

# L'application d'un système de coordonnées dans un autre référentiel

*Il arrive qu'on soit amené à calculer un ensemble d'observations dans un système de géodésique, et que par la suite on soit obligé de transformer les coordonnées du ou des canevas dans un autre système. Ce problème se traitait, jadis, sous la forme la plus simple d'un changement de base. L'arrivée de l'informatique a permis des raffinements plus poussés et plus savants ; mais, comme on va le montrer, ceux-ci ont des limites matérielles qu'il faut connaître.*

**S**ous sa forme la plus simple ce problème se posait lorsqu'un client demandait que les longueurs ne soit pas réduites au géoïde pour les chantiers en altitude car il voulait obtenir, sans difficulté, et directement les distances réelles. Par la suite, on était amené à recalculer le canevas dans un système officiel pour satisfaire aux obligations légales. On pouvait aussi faire un changement d'échelle pour recalculer les coordonnées. Ceci se produit encore tous les jours, même à l'étranger, et l'usage de l'ellipsoïde GRS80 va encore multiplier les cas de ce genre<sup>(1)</sup>, plus fréquents en topographie qu'on ne l'imagine dans les milieux officiels.

Sous sa forme plus raffinée, le problème s'est souvent posé dans des pays lointains à des topographes qui devaient recueillir des données sur le système géodésique local, dont, souvent, même le nom était oublié de tous, et surtout de ceux qui auraient dû le savoir, voir un exemple dans [1]. Cela s'est produit, notamment, au lendemain des indépendances, pour des sociétés étrangères travaillant dans des territoires plus ou moins récemment ne dépendants plus que d'eux-mêmes, qui ignoraient qu'il aurait été préférable de s'adresser à l'ancien colonisateur plutôt que sur place. Bref, comme dans la majorité des cas on était amené à commencer les opérations sans avoir de réponse, il fallait traiter les observations, ne serait-ce que pour se contrôler, dans un système de référence "provisoire". Le temps s'écoulant, le système de référence de provisoire pouvait devenir de plus en plus définitif. A la livraison du travail, le problème se posait alors de tout réincorporer dans un système officiel.

Souvent, un autre problème se posait, celui du choix du système provisoire à adopter. Toutes les possibilités pouvaient être envisagées, depuis le calcul en coordonnées planes

locales, ce ne permet pas d'aller très loin, jusqu'à l'usage de la projection stéréographique, ou les coordonnées géographiques, plus faciles à utiliser qu'on ne le pense, ou localement sphériques. Les topographes de terrain se plaignaient que des géodésiens ne se soient pas réellement penchés sur ce problème. Ce qui est injuste, simplement on ne leur avait pas enseigné les solutions.

Quand on utilise une projection conforme telle que la projection stéréographique, ce qui est, à notre sens, avec les coordonnées géographiques la meilleure solution, il faut, ensuite, la transformer dans la projection conforme imposée par le client.

Pour réaliser ce travail on dispose des transformations polynomiales, plutôt que de simples changements de base<sup>(2)</sup>. A l'aide de ces transformations polynomiales on peut déformer à loisir une image pour en faire tout autre chose. C'est pourquoi il faut s'imposer des contraintes, sinon on ferait n'importe quoi. La plus courante des contraintes est que la transformation soit conforme, c'est-à-dire qu'elle respecte les angles de la figure transformée. C'est cette famille de transformations qu'on va développer.

## Transformations polynomiales conformes

L'usage des nombres imaginaires est à la base de l'établissement des projections conformes, voir notamment [2].

Si on note par des majuscules les coordonnées X, Y du plan dans lequel on voudra incorporer un autre système conforme de coordonnées notées en minuscules x, y, la formule de transformation la plus générale est :  $X = f(x, y)$  ;  $Y = g(x, y)$  ou, pour une transformation conforme, à :  $Z = h(x + i.y)$ , avec  $Z = X + i.Y$ .

Une transformation polynomiale générale est de la forme :

$$X = a_0 + a_1.x + a_2.y + a_3.x.y + a_4.x^2 + a_5.y^2 + a_6.x^2.y + a_7.x.y^2 + a_8.x^3 + a_9.y^3 + \dots$$

$$Y = a_{10} + a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.x.y + a_{14}.x^2 + a_{15}.y^2 + a_{16}.x^2.y + a_{17}.x.y^2 + a_{18}.x^3 + a_{19}.y^3 + \dots$$

Evidemment, on se limite le plus souvent aux termes du premier ou du second degré, ce qui impose, au minimum, trois points d'appui dans le premier cas et six points dans le second. Mais, de telles transformations peuvent imposer des déformations inadmissibles si on ne les "bride pas". Une transformation conforme donnerait :

$$Z = (a_0 + i.a_1) + (a_2 + i.a_3) \cdot (x + i.y) + (a_4 + i.a_5) \cdot (x + i.y)^2 + (a_6 + i.a_7) \cdot (x + i.y)^3 + (a_8 + i.a_9) \cdot (x + i.y)^4 + \dots$$

Ceci réduit la transformation polynomiale générale en :

$$X = a_0 + a_2.x - a_3.y + a_4.(x^2 - y^2) - 2a_5.x.y + a_6.(x^3 - 3x.y^2) + a_7.(y^3 - 3.x^2.y) \dots$$

$$Y = a_1 + a_2.y + a_3.x + 2.a_4.x.y + a_5.(x^2 - y^2) - a_6.(y^3 - 3x^2.y) + a_7.(x^3 - 3.x.y^2) \dots$$

Au premier degré cette transformation n'impose qu'un minimum de deux points d'appui, trois points d'appui au second degré, et quatre au troisième degré. Rappelons qu'au troisième degré la transformation polynomiale générale imposait la présence de dix points d'appui au minimum, et cette surabondance de points d'appuis n'avait d'autre effet que d'introduire des déformations des angles. Cet effet pervers était obscurci par l'apparence rationnelle et élégante de la formulation, il n'existe plus dans la transformation conforme. Mais, l'échelle et l'angle de rotation varient en fonction des coordonnées.

Il y a donc un double avantage à l'utilisation des transformations conformes pour l'incorporation de réseaux indépendants dans des réseaux généraux : moins de points d'appuis requis, et pas de déformations angulaires introduites et une variation d'échelle uniforme, c'est-à-dire sans direction privilégiée (l'homologue d'un petit cercle reste un petit cercle).

## Ce que l'on fait réellement en utilisant l'une ou l'autre de ces formulations

En se cantonnant à une simple explication des relations du premier degré, on peut comparer ce que l'on fait réellement en utilisant l'une ou l'autre de ces formulations. On notera encore en majuscules (X, Y) les coordonnées des points d'appui et en minuscules (x, y) les coordonnées des points homologues du réseau à appliquer.

La formule la plus générale donne au premier degré :

$$X = a_0 + a_2.x + a_4.y \quad \text{les premiers termes}$$

$$Y = a_1 + a_3.x + a_5.y$$

$a_0$  et  $a_1$  représentent des translations de l'origine, et les termes suivants une rotation, et deux mise à l'échelle dans des sens perpendiculaires.

Si on pose "

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta X}{\delta x} & \frac{\delta X}{\delta y} \\ \frac{\delta Y}{\delta x} & \frac{\delta Y}{\delta y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_3 & a_5 \end{vmatrix} = A$$

A est un tenseur d'ordre 2, qui se décompose en une partie symétrique et une partie antisymétrique, voir [3], on démontre que  $\frac{A + A^T}{2}$  est une matrice symétrique représentant

un tenseur de déformation. En revanche  $\frac{A - A^T}{2}$

**Il y a donc un double avantage à l'utilisation des transformations conformes pour l'incorporation de réseaux indépendants dans des réseaux généraux : moins de points d'appuis requis, et pas de déformations angulaires introduites et une variation d'échelle uniforme, c'est-à-dire sans direction privilégiée (l'homologue d'un petit cercle reste un petit cercle).**

est une matrice antisymétrique indiquant une rotation d'ensemble. La matrice A est la somme de ces deux matrices, l'une de déformation l'autre de rotation, et représente la somme de ces deux types de déformations. En outre, les deux valeurs propres du tenseur de déformation  $\frac{A + A^T}{2}$  représentent les coefficients d'échelle  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dont les directions principales sont définies par

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{a_3 + a_4}{a_2 - a_5} = \tan(2, \alpha) \text{ et par la direction qui lui est}$$

perpendiculaire. La matrice représente donc une rotation de changement de base :

$$X = Tx + x.\cos(\theta) - y.\sin(\theta),$$

$$Y = Ty + x.\sin(\theta) - y.\cos(\theta),$$

et deux distorsions d'échelle  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , suivant la direction  $\alpha$ , et celle qui lui est perpendiculaire. Après une telle transformation, un cercle devient une ellipse et les angles sont altérés. Les paramètres cachés de cette transformation sont, en dehors de  $T_x$ , et  $T_y$ , dont l'interprétation est évidente, la rotation  $\theta = \frac{a_4 - a_3}{2}$  si cette quantité est petite, la direction  $\alpha$ , les coefficients d'échelle  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , soit six coefficients dont au moins quatre sont assez obscurs.

Dans la similitude, qui est conforme, on a une rotation et un coefficient d'échelle faciles à calculer,

$$\text{tg}(\theta) = \frac{a_3}{a_2} \text{ et } \lambda^2 = a_2^2 + a_3^2$$

en y ajoutant les deux translations  $a_0$  et  $a_1$  assimilées à  $T_x$  et  $T_y$ , on retrouve les quatre coefficients à déterminer. Le fait qu'il n'y ait qu'un seul coefficient d'échelle fait que la transformation est conforme.

Pour les transformations de degré plus élevé, et notamment pour le troisième degré, il est facile de vérifier, en formant les tenseurs de déformation et de rotation, que cette transformation reste bien conforme.

## Résolution

La transformation conforme du premier degré est un des rares problèmes dont la solution des moindres carrés ne

■ ■ ■ demande aucune résolution d'un système de relations linéaires. On montre, en effet, que la matrice normale étant la suivante :

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} n & \sum x & -\sum y & 0 \\ \sum x & \sum d^2 & 0 & \sum y \\ -\sum y & 0 & \sum d^2 & \sum x \\ 0 & 0 & \sum y & n \end{bmatrix}, \text{ étant entendu que les sommes } \Sigma \text{ sont étendues à tous les points soit } n \text{ fois, et que } \sum d^2 = \sum x^2 = \sum y^2 \text{ est le moment d'inertie polaire des points d'appui. Et qu'on a aussi:}$$

$$A^T \cdot L = \begin{bmatrix} \sum X \\ \sum x \cdot X + \sum y \cdot Y \\ \sum x \cdot Y - \sum y \cdot X \\ \sum Y \end{bmatrix}, \text{ avec } L = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

On remarque, alors, immédiatement, que si on rapporte les coordonnées aux centres de gravités des points d'appuis et de leurs homologues du réseau à appliquer, l'inverse de la matrice normale prend une forme extrêmement simple :

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sum d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sum d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \text{ et } A^T \cdot L = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum x \cdot X + \sum y \cdot Y \\ \sum x \cdot Y - \sum y \cdot X \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum x \cdot X + \sum y \cdot Y) / \sum d^2 \\ (\sum x \cdot Y - \sum y \cdot X) / \sum d^2 \end{bmatrix} \text{ Donc, pas de calcul ni de résolution matriciels à faire. Bien entendu il n'en va pas de même pour la transformation cubique.}$$

## Logiciels

On a établi des logiciels pour les deux transformations. Pour les réseaux peu étendus le premier degré suffit. Pour des réseaux importants ce n'est plus le cas. Mais alors un autre problème se pose.

En effet, au moment de la normalisation on doit multiplier par eux-mêmes, des termes qui représentent le cube des coordonnées, qui même réduites à leur centre de gravité, représentent des nombres grands, exemple : à partir de 100 Km soit  $10^5$  mètres, dont le cube est déjà de  $10^{15}$  à multiplier par lui-même soit  $10^{30}$ , on dépasse les possibilités d'un ordinateur de bureau qui sont de 18 ou 19 chiffres significatifs. Par ailleurs, la matrice normale serait numériquement<sup>3</sup> très mal conditionnée, on trouverait sur la diagonale principale des nombres aussi disparates que n, nombre des points d'appui, et  $10^{30}$  ! Pour résoudre ce problème on se reportera à la solution du problème du premier degré.

Si on exprime les longueurs x, y et X, Y, par des nombres sans dimension, en adoptant pour unité de longueur le rayon moyen de giration des points d'appui, on obtient des coordonnées réduites  $x' = \frac{x}{r_{mg}}, y' = \frac{y}{r_{mg}}, X' = \frac{X}{r_{mg}}, Y' = \frac{Y}{r_{mg}}$

$$\text{données réduites } x' = \frac{x}{r_{mg}}, y' = \frac{y}{r_{mg}}, X' = \frac{X}{r_{mg}}, Y' = \frac{Y}{r_{mg}}$$

$r_{mg}$  = moment d'inertie polaire de tous les points d'appui/nombre de points d'appui. L'inverse de la matrice normale prend une forme très simple :  $N^{-1} = \frac{1}{n} \cdot I$

I étant la matrice identité, les solutions seraient :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum x' \cdot X' + \sum y' \cdot Y') / n \\ (\sum x' \cdot Y' - \sum y' \cdot X') / n \end{bmatrix} \text{ Formule encore plus simple !}$$

Ce moyen, qui est loin d'être le seul possible, rend le système plus équilibré quelles que soient les unités adoptées. Il évite ainsi de calculer des coordonnées en utilisant des différences d'expressions du type :  $0 \times \infty$

L'échelle et la rotation sont variables et fonction des coordonnées réduites, mais, au centre de gravité, elles ont la même expression que dans la transformation du premier degré. Ce qui permet de vérifier le travail. En effet, dans la pratique, une échelle trop différente de l'unité (1) et une rotation trop différente de zéro (0) sont, sauf cas très particuliers, des indices de fautes dans le réseau des points d'appui. On cherche à obtenir un système qui reflète à peu près les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum x' \cdot X' + \sum y' \cdot Y') / n \\ (\sum x' \cdot Y' - \sum y' \cdot X') / n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Stabilisation en présence de points faux

En présence de points faux, il devient très intéressant de pouvoir les détecter, mais cela est très rarement facile, surtout si les points d'appui sont peu nombreux. On peut utiliser, mais avec d'innombrables précautions, l'artifice suivant :

On ajoute au système linéaire deux équations dites de stabilisation, mais on doit leur donner un poids, et donner aussi un poids relatif aux relations d'observations des coordonnées des points. On écrit les "relations d'observation" suivantes :  $a_1 = 1, a_3 = 0$ , avec des écarts-types a priori de 0,20 pour le premier et de 0,03 (environ 2 grades pour le second, ce sont eux-mêmes des nombres sans dimension, ils n'ont pas besoin d'être réduits comme les écart-types a priori des coordonnées réduites  $x', y', X', Y'$ . Ces derniers écarts types sont tous des cas d'espèces, il faut savoir a priori quelles seront les erreurs moyennes quadratiques d'une compensation, en notant que si on leur donne trop de poids les équations de stabilisation ne seront d'aucune aide, dans le cas contraire elles deviendront prépondérantes. Il est probable qu'on devra faire quelques essais en donnant aux coordonnées des points des poids assez faibles, par exemple des écart-types de 10 mètres, à réduire en fonction de la valeur du rayon de giration, soit

$$\sigma_0 = \frac{10}{r_{mg}}$$

, attention, sur des réseaux très grands, le rayon de giration peut atteindre 100 Km, cela fait

$$\sigma_0 = \frac{10}{100\,000} = \frac{1}{10\,000}$$

Tout dépend de la distance des points d'appui entre eux.

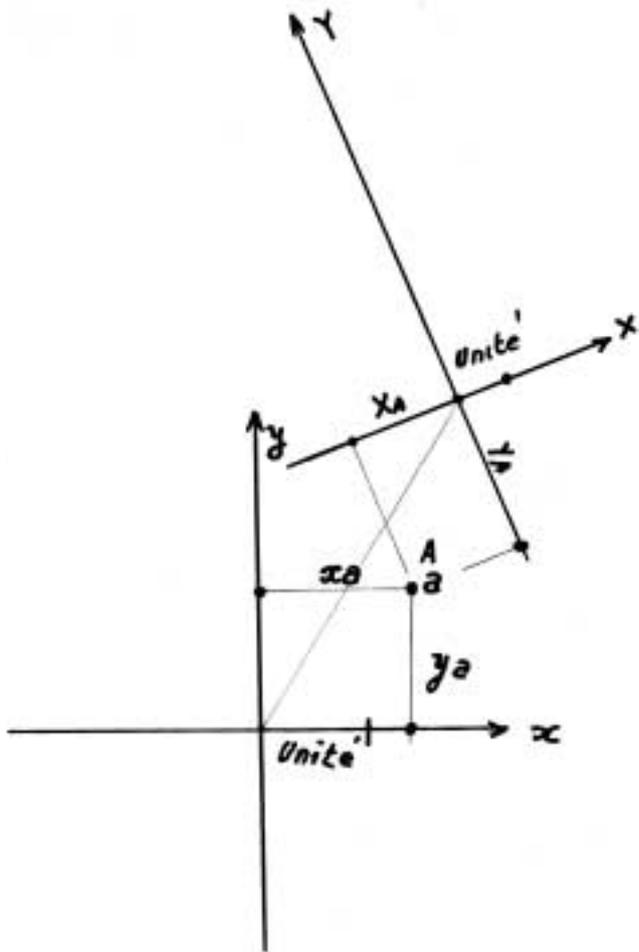


figure Soit deux systèmes de référence conformes distincts possédant des points communs tels que A dans le système cible et a dans le système de départ. Sur les axes X ou x on a indiqué l'unité de mesure. On veut calculer, directement, les coordonnées dans le système de A d'un autre point pour lesquelles elles ne sont connues que dans le système de a

## Conclusions

Les logiciels, avec des notices d'emploi en ".doc", sont mis à la disposition des lecteurs intéressés sur le site de l'auteur et sur celui de la Revue. Des raffinements, tels que la possibilité de "désactiver" des points douteux y ont été apportés. La prise en compte des équations de stabilisation<sup>4</sup> pourra être ajoutée si l'intérêt s'en manifeste.

On a fait des emprunts dans tout le fond commun, et notamment à une brochure interne à l'IGN due au professeur regretté qu'a été pour nous J-J. Levallois, laquelle a été perdue ainsi que sa référence exacte. C'est donc uniquement de mémoire que des emprunts ont été faits. ●

CLAUDE MILLION

- (1) Récemment l'Australie.
- (2) Transformation qu'on attribue à Helmert
- (3) Souligné pour les puristes, exclusivement.
- (4) Appelées aussi équations d'information

## Contacts

perso.wanadoo.fr/claude.million/

## Annexe

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{a_3 + 2.a_4.y + 2.a_5.x + 6.a_6.x.y + 3.a_7.(x^2 - y^2)}{a_2 + 2.a_4.x - 2.a_5.y + 3.a_6.(x^2 - y^2) - 6.a_7.x.y}$$

$$\text{et } \lambda^2 = (a_3 + 2.a_4.y + 2.a_5.x + 6.a_6.x.y + 3.a_7.(x^2 - y^2))^2 + (a_2 + 2.a_4.x - 2.a_5.y + 3.a_6.(x^2 - y^2) - 6.a_7.x.y)^2$$

## Références

- [1] 1991 - Isabelle Veillet - *Triangulation Spatiale d'images SPOT*. Thèse de Doctorat de l'Observatoire de Paris- ENSG, IGN.
- [2] 1970 - J-J Levallois - *Géodésie générale*. IGN
- [3] 1969 - L. E Malvern - *Introduction to the Mechanics of a Medium*, Prentice-Hall, Englewood-Cliff N.J.
- [4] 1990 - D. Maillard - *Procédés de mise en évidence des déplacements de terrain*, I G N.
- [5] 1990 - K.L Feigl, R.W. King, T.H. Jordan - *Geodetic Measurements of Tectonic Deformation in Santa Maria Fold and Thrust Belt, California*, Journal of Geophysical Research. 95 2679-2699.
- [6] 1997 - G. Ferhat - *Etude des déformations actuelles dans les Alpes du Sud à partir de la comparaison de réseaux de triangulation classiques et satellitaires GPS* - Thèse de doctorat de l'Université de Toulouse III.

Les colonnes de cette revue sont à la disposition de tous, adhérent ou non, pour toutes publications d'articles, de communications, d'annonces, d'informations en rapport avec la profession et après accord du comité de rédaction. N'hésitez pas, ces pages sont à la topographie.

### REPertoire DES ANNONCEURS - N° 90

AERIAL	4	ECOLE CHEZ SOI	80	SOFT COSTRUCT	78
AERIAL	80	GÉO MEDIA	3° couv.	TOPO CENTER	4° de couv.
AEROSCAN	14	GEOEVENEMENT	11	TRIMBLE/SPECTRA	1
BIRP-MICAD	38	LEICA	2		
DIEUTEGARD	2° couv.	PENTAX	6		
ENSG	13	REIS STOLZEL	78		