Le développement du de la géodésique

On remarque que le développement du vecteur GPS le long de l'ellipsoïde souffre toujours du manque de précision du calcul du rayon de courbure [1]. Pour bien faire il faudrait aller jusqu'à calculer ce rayon points par points.
C'est ce qu'on a tenté de faire pour apprécier la précision des différentes méthodes de calcul utilisées. On a alors remarqué qu'il existait aussi une méthode de calcul du «problème direct» qui utilisait la même méthode [2], d'où l'idée de l'utiliser conjointement avec le calcul précis du rayon de courbure en chaque point.
L'idée de base de cette méthode est fort simple : il s'agit de se servir de l'ordinateur de bureau comme d'un intégrateur, ce que j'avais fait déjà pour calculer les points d'une clothoïde ou d'une spirade [3] en accumulant l'intégrale de Fresnel ou de la formule intégrale de la spirade point par point.

Le développement

a est le grand axe de l'ellipsoïde de référence et b son petit axe. Rappelons que, si on veut travailler plus près du géoïde, comme on le recommande aux géomètres et topographes soucieux de ne pas introduire une erreur d'échelle dans leurs levés, on doit faire

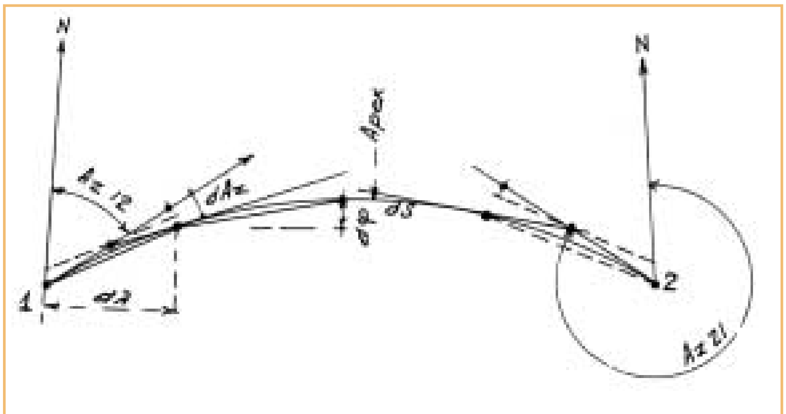
$$a' = a + h_g \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{1 - e^2}, \quad b' = b + h_g \cdot (1 - e^2 \sin^2(\varphi)),$$

dans le cas contraire $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$. avec h_g hauteur du géoide, φ latitude, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

La courbure du méridien, en un point, est $\rho = \frac{c'}{V^3}$ avec :

$c' = \frac{a'^2}{b'}$ Rayon au pole, $V = \sqrt{1 + e'^2 . \cos^2\varphi}$, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

la grande normale est : $N = \frac{c'}{V}$



Le triangle géodésique montre les trois cotés du triangle rectangle : l'hypoténuse dS, les deux côtés de l'angle droit, en direction N-S : $\rho . d\varphi$, sens des latitudes, dans les sens O-E : $N.\cos(\varphi).d\lambda$ sens des longitudes. L'angle 3- 1- 2 entre le nord 1-3 et la direction 1-2 est l'azimut 1-2 $Az_{1\to 2}$

Tout au long de la géodésique on a la relation de Clairaut : C, est constante tout au long de la géodésique, de cette propriété on tire:

$$\sin(Az) = \frac{C}{N.\cos(\varphi)} = \frac{V.C}{c.\cos(\varphi)} = \frac{\sqrt{1 + e'^2 . \cos^2(\varphi)}.C}{c.\cos(\varphi)}$$

Comme N n'est fonction que de la latitude φ on peut calculer Az de point en point, l'azimut de la direction de la géodésique en un point de la géodésique, on a les deux relations

$$dS . \cos(Az) = \rho . d\varphi \quad d\varphi = \frac{dS.\cos(Az)}{\rho}$$

$$dS.\sin(Az) = N.\cos(\varphi).d\lambda \quad d\lambda = \frac{dS.\sin(Az)}{N.\cos(\varphi)}$$

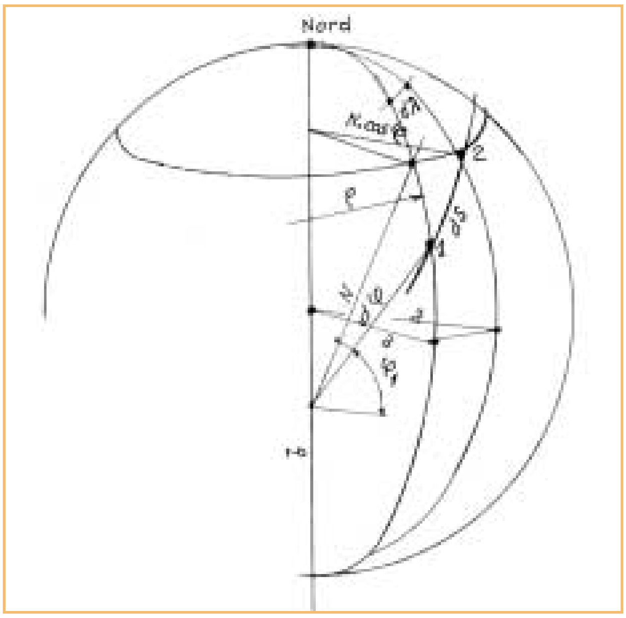
Il suffit d'accumuler $d\varphi$ et $d\lambda$: $\varphi_2 = \varphi_1 + \sum d\varphi$, $\lambda_2 = \lambda_1 + \sum d\lambda$

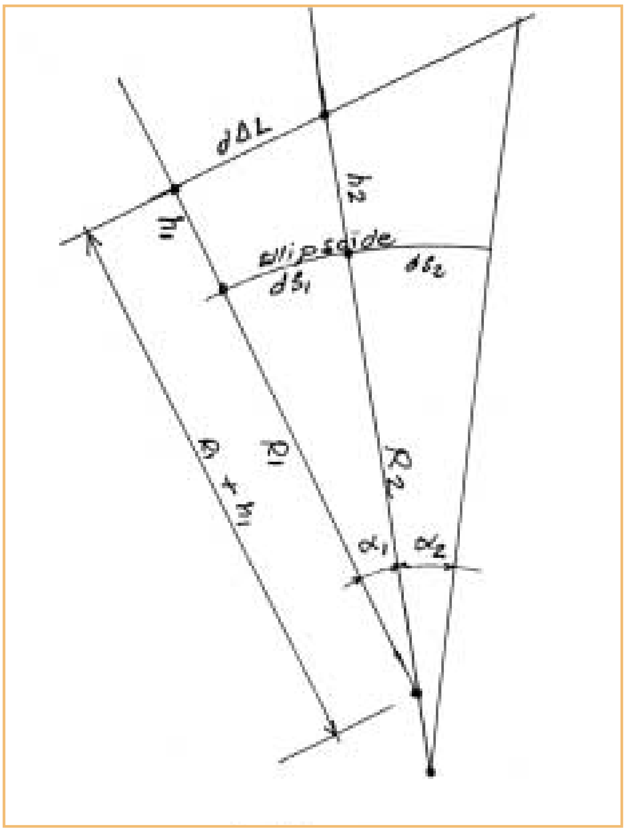
A l'origine de la géodésique on calcule la constante de Clairaut C, puis au premier point intermédiaire, on recalcule alors Az à l'aide de C, constante de Clairaut, puis à l'aide de φ_i on calcule successivement : V_i, N_i, et ρ_i . Dans ces relations, e' et c' sont des constantes de l'ellipsoïde et ne varient pas.

La distance rectiligne ΔL est d'abord divisée en tronçons égaux d'environ 100 mètres on pose :

vecteur DGPS le long

Claude Million





n = entier ($\frac{\Delta L}{100}$), puis $d\Delta L = \frac{\Delta L}{n}$, ensuite on calcule le côté suivant noté Rph:

$(R_{i+1} + h_{i+1})^2 = (R_i + h_i)^2 + d\Delta L^2 + 2.(R_i + h_i).d\Delta L.cos(Z_{i \rightarrow i+1}) = Rph^2$

L'arc $\alpha_{i \rightarrow i+1}$ est calculé de la manière suivante

$$\alpha_{i \rightarrow i+1} = \text{Arc sin}\left(\frac{d\Delta L.\sin(Z_{i \rightarrow i+1})}{Rph}\right)$$

Rappelons que l'arc sinus est ambigu car $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ et qu'il y aurait lieu de prendre des précautions sérieuses si l'angle était grand, or il est très petit.

Ri, i+ 1, valable dans l'intervalle i, i+ 1, sera calculé à l'aide de la formule d'Euler:

$$R_{i \rightarrow i+1} = \frac{N_i}{\frac{N_i \cos^2(Az_{i \rightarrow i+1}) + \sin^2(Az_{i \rightarrow i+1})}{\rho_i}}$$

La distance zénithale Z le long de la droite est calculée, point par point, de la manière suivante $Z_{i \rightarrow i+1} = Z_{i-1 \rightarrow i} - \alpha_i$

Malheureusement, cette manière de faire qui donne de bon résultats tombe en défaut quand l'azimut est un peu inférieur à $\frac{\pi}{2}$. En effet, dans la constante de Clairaut, l'azimut intervient par son sinus $C = N.\cos(\varphi).\sin(Az_{i \rightarrow i+1})$.

Quand on recalcule l'azimut à partir de la constante de Clairaut C on ne connaît, par conséquent, que le sinus de l'angle.

Or, $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, on doit donc retenir les signes du sinus et du cosinus avant d'entrer dans les calculs pour lever cette indétermination. Mais, cette méthode tombe en défaut si au cours du calcul point par point on dépasse l'apex (le point le plus au Nord ou au Sud de la géodésique), en ce point $Az = \frac{\pi}{2}$, et les signes de sin(Az) et de cos(Az) changent.

D'où le risque de grossières erreurs indétectables, sauf à stopper le programme lorsque cela survient.

On a donc modifié la méthode de Kivioja **[2]** en remarquant que tout au long de la géodésique on a : $dAz = d\lambda.\sin(\varphi)$, On a donc abandonné la constante de Clairaut C, pour calculer l'azimut en formant les sommes successives : $Az \leftarrow Az + dAz$. Ainsi on ne perd pas le quadrant de calcul.

Logiciel

On donne le logiciel Fokimi *« in extenso »*, en pseudo-code.

Constantes a, b, e^2, e'^2, h_g

Données λ_1, φ_1, $h_{e,1}$, ΔX, ΔY, ΔZ

Début

$$a' = a' = a + h_g.\frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{1 - e^2} \quad b' = b + h_g.(1 - e^2 \sin^2(\varphi))$$

Passage à un ellipsoïde plus proche du géoïde. Ceci peut être éludé bien sûr.

$$c' = \frac{a'^2}{b'}$$

$$\Delta L_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

$$Az_{1\to 2} = \text{Arctg}\left(\frac{\Delta Y.\cos(\lambda) - \Delta X.\sin(\lambda)}{\Delta Z.\cos(\varphi) - \Delta Y.\sin(\varphi).\sin(\lambda) - \Delta X.\sin(\varphi).\cos(\lambda)}\right)$$ [4]

$$Z_{1\to 2} = \text{Arc cos}\left(\frac{\Delta X.\cos(\varphi).\cos(\lambda) + \Delta Y.\cos(\varphi).\sin(\lambda) + \Delta Z.\sin(\varphi)}{\Delta L}\right)$$

Prendre des précautions, d'autant qu'on est au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ pour cela on utilise la cotangente de l'arc qui est continue au voisinage de cette valeur, puis la fonction informatique arctan2(X,Y) en plaçant le numérateur en Y et le dénominateur en X. On obtient directement l'arc recherché.

$$N = \frac{c'}{V} \qquad \rho = \frac{c'}{V^3}$$

$$R = \frac{N}{\frac{N}{\rho}.\cos^2(Az) + \text{Sin}^2(Az)}$$

$$h_e \leftarrow h_e + h_g \qquad Rph = R + h_e$$

$$n = \text{entier}\left(\frac{\Delta L}{100}\right) \qquad d\Delta L = \frac{\Delta L}{n} \qquad i = 1 \qquad \Delta S = 0$$

<u>Faire</u>

$$V_i = \sqrt{1 + e'^2 . \cos^2\varphi_i}$$

$\rho_i = \frac{c'}{V_i^3}$ Rayon du méridien en ce point

$N_i = \frac{c'}{V_i}$ Grande normale

$$Rph_{i+1}^2 = (R_i + h_i)^2 + d\Delta L^2 + 2.(R_i + h_i).d\Delta L.\cos(Z_{i\to i+1})$$

Côté du triangle

$$R_{i+1} = \frac{N_{i+1}}{\frac{N_{i+1}}{\rho_{i+1}} \cos^2(Az_i) + \text{Sin}^2(Az_i)}$$

Formule d'Euler du rayon de courbure en un point

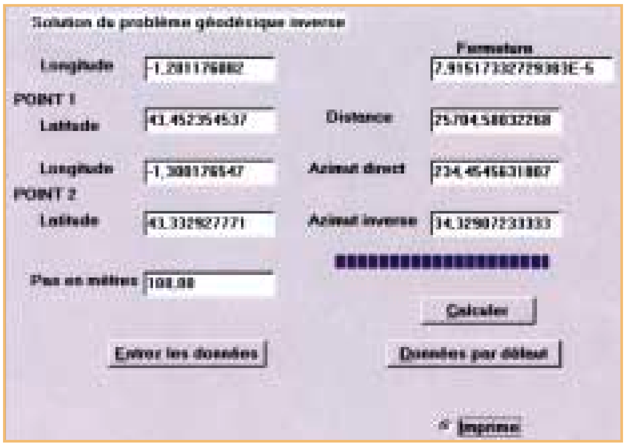
$h_{e,\,i+1} = Rph_{i+1} - R_i$ voir la figure $Rph_{i+1} \leftarrow h_{e,\,i+1} + R_{i+1}$

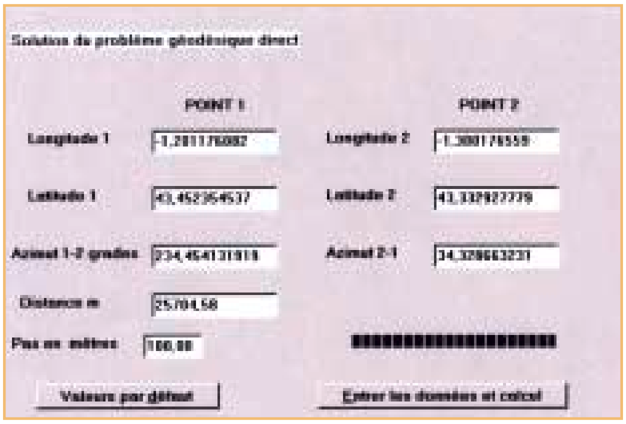
$$\alpha_{i\to i+1} = \text{Arc sin}\left(\frac{d\Delta L.\sin(Z_{i\to i+1})}{Rph_{i+1}}\right)$$

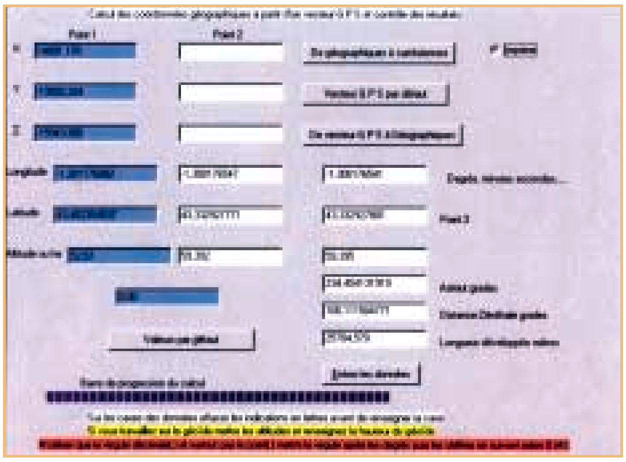
Pas ambigu si l'angle est petit, ce qui est le cas.

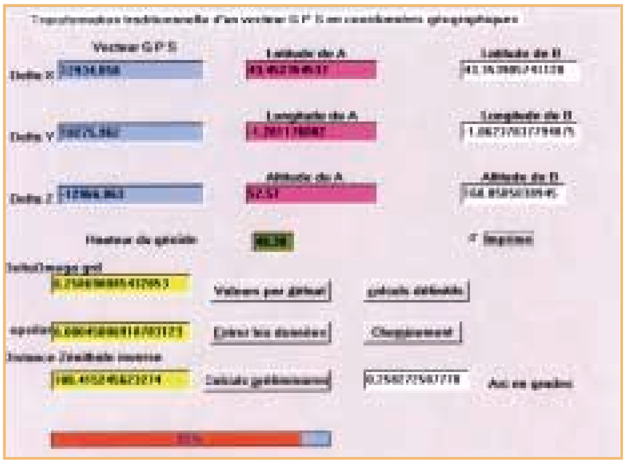
$$dS_{i\to i+1} = R_i.\,\alpha_{i\to i+1}, \quad \Delta S = \sum dS$$

$$d\varphi_{i\to i+1} = \frac{dS_{i\to i+1}.\cos(Az_{i\to i+1})}{\rho_i}$$









$$d\lambda_{i\to i+1} = \frac{dS_{i\to i+1} \cdot \sin(Az_{i\to i+1})}{N_i \cdot \cos(\varphi_i)}$$

$$\lambda_{i+1} \leftarrow \lambda_i + \sum d\lambda_{i\to i+1}$$

$$\varphi_{i+1} \leftarrow \varphi_i + \sum d\varphi_{i\to i+1}$$

$$dAz = d\lambda \,.\, \sin(\varphi)$$

$$Az \leftarrow Az + dAz$$

$$Z_{i\to i+1} = Z_{i\to i+1} - \alpha_i$$

$$i \leftarrow i + 1$$

<u>Jusqu'à ce que</u> (i>n)

$$\lambda_2 \leftarrow \lambda_{i+1}$$

$$\varphi_2 \leftarrow \varphi_{i+1}$$

$$h_{e,2} \leftarrow h_{e,i+1}$$

Détail du calcul

Le calcul des différents points de la géodésique se fait non pas par les tangentes externes à la courbe, mais par les sécantes internes. Voir la figure. Pour cela il faut calculer, en premier, un point approché situé au milieu de chaque segment, à l'aide de l'azimut au point précédent, et c'est seulement en ce dernier point que sera estimé l'azimut qui permettra de calculer le point suivant. Afin de permettre un contrôle, on a affiché sur le logiciel l'azimut 2-1 calculé par intégration des différentes valeurs de dAz et, au-dessous, directement par le vecteur DGPS (formules de **[4]**).

Conclusions

Dans un précédent article, consacré au même sujet, on avait employé des moyens classiques qui se sont révélés insuffisants à démontrer ce qu'on voulait prouver. On a donc cherché un moyen plus précis. Celui qu'on vient de présenter assure une correspondance telle qu'on est assuré d'avoir mieux que le centimètre, voire même le millimètre. Un logiciel a été établi à cet effet, il est nommé «Kivioja» lequel est inspiré l'article du géodésien du même nom **[2]**, le second logiciel, qui évite les incertitudes de signe au passage de l'apex de la géodésique, à été nommé «fokimi». Il sont tous deux disponibles sur notre site Internet ou sur celui de la Revue. A des fins de contrôle, et pour les curieux, on a donné deux logiciels dont les noms sont «direct» et «inverse» qui indiquent bien leur utilité et leur fonction. C'est la résolution des anciens problèmes dits direct et inverse du calcul de la géodésique.

Toutefois, la correspondance exacte entre le calcul consacré par l'usage, de la projection du point G PS sur l'ellipsoïde de référence, et le développement de la géodésique sur l'ellipsoïde ne tend pas à démontrer que le premier pourrait suffire. Pour travailler en deux dimensions, au plus près du géoïde, il faut adopter un point de base (ou de départ) sur la surface et progresser sur celle-ci. C'est un des deux moyens de «mélanger» des mesures traditionnelles et des mesures spatiales, l'autre étant d'introduire les mesures traditionnelles dans le système cartésien géocentrique des mesures spatiales avec les problèmes que cela pose.

Enfin, la projection orthogonale du point sur l'ellipsoïde, quel qu'il soit, laisse subsister une insatisfaction, car la verticale, à laquelle nous rapportons toutes nos activités, n'est pas rectiligne, pour plus de détails voir **[5]**. On commet une erreur de position relative entre les points d'altitudes très différentes qui ne touche que la différence de latitude. Cette erreur de 0'',17 /1 000m, apparemment très petite, est incompatible avec les précisions atteintes par la topométrie, elle représente, au sol, 5,25 m/1 000m de dénivelée, la position relative de deux points à des altitudes différentes de 100m est faussée de 0, 525 m.

Il reste que l'introduction de la géodésie dans la profession du géomètre pose, pour utiliser à la fois les anciennes méthodes de mesure et les nouvelles, et marier les résultats dans un référentiel commun, des problèmes qui ne seront résolus que si on veut bien les examiner soigneusement. ●

Références

[1] Françoise. Duquenne : *G P S - Nouveau Système de Référence Géodésique Français, nouveaux processus de calculs,* in Bulletin des Sciences Géographiques n°6 Sept 2000 INCT Alger

[2] L.A Kivioja : *Computation of Geodetic Direct and Indirect Problems by ComputersAccumulating Increments from Geodetic Line Elements,* Bulletin Géodésique n°99 mars 1971 pp55-63

[3] Claude Million : *Mieux que la Clothoïde : la spirale adoucie* in X Y Z n°

[4] André Fontaine *Comment faire un traitement géodésique des mesures GPS* in X Y Z n° 86 Février Ier trimestre 2001.

[5] Robert Vincent : *Eppur si muove ou à propos de Galilée* in X Y Z n°61 1994-4

Il reste que l'introduction de la géodésie dans la profession du géomètre pose, pour utiliser à la fois les anciennes méthodes de mesure et les nouvelles, et marier les résultats dans un référentiel commun, des problèmes qui ne seront résolus que si on veut bien les examiner soigneusement.