | -0,34 | 0,99 | -0,95 | -0,14 | -0,55 | -0,62 | -0,20 | 0,28 | -0,28 |
| 12 | 0,79 | 1,29 | -4,73 | 6,03 | 0,81 | 0,68 | 1,21 | -0,65 | 0,59 | 0,59 |
| 13 | 0,80 | 1,32 | -4,88 | 7,31 | 1,62 | 1,55 | 1,71 | -0,81 | 0,84 | 0,95 |
| 14 | 0,00 | 0,00 | -6,41 | 8,67 | 1,72 | 1,40 | 1,38 | -1,28 | 0,78 | 0,76 |
| 15 | 0,00 | 0,00 | -6,34 | 8,30 | 1,48 | 1,18 | 1,30 | -1,17 | 0,71 | 0,69 |
| 16 | 0,00 | 0,00 | -7,35 | 9,10 | 1,45 | 1,02 | 1,00 | -1,32 | 0,65 | 0,56 |
| 17 | 0,00 | 0,00 | -7,40 | 8,28 | 0,80 | 0,47 | 0,93 | -1,08 | 0,46 | 0,33 |
| 18 | 0,72 | 1,18 | -5,38 | 6,58 | 0,81 | 0,62 | 1,18 | -0,79 | 0,56 | 0,52 |
| 19 | 0,79 | 1,30 | -4,60 | 5,99 | 0,81 | 0,68 | 1,21 | -0,64 | 0,59 | 0,60 |
| 20 | 0,72 | 1,19 | -5,47 | 7,52 | 1,42 | 1,25 | 1,47 | -0,95 | 0,75 | 0,79 |
| 21 | 0,00 | 0,00 | -9,72 | 11,08 | 1,71 | 0,59 | -0,99 | -0,01 | 0,48 | 0,27 |
| 22 | 0,00 | 0,00 | -9,06 | 10,87 | 2,27 | 0,64 | -1,46 | 0,66 | 0,59 | 0,30 |
| 23 | 0,00 | 0,00 | -9,13 | 10,12 | 1,36 | 0,37 | -1,08 | 0,88 | 0,30 | 0,24 |
| 24 | 0,00 | 0,00 | -9,94 | 10,47 | 0,90 | 0,30 | -0,69 | 0,31 | 0,22 | 0,18 |
| 25 | 0,00 | 0,00 | -10,03 | 8,93 | -0,67 | 0,06 | -0,39 | 1,31 | -0,54 | 0,13 |
| 26 | 0,00 | 0,00 | -9,31 | 8,52 | -0,46 | 0,10 | -0,57 | 1,46 | -0,49 | 0,18 |
| 27 | 0,00 | 0,00 | -8,41 | 7,96 | -0,22 | 0,13 | -0,71 | 1,60 | -0,43 | 0,23 |
| 28 | 0,00 | 0,00 | -8,55 | 7,53 | -0,81 | 0,14 | -0,64 | 1,71 | -0,74 | 0,24 |
| 29 | 0,00 | 0,00 | -9,52 | 8,16 | -1,01 | 0,11 | -0,47 | 1,62 | -0,78 | 0,18 |
| 30 | 0,00 | 0,00 | -10,31 | 8,63 | -1,18 | 0,07 | -0,28 | 1,51 | -0,81 | 0,12 |

On a essayé une fonction polynomiale conforme, tout en conservant le point d'appui fictif, ce qui a encore réduit l'importance des résidus à répartir, mais a entraîné des problèmes de calculs numériques si le nombre des points d'appui est grand.

Enfin, on a recherché une solution à ce dernier problème, car il apparaissait difficile de traiter plus de dix points d'appui en augmentant, indéfiniment, le degré des polynômes. On a donc adapté une méthode dans laquelle les interpolants sont des combinaisons linéaires des valeurs d'une fonction radiale de base entre le point considéré et tous les points d'appui, c'est-à-dire un compromis entre la première méthode décrite et les autres. Autre avantage, le calcul commence par une traditionnelle transformation conforme du premier degré dite de Helmert, puis se poursuit par une répartition des résidus dans le champ des points transformés. ●

Références

- [1] 1995 - J.J Levallois : *Représentations conformes et adaptations* in XYZ N°64, 3^e trimestre
- [2] 2002 - C. Million : *L'application d'un système de coordonnées dans un autre référentiel* in XYZ N°90, 1^{er} trimestre.
- [3] 2002 - Francis J Narcowich - *Notes on Scattered Data Radial Function Interpolation* - Internet .
- [4] 2004 -Greg Turk, James F O'Brien - *Shape Transformation Using Variational Implicit Functions* - Internet

ABSTRACT

After the application of points from a frame to an other frame, if the system is overdetermined it remains, on the control points on which the transformation is based, some residuals of the adjustment. If we assume that the positions of these control points are true, the positions of the transformed points, which lie in their immediate neighbourhood shows some discrepancies which could not be acceptable, the residuals of the control points being not shared by all the others points of the net. We developed a repartition method saving all the benefits of the adjustment.