

Réduction des longueurs

par Raymond d'HOLLANDER, Ingénieur Général Géographe

1. Introduction

On sait que les longueurs mesurées selon la pente du terrain reçoivent avant d'être introduites dans les calculs topométriques une triple correction :

- 1) réduction à l'horizontale ;
- 2) réduction à l'ellipsoïde de référence ;
- 3) correction due à l'altération linéaire du système de projection utilisé.

Il ne sera question ici que des deux premières réductions. La réduction à l'ellipsoïde de référence ne présente pas de difficultés particulières : on peut l'effectuer soit à partir de la distance réduite à l'horizontale, soit directement à partir de la distance selon la pente du terrain.

Mais lorsqu'on a besoin de la dénivelée entre le point de station et le point visé on a l'habitude de calculer la distance réduite à l'horizontale.

On peut faire cette opération :

- soit à la surface du niveau du point de station A (chapitre 2) ;
- soit à la surface du niveau d'altitude moyenne entre le point de station A et le point visé B (chapitre 3).

Nous verrons que l'utilisation des instruments de mesure électromagnétique des distances impose une certaine rigueur dans les calculs de réduction à l'horizon, dès que les distances mesurées atteignent plusieurs kilomètres, surtout lorsque les angles d'inclinaison sont élevés.

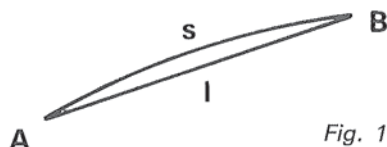
Nous verrons que dans ce cas les formules habituellement utilisées en topométrie entraînent sur l'obtention de la distance réduite à l'horizon (que nous désignerons par $(Dh)_{app.}$) des erreurs nettement plus élevées que les erreurs de mesure avec les instruments modernes de mesure électromagnétique des distances.

Il est évident que l'erreur sur la distance horizontale se répercute sur la distance homologue sur l'ellipsoïde, puis sur la distance en projection. Il paraît utile d'attirer sur ce point l'attention des utilisateurs de ces instruments et aussi celle des constructeurs.

Nous supposons que l'on opère en France et que l'on ne dépassera pas des visées de l'ordre de 4 km (exceptionnellement 5 km), ni des angles d'inclinaison supérieurs à 6,5 gr. Pour avoir l'ordre de grandeur de certains termes nous prendrons comme valeur limite :

$$i \approx 6,4 \text{ gr} \approx \frac{1}{10} \text{ rd}$$

La densité du canevas géodésique français : 1 point géodésique tous les 3 à 5 kilomètres justifie l'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons.



Compte tenu du fait que les distances mesurées sont inférieures à 5 km, on peut sans erreur sensible remplacer la longueur de la visée épousant la courbure terrestre par la corde correspondante. On sait en effet (fig. 1) que la

différence entre l'arc de courbe infinitésimal : $AB = s$, de rayon de courbure moyen $R \approx 6\,367 \text{ km}$ et la corde \overline{AB} ($\overline{AB} = l$), correspondante, est donnée par

$$s - l \approx \frac{s^3}{24 R^2}$$

Pour $s = 5 \text{ km}$, $s - l = \frac{5^3}{24 \times 6367^2} = 1,28 \times 10^{-7} \text{ km}$ soit $1,28 \times 10^{-4} \text{ m}$, soit environ $\frac{1}{10} \text{ mm}$, ce qui est

négligeable. Il sera donc commode dans certains cas (fig. 3 et 5) de remplacer la longueur AB par la longueur de la corde correspondante \overline{AB} .

Notations

Soit $Dp = AB$, la distance mesurée selon la pente du terrain.

Soit i l'angle d'inclinaison ou de site observé en A (fig. 2), la visée est supposée unilatérale.

Soit h_A la hauteur du point de station A au-dessus de l'ellipsoïde de référence, hauteur supposée connue (fig. 3).

Soit h_B la hauteur visé B au-dessus de l'ellipsoïde de référence, qu'il faudra calculer (fig. 3).

Ces hauteurs au-dessus de l'ellipsoïde de référence seront pour le moment assimilées à des altitudes, donc hauteur au-dessus du géoïde. Nous reviendrons sur cette question au chapitre 4.

Soit l , le point d'altitude moyenne entre A et B (fig. 3 et 4) : $h_l = \frac{h_A + h_B}{2}$

Soit Δh la dénivelée entre A et B ; $\Delta h = h_B - h_A$; on en déduit $\frac{\Delta h}{2} = h_B - h_l = h_l - h_A$

Soient A_o et B_o les projections de A et B sur l'ellipsoïde de référence (fig. 3 et 5) et soit R_o le rayon de courbure moyen de la section normale de l'ellipsoïde entre A_o et B_o .

Soient A'' et B'' les projections de A et B sur la surface de niveau passant par l (fig. 4) et soit R_l le rayon de courbure moyen de la section normale de cette surface entre A'' et B'' .

Soit B' la projection de B sur la surface de niveau passant par A (fig. 2 et 4) et soit R_A le rayon de courbure moyen de la section normale de cette surface entre A et B' ; on a donc : $R_A = R_l - \frac{\Delta h}{2}$

Soit A' la projection de A sur la surface de niveau passant par B (fig. 4) et soit R_B le rayon de courbure moyen de la section normale de cette surface entre A' et B ; on a donc :

$$R_B = R_l + \frac{\Delta h}{2}$$

Soit Dh_A la distance réduite à l'horizon du point de station A : $Dh_A = \overline{AB'}$ (fig. 2).

Soit $Dh_{(AB)}$ la distance réduite à l'horizon du point l : $Dh_{(AB)} = \overline{A''B''}$ (fig. 4).

Soit D_o la distance réduite à l'ellipsoïde de référence : $D_o = \overline{A_oB_o}$ (fig. 5).

Soit ρ l'angle de réfraction en A correspondant aux "conditions moyennes" de réfraction ; on sait que :

$$\rho = \frac{0,08 Dh}{R_A}$$

Soit i' l'angle d'inclinaison de la visée AB corrigée de la réfraction : $i' = i - \rho$ (fig. 2).

Soit NA la correction de niveau apparent concernant la dénivellée entre A et B, correction regroupant les corrections de sphéricité terrestre et de réfraction dans les "conditions moyennes". On sait que :

$$NA = \frac{1 - 0,16}{2} \frac{Dh^2}{R_A} = 0,42 \frac{Dh^2}{R_A}$$

Soit enfin ω l'angle des deux verticales en A et B.

2. Réduction à l'horizontale

2.1 Réduction à l'horizontale du point de station pour des visées de longueur inférieure à 1 400 m

La distance réduite à l'horizon de A, en toute rigueur $\widehat{AB'}$ est généralement calculée par $(Dh_A)_{app} = Dp \cos i$. Or, il faudrait faire intervenir l'angle i' corrigé de la réfraction pour obtenir AH. Pour obtenir AH, l'erreur commise est :

$$\epsilon_1 = Dp \cos i - Dp \cos i'$$

Or $i' = i - \rho$ et $\cos i' = \cos(i - \rho) = \cos i + \rho \sin i$

$$\epsilon_1 = - Dp \rho \sin i \text{ avec } \rho = 0,08 \frac{Dh_A}{R_A} \approx 0,08 \frac{Dp \cos i}{R_A}$$

$$\text{Soit } \epsilon_1 = - \frac{0,08 Dp^2 \sin i \cos i}{R_A} = - \frac{0,04}{R_A} Dp^2 \sin 2i$$

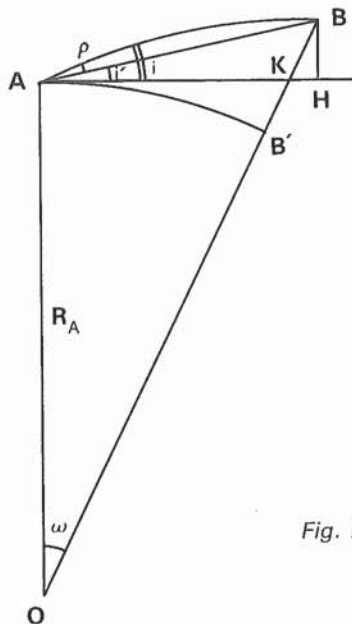


Fig. 2

Si on fait $R_A = 6\,367\text{ km}$ et si on évalue Dp en km, l'erreur commise est en km :

$$\epsilon_1 = - 6,28 \times 10^{-6} \times Dp^2 \times \sin 2i$$

Dans le cas extrême où $i = 6,5\text{ gr}$ et $Dp = 1,4\text{ km}$, $\epsilon_1 = - 2,5 \times 10^{-6}\text{ km}$, soit $- 2,5 \times 10^{-3}\text{ m}$.

Bien que l'erreur commise soit faible, nous apporterons cependant à la distance $(Dh_A)_{app}$ la correction C_1 de signe contraire à ϵ_1 et de même valeur absolue.

En effet :

$$Dp \cos i' = Dp \cos i - \epsilon_1 = (Dh_A)_{app} - \epsilon_1 = (Dh_A)_{app} + C_1$$

Il y a donc une première correction :

$$C_1 = + \frac{0,04}{R_A} Dp^2 \times \sin 2i$$

$$AH = Dp \cos i' = (Dh_A)_{app} + C_1$$

Mais la distance réduite cherchée est en toute rigueur $\widehat{AB'}$. Pour passer de AH à $\widehat{AB'}$ on passe par l'intermédiaire de AK, K étant le point de rencontre de OB et de AH.

On effectue une 2^e correction : $C_2 = - KH$ de sorte que $AK = AH - KH = AH + C_2$; puis une 3^e correction : $C_3 = AK - \widehat{AB'}$

Montrons que cette 3^e correction est négligeable.

$$AK = R_A \tan \omega \approx R_A \left(\omega + \frac{\omega^3}{3} \right)$$

$$\widehat{AB'} = R_A \omega.$$

$$AK - \widehat{AB'} = R_A \frac{\omega^3}{3} \approx R_A \frac{Dh^3}{3R_A^3} \approx \frac{Dh^3}{3R_A^2}$$

Pour $Dh = 1\,400\text{ m}$ valeur limite et pour $R_A = 6\,367\,000\text{ m}$ on obtient $C_3 = 2,26 \times 10^{-5}\text{ m}$, valeur tout à fait négligeable.

Calculons la 2^e correction, $C_2 = - KH$. Écrivons pour cela que les deux triangles KHB et KAO sont semblables :

$$\frac{KH}{HB} = \frac{AK}{R_A} = \frac{AK + KH}{R_A + HB} = \frac{AH}{R_A + HB}$$

Remplaçons HB par $Dp \sin i'$ et AH par $Dp \cos i'$; il vient :

$$\begin{aligned} C_2 &= - KH = - \frac{Dp \sin i' \times Dp \cos i'}{R_A + Dp \sin i'} \\ &= - Dp^2 \times \frac{\sin 2i'}{2R_A \left(1 + \frac{Dp}{R_A} \sin i' \right)} \\ &\approx - Dp^2 \frac{\sin 2i'}{2R_A} \left(1 - \frac{Dp}{R_A} \sin i' \right) \end{aligned}$$

Dans le cas extrême, $Dp = 1\,400\text{ m}$, $i' = 6,5\text{ gr}$, le terme :

$$\frac{Dp^3}{2R_A^2} \times \sin 2i' \sin i' = + 6,99 \times 10^{-7}\text{ m} \text{ est tout à fait négligeable, de sorte que :}$$

$$C_2 \approx Dp^2 \frac{\sin 2i'}{2R_A} = - Dp^2 \frac{(\sin 2i - 2\rho \cos 2i)}{2R_A}$$

Dans le terme : $\frac{Dp^2 \times 2\rho \cos i}{R_A}$, remplaçons par sa valeur $0,08 Dp \frac{\cos i}{R_A}$

$$\text{On obtient : } 0,08 Dp^3 \frac{\cos 2i \cos i}{R_A^2} = 5,27 \times 10^{-6}\text{ m,}$$

Ce terme est donc aussi négligeable. Il reste donc :

$$C_2 = - \frac{Dp^2 \times \sin 2i}{2R_A} = - 0,5 \frac{Dp^2}{R_A} \sin 2i$$

Au total, il y a lieu d'apporter la correction :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{Dp^2 \sin 2i}{R_A} (0,04 - 0,5)$$

$$C = - 0,46 Dp^2 \frac{\sin 2i}{R_A}$$

La distance réduite à l'horizon est de façon quasi-rigoureuse :

$$1) \widehat{AB'} = (Dh_A)_{app} + C$$

$$\widehat{AB'} = Dp \cos i - 0,46 Dp^2 \times \frac{\sin 2i}{R_A}$$

Le tableau ci-après indique la valeur en cm de la correction à apporter à la distance approchée $(Dh_A)_{app}$ pour obtenir la distance $\widehat{AB'} = Dh_A$ quasi-rigoureuse. On a pris la valeur $R_A = 6\,367\,000\text{ m}$.

Tableau I

i (gr)	Dp (m)	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400
0,5		- 0,02	- 0,03	- 0,04	- 0,06	- 0,07	- 0,09	- 0,11	- 0,14	- 0,16	- 0,19	- 0,22
1,0		- 0,04	- 0,06	- 0,08	- 0,11	- 0,14	- 0,18	- 0,23	- 0,27	- 0,33	- 0,38	- 0,44
1,5		- 0,05	- 0,09	- 0,12	- 0,17	- 0,22	- 0,28	- 0,34	- 0,41	- 0,49	- 0,58	- 0,67
2,0		- 0,07	- 0,11	- 0,16	- 0,22	- 0,29	- 0,37	- 0,45	- 0,55	- 0,65	- 0,77	- 0,89
2,5		- 0,09	- 0,14	- 0,20	- 0,28	- 0,36	- 0,46	- 0,57	- 0,69	- 0,82	- 0,96	- 1,11
3,0		- 0,11	- 0,17	- 0,24	- 0,33	- 0,44	- 0,58	- 0,68	- 0,82	- 0,91	- 1,15	- 1,33
3,5		- 0,13	- 0,20	- 0,29	- 0,39	- 0,51	- 0,64	- 0,79	- 0,96	- 1,14	- 1,34	- 1,55
4,0		- 0,14	- 0,23	- 0,33	- 0,44	- 0,58	- 0,73	- 0,91	- 1,10	- 1,30	- 1,53	- 1,77
4,5		- 0,16	- 0,25	- 0,37	- 0,50	- 0,65	- 0,82	- 1,02	- 1,23	- 1,47	- 1,72	- 2,00
5,0		- 0,18	- 0,28	- 0,41	- 0,55	- 0,72	- 0,92	- 1,13	- 1,36	- 1,63	- 1,91	- 2,21
5,5		- 0,20	- 0,31	- 0,45	- 0,61	- 0,79	- 1,01	- 1,24	- 1,50	- 1,79	- 2,10	- 2,43
6,0		- 0,22	- 0,34	- 0,49	- 0,66	- 0,87	- 1,10	- 1,35	- 1,64	- 1,95	- 2,29	- 2,65
6,5		- 0,23	- 0,37	- 0,53	- 0,72	- 0,94	- 1,19	- 1,47	- 1,77	- 2,11	- 2,48	- 2,87

Le trait épais en escalier sépare les zones du tableau pour lesquelles, lorsqu'on prend la formule approchée $(Dh_A)_{app} = Dp \cos i$, l'erreur commise est inférieure à 0,5 cm, de celle pour laquelle l'erreur commise est supérieure ou égale à 0,5 cm.

Application numérique :

$Dp = AB = 1\,240,82\text{ m}$

$i = 5,4725\text{ gr}$

$h_A = 62,5\text{ m}$, $R_0 = 6\,367\,000\text{ m}$

$R_A = R_0 + h_A = 6\,367\,062,5\text{ m}$

On voit dans le tableau que pour $Dp = 1\,200\text{ m}$, la correction dépasse $-0,49\text{ cm}$ dès que l'angle du site est supérieur à $1,50\text{ gr}$. Il y a donc lieu de calculer la correction :

$$C = -0,46 Dp^2 \times \frac{\sin 2i}{R_A} = -0,019\text{ m}$$

$(Dh_A)_{app} = Dp \cos i = 1235,164\text{ m}$

$Dh_A = (Dh_A)_{app} + C = 1235,145\text{ m}$

2.2 Réduction à l'horizontale du point d'altitude moyenne entre A et B

(visée de 1400 m à 4600 m)

2.2 Etablissement des formules de réduction rigoureuses

Soit \overline{AB} la visée corrigée de la réfraction, de site i'

Soit I le point d'altitude moyenne $h_I = \frac{h_A + h_B}{2}$

Les verticales de A et de B rencontrent l'ellipsoïde en A_0 , B_0 et la surface de niveau passant par I en $A''B''$.

Comme nous l'avons justifié dans l'introduction, assimilons les courbes $\overline{A_0B_0}$ et $\overline{A''B''}$ respectivement sections normales de l'ellipsoïde et de la surface de niveau passant par I, à leurs cordes A_0B_0 et $A''B''$.

Désignons par a le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur $A''B''$ et par b le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur $A''B''$.

On recommande en général d'effectuer la réduction à l'horizon du point I, ce qui correspond au segment $A''B''$.

On estime que les longueurs $A''a$ et $B''b$ sont égales, de sorte que $A''B'' = ab = Dp \cos i'$; en outre, on ne tient pas compte de la réfraction ; on assimile i' à i et on écrit $Dh_{AB} = Dp \cos i$. On commet de ce fait deux sortes d'erreurs, sensibles lorsque les visées ont une grande longueur et sont fortement inclinées.

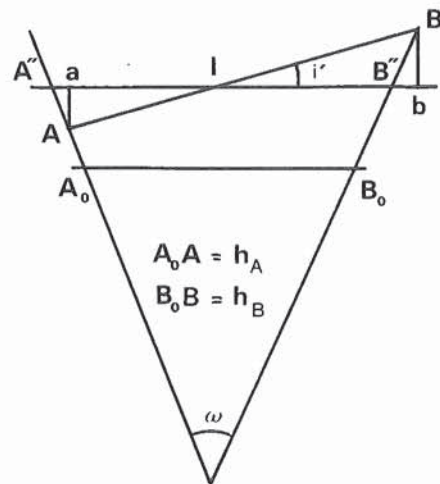


Fig. 3

1) La relation $A''a = B''b$ n'est plus satisfaite.

2) L'assimilation de i' à i entraîne une erreur supplémentaire non négligeable ; en effet, nous avons vu en 2.1 qu'à 1 400 m on obtenait de ce fait une erreur : $\epsilon_1 = -2,5\text{ mm}$, mais cette erreur croissant comme le carré de la distance, on obtiendra à : $4\,200\text{ m} = 1\,400\text{ m} \times 3$, une erreur 9 fois plus grande, soit $-2,25\text{ cm}$.

Pour traiter correctement le problème, assimilons à 3 cercles les sections par le plan vertical de AB des trois surfaces de niveau passant par A, B et I ; la faible portée de AB (de l'ordre de 4 km) permet en effet de considérer que

les rayons de courbure de ces trois courbes restent constants respectivement entre A et B', entre B et A', entre A'' et B''.

On sait que $R_A = R_1 - \frac{\Delta h}{2}$, $R_B = R_1 + \frac{\Delta h}{2}$

(voir notations dans l'introduction).

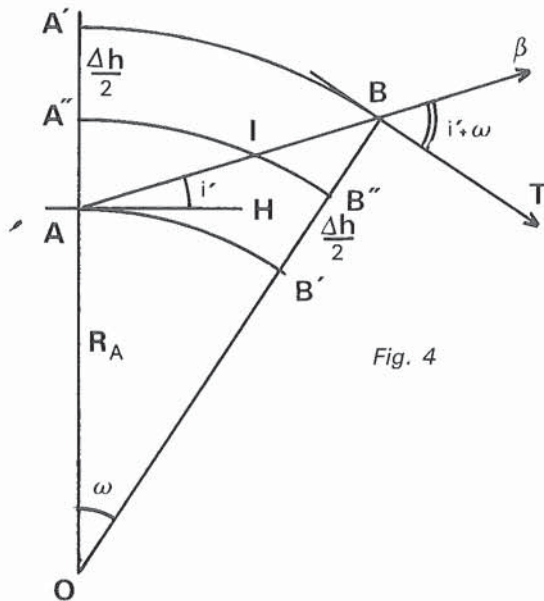


Fig. 4

Considérons la tangente en A au cercle de rayon R_A matérialisant l'horizontale supposée rectiligne.

La direction de la droite AB fait avec cette tangente l'angle i' , corrigé de la réfraction.

Considérons de même la tangente BT en B au cercle de rayon R_B .

Dans le triangle AOB, l'angle extérieur :

$$\widehat{OBS} = i_0 + \frac{\pi}{2} + i', \text{ d'où :}$$

$$\widehat{TBS} = i' + \omega$$

Les verticales de A et B rencontrent le cercle de rayon R_1 en A'' et B'', de sorte que la distance réduite cherchée est en toute rigueur :

$$2) Dh_{AB} = A''B'' = R_1 \omega.$$

Dans le triangle AOB la relation des sinus donne :

$$\frac{AB}{\sin \omega} = \frac{OB}{\sin (\frac{\pi}{2} + i')} = \frac{OA}{\sin (\frac{\pi}{2} - i' - \omega)}$$

que nous transformons :

$$3) \frac{Dp}{\sin \omega} = \frac{R_1 + \frac{\Delta h}{2}}{\cos i'} = \frac{R_1 - \frac{\Delta h}{2}}{\cos (i' + \omega)}$$

Ecrivons que chacune de ces fractions est égale d'une part à celle que l'on obtient en ajoutant numérateur et dénominateur, d'autre part à celle que l'on obtient en les soustrayant :

$$4) \frac{Dp}{\sin \omega} = \frac{2 R_1}{\cos i' + \cos (i' + \omega)} = \frac{\Delta h}{\cos i' - \cos (i' + \omega)}$$

De la première égalité, on tire après transformation :

$$Dp = \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \times 2 R_1}{2 \cos (i' + \frac{\omega}{2}) \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot R_1}{\cos (i' + \frac{\omega}{2})}$$

d'où l'on déduit :

$$Dp \cos (i' + \frac{\omega}{2}) = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot R_1 \approx 2 (\frac{\omega}{2} - \frac{\omega^3}{48}) R_1$$

$$\approx R_1 \omega = - R_1 \frac{\omega^3}{24}$$

Le terme $R_1 \frac{\omega^3}{24}$ est négligeable. Dans le cas extrême où $Dp = 5 \text{ km}$, $\omega = \frac{5}{6367}$, on a $R_1 \frac{\omega^3}{24} = 1,28 \times 10^{-4} \text{ m}$ soit environ $\frac{1}{10} \text{ mm}$, ce qui est bien négligeable.

On peut donc écrire : $R_1 \omega \approx Dp \cos (i' + \frac{\omega}{2})$

Il en résulte que la distance cherchée :

$$A''B'' = R_1 \omega \approx Dp \cos (i' + \frac{\omega}{2})$$

Ainsi, de façon quasi-rigoureuse :

$$5) Dh_{AB} \approx Dp \cos (i' + \frac{\omega}{2})$$

On obtient l'angle ω à partir de la première égalité de 3).

$$6) \sin \omega = \frac{Dp \cos i'}{R_1 + \frac{\Delta h}{2}} = \frac{Dp \cos i'}{R_B}$$

Ainsi après avoir calculé ω par la relation 6 :

$$\omega = \arcsin \frac{Dp \cos i'}{R_1 + \frac{\Delta h}{2}}, \text{ on peut :}$$

— soit remplacer dans 5) ω par la valeur ainsi trouvée, convertie en grades, puis calculer i' par $i' = i - \rho$, avec

$$\rho = \frac{0,08 Dh_{AB}}{R_A} = \frac{0,08 Dp \cos i'}{R_A}$$

Pour obtenir le très petit angle ρ on peut en effet remplacer Dh_{AB} par sa valeur approchée. Bien entendu ρ ayant été ainsi obtenu en radians, il faut le transformer en grades par : $\rho^{\text{gr}} = \rho^{\text{rd}} \times \frac{\pi}{200}$

— soit conserver ω en radians mais avec suffisamment de décimales et calculer par la formule 2) :

$$Dh_{AB} = A''B'' = R_1 \omega$$

Remarques :

1) La 2^e égalité de la relation 4 permet d'écrire :

$$\Delta h = Dp \frac{\cos i' - \cos (i' + \omega)}{\sin \omega} \text{ que l'on transforme en}$$

$$\Delta h = Dp \frac{\sin (i' + \frac{\omega}{2})}{\cos \frac{\omega}{2}} \approx \frac{Dp \sin (i' + \frac{\omega}{2})}{1 - \frac{\omega^2}{8}}$$

$$\Delta h \approx Dp \sin (i' + \frac{\omega}{2}) (1 + \frac{\omega^2}{8})$$

On ne commet pas d'erreur sensible en prenant la partie principale :

$$\Delta h \approx Dp \sin (i' + \frac{\omega}{2})$$

En effet, on néglige ainsi le terme $Dp \sin (i' + \frac{\omega}{2}) \cdot \frac{\omega^2}{8}$

Dans le cas extrême d'une visée de 5 km et de site : $i' + \frac{\omega}{2} = 6,377 \text{ gr}$, $\sin (i' + \frac{\omega}{2}) = \frac{1}{10}$, on trouve :

$$5000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} (\frac{5}{6367})^2 = 3,85 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$= 3,85 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

Valeur tout à fait négligeable. Nous prendrons donc :

$$7) \Delta h = Dp \sin (i' + \frac{\omega}{2})$$

Si on divise la relation 7) par la relation 5), on trouve :

$$8) \Delta h = Dh_{AB} \tan (i' + \frac{\omega}{2})$$

La formule 7) est à utiliser lorsqu'on connaît la mesure selon la pente D_p , la formule 8) est à utiliser lorsqu'on connaît les coordonnées de A et de B en projection. De la distance en projection, on déduit la distance $D_o = A_o B_o$ sur l'ellipsoïde (correction de signe contraire à celui de l'altération linéaire), puis la distance D_{hAB} par la formule 12 ci-après.

2) La figure 5 permet de mettre en évidence le fait que, contrairement à ce que semble indiquer la fig. 3, les segments $A''a$ et $B''b$ ne sont pas égaux.

Partons de la figure 4 qui comporte un angle ω et des dénivelées $\frac{\Delta h}{2}$ très exagérées.

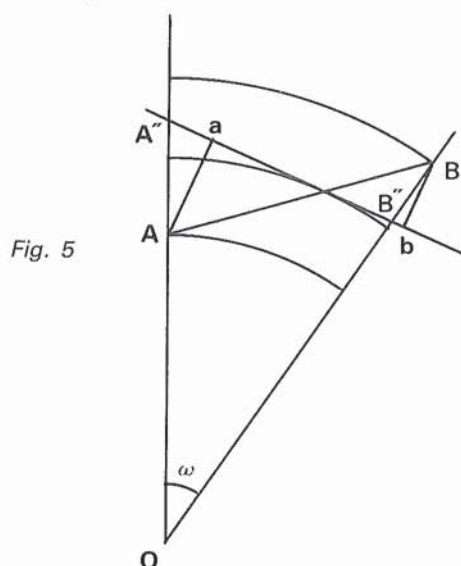


Fig. 5

Considérons la tangente en I au cercle de rayon R_i . Soient A'' et B'' les intersections avec les verticales de A et de B. Abaissons sur cette tangente de A et de B les perpendiculaires en a et b (voir fig. 5).

On constate sur cette figure aux éléments exagérés une différence élevée entre les segments $A''a$ et $B''b$.

2.2.2. Calcul de la correction à apporter à la distance approchée D_{pcosi} pour obtenir la distance rigoureuse.

Cette correction est : $C = D_{pcos} (i' + \frac{\omega}{2}) - D_{pcos} i$

avec $i' = i - \rho$ et $\rho = 0,08 \frac{Dh}{R_A}$, $\frac{\omega}{2} = \frac{Dh}{2R_A}$

$$D_{pcos} (i' + \frac{\omega}{2}) = D_{pcos} [i + \frac{Dh}{R_A} (0,5 - 0,08)]$$

$$D_{pcos} (i' + \frac{\omega}{2}) = D_{pcos} (i + 0,42 \frac{Dh}{R_A})$$

En appliquant la formule de Taylor au 2^e membre :

$$D_{pcos} (i' + \frac{\omega}{2}) = D_{pcos} i - 0,42 \frac{Dh}{R_A} D_{pcos} \sin i$$

$$- \frac{0,42^2}{2} \frac{Dh^2}{R_A^2} D_{pcos} \cos i + \dots$$

$$\text{Le terme : } - \frac{0,42^2}{2} D_{pcos} \frac{Dh^2}{R_A^2} \cos i = - \frac{0,42^2}{2} \frac{Dp^3}{R_A^2} \cos^2 i$$

vaut dans le cas extrême, pour $D_p = 5000$ m : $- 2,72 \times 10^{-4}$ m ; il est donc négligeable.

Il en résulte que $C \approx - 0,42 D_p \frac{Dh}{R_A} \sin i$. En remplaçant

Dh par $D_p \cos i$, on a :

$$9) C \approx - 0,21 \frac{Dp^2}{R_A} \sin 2i$$

Tableau II donnant les corrections en cm à apporter à la valeur approchée $D_{h(AB)} = D_{pcosi}$ lorsqu'on veut obtenir la distance rigoureuse réduite à l'horizon du point I d'altitude moyenne entre A et B

D_p (m) i (gr)	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600
0,50	- 0,1	- 0,1	- 0,2	- 0,2	- 0,3	- 0,3	- 0,35	- 0,4	- 0,5	- 0,5	- 0,6	- 0,7	- 0,7	- 0,8	- 0,9	- 1,0	- 1,1
1,00	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,7	- 0,8	- 0,9	- 1,1	- 1,2	- 1,3	- 1,5	- 1,7	- 1,8	- 2,0	- 2,2
1,50	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,8	- 0,9	- 1,0	- 1,2	- 1,4	- 1,6	- 1,8	- 2,0	- 2,2	- 2,5	- 2,7	- 3,0	- 3,3
2,00	- 0,4	- 0,5	- 0,7	- 0,8	- 1,0	- 1,2	- 1,4	- 1,6	- 1,9	- 2,1	- 2,4	- 2,7	- 3,0	- 3,3	- 3,7	- 4,0	- 4,4
2,50	- 0,5	- 0,7	- 0,8	- 1,0	- 1,3	- 1,5	- 1,7	- 2,0	- 2,3	- 2,6	- 3,0	- 3,4	- 3,7	- 4,1	- 4,6	- 5,0	- 5,5
3,00	- 0,6	- 0,8	- 1,0	- 1,2	- 1,5	- 1,8	- 2,1	- 2,4	- 2,8	- 3,2	- 3,6	- 4,0	- 4,5	- 5,0	- 5,5	- 6,0	- 6,6
3,50	- 0,7	- 0,9	- 1,2	- 1,4	- 1,7	- 2,1	- 2,4	- 2,8	- 3,3	- 3,7	- 4,2	- 4,7	- 5,2	- 5,8	- 6,4	- 7,0	- 7,7
4,00	- 0,8	- 1,1	- 1,3	- 1,6	- 2,0	- 2,4	- 2,8	- 3,2	- 3,7	- 4,2	- 4,8	- 5,4	- 6,0	- 6,6	- 7,3	- 8,0	- 8,7
4,50	- 0,9	- 1,2	- 1,5	- 1,9	- 2,2	- 2,7	- 3,1	- 3,6	- 4,2	- 4,7	- 5,4	- 6,0	- 6,7	- 7,4	- 8,2	- 9,0	- 9,8
5,00	- 1,0	- 1,3	- 1,7	- 2,1	- 2,5	- 3,0	- 3,5	- 4,0	- 4,6	- 5,3	- 6,0	- 6,7	- 7,5	- 8,3	- 9,1	- 10,0	- 10,9
5,50	- 1,1	- 1,5	- 1,8	- 2,2	- 2,7	- 3,3	- 3,8	- 4,5	- 5,1	- 5,8	- 6,6	- 7,3	- 8,2	- 9,1	- 10,0	- 11,0	- 12,0
6,00	- 1,2	- 1,6	- 2,0	- 2,5	- 3,0	- 3,6	- 4,2	- 4,8	- 5,6	- 6,3	- 7,1	- 8,0	- 8,9	- 9,9	- 10,9	- 12,0	- 13,1
6,50	- 1,3	- 1,7	- 2,2	- 2,7	- 3,2	- 3,9	- 4,5	- 5,2	- 6,0	- 6,8	- 7,7	- 8,7	- 9,7	- 10,7	- 11,8	- 12,9	- 14,2

La correction toujours négative du tableau II ci-dessus a été calculée en utilisant la formule 9) ci-dessus avec la valeur $R_A = 6367 \text{ km}$. Le trait épais en escalier sépare la zone pour laquelle l'erreur commise en prenant la formule approchée est inférieure à 1 cm, de celle pour laquelle l'erreur commise est supérieure à 1 cm. On peut à la rigueur se dispenser de calculer la correction ci-dessus en effectuant une double interpolation dans le tableau II ci-dessus.

2.2.3 Calcul de la corde A''B'' à partir de la corde AB

Nous avons vu dans l'introduction qu'on peut, sans erreur sensible, remplacer les arcs $\widehat{A''B''}$ et \widehat{AB} par les cordes correspondantes. Dans le triangle isocèle $OA''B''$ (fig. 5) le côté $A''B'' = Dh_{AB}$, les côtés $OA''OB''$ sont égaux à R_i de sorte qu'en appliquant la relation : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on a :

$$Dh_{AB}^2 = 2R_i^2 - 2R_i^2 \cos \omega$$

Dans le triangle AOB, le côté $AB = Dp$, le côté $OA = R_i - \frac{\Delta h}{2}$, le côté $OB = R_i + \frac{\Delta h}{2}$, d'où :

$$Dp^2 = (R_i - \frac{\Delta h}{2})^2 + (R_i + \frac{\Delta h}{2})^2 - 2(R_i - \frac{\Delta h}{2})(R_i + \frac{\Delta h}{2}) \cos \omega$$

En égalant les deux expressions de $\cos \omega$ dans les deux relations ci-dessus, on a :

$$\frac{2R_i^2 - Dh_{AB}^2}{2R_i^2} = 1 - \frac{Dh_{AB}^2}{2R_i^2} = \frac{(R_i - \frac{\Delta h}{2})^2 + (R_i + \frac{\Delta h}{2})^2 - Dp^2}{2(R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4})}$$

$$\frac{Dh_{AB}^2}{2R_i^2} = \frac{2(R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4})^2 - (R_i - \frac{\Delta h}{2})^2 - (R_i + \frac{\Delta h}{2})^2 + Dp^2}{2(R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4})}$$

$$\frac{Dh_{AB}^2}{R_i^2} = \frac{2R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{2} - R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4} + R_i \Delta h - R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4} - R_i \Delta h + Dp^2}{R_i^2 - \frac{\Delta h^2}{4}}$$

$$\frac{Dh_{AB}^2}{R_i^2} = \frac{Dp^2 - \frac{\Delta h^2}{4}}{R_i^2 (1 - \frac{\Delta h^2}{4R_i^2})}, \text{ d'où :}$$

$$10) Dh_{AB}^2 = \frac{Dp^2 - \frac{\Delta h^2}{4}}{1 - \frac{\Delta h^2}{4R_i^2}}$$

Δh étant bien entendu dans cette formule calculé en tenant compte de la correction de niveau apparent.

2.2.4 Application numérique

Données : $Dp = 4383,157 \text{ m}$, $h_A = 720,80 \text{ m}$
Site observé $i = 6,3457 \text{ gr}$, $R_o = 6367000 \text{ m}$

Une telle visée n'a pas un caractère exceptionnel en zone montagneuse.

On demande de calculer la distance réduite à l'horizon du point I d'altitude moyenne $h_i = \frac{h_A + h_B}{2}$

On demande aussi de calculer la dénivelée par la formule 7).

2.2.4.1 Calculs préliminaires

a) Distance approchée $(Dh_{AB})_{app} = Dp \cos i = 4361,400 \text{ m}$

b) $R_A = R_o + h_A = 6367720,80 \text{ m}$.

c) Calcul classique de la dénivelée Δh entre A et B :
 $\Delta h = Dp \sin i + NA$; $NA = \frac{0,42 Dh_{AB}^2}{R_A} = 1,255 \text{ m}$

$Dp \sin i = 436,18 \text{ m}$ d'où $\Delta h = 436,18 \text{ m} + 1,255 \text{ m} = 437,435 \text{ m}$.

On en déduit $h_B = h_A + \Delta h = 720,80 + 437,435 = 1158,235 \text{ m}$

d) $R_i = R_A + \frac{\Delta h}{2} = 6367720,80 + 218,7175 = 6307939,5175 \text{ m}$

et $R_B = R_A + \Delta h = 6367720,80 + 437,435 = 6368158,235 \text{ m}$

e) $\rho = 0,08 \frac{Dh_{AB}}{R_A} = 5,479386 \times 10^{-5} \text{ rd} = 0,00349 \text{ gr}$

f) $i' = i - \rho = 6,3457 - 0,0035 = 6,3422 \text{ gr}$

g) $\sin \omega = \frac{Dp \cos i'}{R_B}$, d'où $\omega = \arcsin \frac{Dp \cos i'}{R_B}$
 $= \arcsin \frac{4383,157 \times \cos 6,3422 \text{ gr}}{6368158,236}$

$\omega = 6,8487998 \times 10^{-4} \text{ rd} = 0,0436 \text{ gr}$

$\frac{\omega}{2} = 0,0218 \text{ gr}$; $i' + \frac{\omega}{2} = 6,3640 \text{ gr}$

2.2.4.2 Calcul de Dh_{AB} rigoureux

Quatre solutions peuvent être envisagées :

a) application de la formule 5) : $Dh_{AB} = Dp \cos (i' + \frac{\omega}{2})$

On trouve : $Dh_{AB} = 4383,157 \times \cos 6,3640 \text{ gr} = 4361,2746 \text{ m}$

b) application de la formule 2) ; $Dh_{AB} = R_i \omega$

On trouve : $Dh_{AB} = 4361,2743 \text{ m}$

c) calcul à partir de $(Dh_{AB})_{app} = Dp \cos i$, en y apportant la correction c donnée par 9).

$$C = -0,21 \frac{Dp^2}{R_A} \sin 2i$$

On trouve $C = -0,21 \frac{4383,157^2}{6367720,80} \times \sin 12,6914 \text{ gr}$

$C = -0,1255 \text{ m}$

$Dh_{AB} = Dp \cos i + C = 4361,400 - 0,1255$
 $Dh_{AB} = 4361,2745 \text{ m}$

d) calcul par la formule 10) $Dh_{AB}^2 = \frac{Dp^2 - \frac{\Delta h^2}{4}}{1 - \frac{\Delta h^2}{4R_i^2}}$

On trouve $Dh_{AB} = 4361,2746 \text{ m}$

On remarquera la concordance à quelques dixièmes de mm près des 4 résultats obtenus en a, b, c, d.

On remarquera en outre que la distance rigoureuse diffère de 12,5 cm de la distance approchée $Dh_{AB} =$

Dpcosi, telle qu'on la calcule habituellement. Une telle différence est incompatible avec la précision des instruments modernes de mesure électromagnétique des distances.

2.2.4.3 Calcul de la dénivelée

En utilisant la formule 7) : $\Delta h = Dp \sin(i' + \frac{\omega}{2})$ avec

$$Dp = 4383,157 \text{ m}$$

$$i' + \frac{\omega}{2} = 6,3640 \text{ gr}$$

On trouve : $\Delta h = 437,435 \text{ m}$, exactement le même résultat que celui obtenu en 2.2.4.1 c avec la méthode classique faisant intervenir la correction de niveau apparent.

3. Réduction à l'ellipsoïde de référence

3.1 Réduction à partir de la distance réduite à l'horizon du point de station

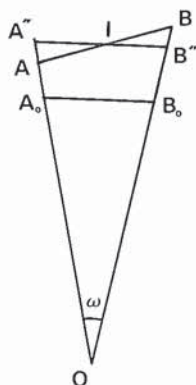


Fig. 6

D'après la fig. 6 : $\frac{D_0}{Dh_A} = \frac{Ro}{Ro + h_A} = \frac{1}{1 + \frac{h_A}{Ro}}$

d'où

$$11) D_0 \approx Dh_A (1 - \frac{h_A}{Ro})$$

Application numérique

Reprenons l'application numérique du n° 2.2.4.

$$Dp = 1240,82 \text{ m}, h_A = 62,5 \text{ m}, Ro = 6\,367\,000 \text{ m}, i = 5,4725 \text{ gr}$$

Nous avons obtenu $Dh_A = 1235,145 \text{ m}$. On en déduit :

$$D_0 \approx 1235,145 (1 - \frac{62,5}{6\,367\,000}) = 1235,133 \text{ m}$$

3.2 Réduction à l'ellipsoïde à partir de la distance réduite à l'horizon du point I d'altitude moyenne

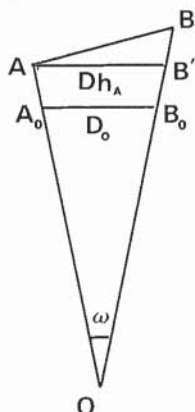


Fig. 7

D'après la fig. 7 : $\frac{AoBo}{A''B''} = \frac{D_0}{Dh_{AB}} = \frac{Ro}{Ro + h_i}$

$$12) D_0 = \frac{Dh_{AB}}{1 + \frac{h_i}{Ro}}$$

$$13) D_0 \approx Dh_{AB} (1 - \frac{h_i}{Ro})$$

Application numérique

Reprenons l'application numérique du n° 2.2.4.

$$Dp = AB = 4383,157 \text{ m}, i = 6,3457 \text{ gr}$$

$$h_A = 720,80 \text{ m}, Ro = 6\,367\,000 \text{ m}$$

On a trouvé par 4 méthodes différentes :

$$Dh_{AB} = A''B'' = 4361,2745 \text{ m}$$

$$\text{Or } h_i = \frac{h_A + h_B}{2} = \frac{720,80 + 1158,235}{2} \text{ (voir 2.2.4.1 c)}$$

$$\text{On trouve } D_0 \approx 4361,2745 (1 - \frac{939,5175}{6\,367\,000})$$

$$D_0 \approx 4360,631 \text{ m}$$

3.3 Réduction directe à l'ellipsoïde en utilisant la valeur de l'angle ω

On sait que $\sin \omega = \frac{Dp \cos i'}{R_B}$. On en déduit :

$$D_0 = \widehat{AoBo} = \omega Ro = Ro \arcsin \frac{Dp \cos i'}{R_B}$$

Application numérique

Reprenons l'application du n° 2.2.4 où en 2.2.4.1 g) on a déjà calculé $\omega = 6,8487998 \times 10^{-4} \text{ rd}$.

$$D_0 = 6,8487998 \times 10^{-4} \times 6\,367\,000 = 4360,631 \text{ m}, \text{ même résultat qu'en 3.2}$$

3.4 Réduction directe à l'ellipsoïde à partir de $Dp = \widehat{AB}$

Nous confondons encore les distances \widehat{AB} et \widehat{AoBo} selon la courbure terrestre avec les cordes \overline{AB} et \overline{AoBo} correspondantes.

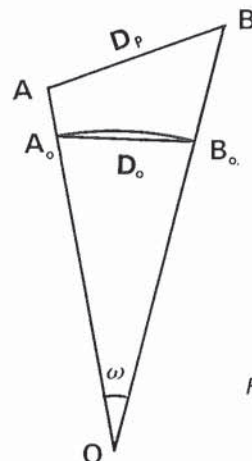


Fig. 8

Pour les deux triangles de la fig. 8, on peut écrire :

$$D_0^2 = 2Ro^2 - 2Ro^2 \cos \omega$$

$$Dp^2 = (Ro + h_A)^2 + (Ro + h_B)^2 - 2(Ro + h_A)(Ro + h_B) \cos \omega$$

En égalant les deux expressions de $\cos \omega$, il vient :

$$\frac{2Ro^2 - D_0^2}{2Ro^2} = 1 - \frac{D_0^2}{2Ro^2} = \frac{(Ro + h_A)^2 + (Ro + h_B)^2 - Dp^2}{2(Ro + h_A)(Ro + h_B)}$$

$$\frac{D_0^2}{2Ro^2} = \frac{2(Ro + h_A)(Ro + h_B) - [(Ro + h_A)^2 + (Ro + h_B)^2 - Dp^2]}{2(Ro + h_A)(Ro + h_B)}$$

Le numérateur du 2^e membre est de la forme :
 $2uv - u^2 - v^2 + Dp^2$, que l'on peut écrire :
 $Dp^2 - (u - v)^2$, d'où :

$$Do^2 = \frac{Dp^2 - (h_A - h_B)^2}{(Ro + h_A)(Ro + h_B)} = \frac{Dp^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{Ro}\right)\left(1 + \frac{h_B}{Ro}\right) Ro^2}$$

$$14) Do^2 = \frac{Dp^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{Ro}\right)\left(1 + \frac{h_B}{Ro}\right)}$$

Application numérique

Prenons toujours l'application du n° 2.2.4 :

$Dp = 4383,157$ m,

$h_A = 720,80$ m, $h_B = 1158,235$ m.

On trouve en appliquant la formule 14) :
 $Do = 4360,630$ m, qui diffère d'un millimètre des résultats obtenus en 3.2 et 3.3.

Remarque

On sait que :

$$\frac{Do}{Ro} = \frac{Dh_{AB}}{R_i} \text{ En différentiant :}$$

$$\frac{dDo}{Ro} = \frac{dDh_{AB}}{R_i}$$

Comme Ro et R_i ont des valeurs voisines, on a pratiquement : $dDo \approx dDh_{AB}$.

Si on commet une erreur sur Dh_{AB} , on commet la même erreur sur Do , erreur qui se répercute sur la distance en projection et sur tous les calculs topométriques ultérieurs. On a vu, dans l'application du n° 2.2.4, qu'on commettait en prenant $(Dh_{AB})_{app} = Dp$ une erreur de 12,5 cm ; cette erreur se répercutera donc dans toute la suite des calculs.

4. Précision avec laquelle doivent être connus Ro et h_A pour obtenir un résultat correct dans la réduction des distances.

4.1 Erreur sur Dh_{AB} en fonction d'erreurs sur h_A et sur Ro .

Reprenons la formule 10)

$$Dh_{AB}^2 = \frac{Dp^2 - \Delta h^2}{1 - \frac{\Delta h^2}{4R_i^2}}$$

$$\text{Or } R_i = Ro + h_A + \frac{\Delta h}{2}$$

Si on commet une erreur dh_A sur h_A et dRo sur Ro , on peut se demander quelle sera l'influence de l'erreur :
 $dR_i = dh_A + dRo$ sur la valeur de Dh_{AB} .

En prenant la différentielle logarithmique de 10)

$$\frac{2dDh_{AB}}{Dh_{AB}} = - \frac{\Delta h^2}{4} \times \frac{2dR_i}{R_i^3 \left(1 - \frac{\Delta h^2}{4R_i^2}\right)} \approx - \frac{\Delta h^2}{2} \frac{dR_i}{R_i^3}$$

$$dDh_{AB} = - \frac{1}{4} Dh_{AB} \times \frac{\Delta h^2 dR_i}{R_i^3}$$

L'erreur sur h_A ne saurait excéder quelques dizaines de mètres et même si on prend $dRo = 100$ km = 10^5 m, soit $dR_i \approx 10^5$ m, on obtient même dans les cas extrêmes une erreur dDh_{AB} tout à fait négligeable, de l'ordre de 10^{-7} m pour $Dh_{AB} = 5000$ m et pour $\Delta h = 500$ m.

Ainsi l'imprécision sur h_A et sur Ro n'a pratiquement aucune répercussion sur la précision de Dh_{AB} .

4.2 Erreur sur Do en fonction de l'erreur sur h_A

a) Cas où l'on passe par l'intermédiaire de Dh_{AB}

Rappelons la formule 13) $Do \approx Dh_{AB} \left(1 - \frac{h_i}{Ro}\right)$

Comme $h_i = h_A + \frac{\Delta h}{2}$ et comme on suppose ne pas commettre d'erreur sur Δh :

$$dh_i = dh_A$$

En différentiant 13) $dDo \approx - Dh_{AB} \frac{dh_i}{Ro}$, d'où :

$$15) dDo \approx - Dh_{AB} \frac{dh_A}{Ro}$$

b) Cas où l'on passe directement de Dp à Do

Reprenons la formule 14).

$$Do^2 = \frac{Dp^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{Ro}\right)\left(1 + \frac{h_B}{Ro}\right)}$$

En prenant la différentielle logarithmique :

$$2 \frac{dDo}{Do} = \frac{- \frac{dh_A}{Ro}}{1 + \frac{h_A}{Ro}} - \frac{\frac{dh_B}{Ro}}{1 + \frac{h_B}{Ro}}$$

Comme $h_B = h_A + \Delta h$ et qu'il n'y a pas d'erreur sur Δh , $dh_B = dh_A$. En se limitant à la partie principale :

$$16) dDo \approx - Do \frac{dh_A}{Ro}$$

Les formules 15) et 16) donnent des résultats quasi-identiques car $\frac{Do}{Ro}$ et $\frac{Dh_{AB}}{Ro}$ sont des petites quantités pratiquement égales.

Supposons que nous voulions obtenir sur Do une incertitude $|\Delta Do| < 0,5$ cm.

$|\Delta Do| = \frac{Do}{Ro} |\Delta h_A|$. Pour que $|\Delta Do| < 0,5$ cm, il faut

que :

$$|\Delta h_A| \leq 0,5 \times 10^{-2} \times \frac{Ro}{Do}$$

Dans l'application numérique du n° 2.2.3 :

$Do = 4360,631$ m.

$$|\Delta h_A| \leq 0,5 \times 10^{-2} \times \frac{6\,367\,000}{4360,631}$$

$$|\Delta h_A| \leq 7,3 \text{ m}$$

Si on avait une distance Do de longueur extrême 5 000 m, il faudrait $|\Delta h_A| \leq 6,37$ m.

Si on avait une distance Do de longueur 2 180 m, moitié de 4 360 m, il faudrait $|\Delta h_A| < 14,6$ m.

Rappelons que dans l'introduction, nous avons assimilé la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde à l'altitude (donc au-dessus du géoïde). La carte ci-dessous figure, en courbes de niveau d'équidistance 1 m, la surface du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de Clarke 1880, qui sert de surface de référence aux calculs de la triangulation française. On constate qu'à l'ouest de la ligne Forbach Bayonne l'altitude du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde ne dépasse pas 4 m. Cette quantité étant inférieure à l'incertitude 6,37 m mise en évidence pour une longueur de visée extrême 5 000 m, il n'y a pas lieu de tenir compte des dénivelées entre ellipsoïde et géoïde à l'ouest de la ligne Forbach Bayonne.

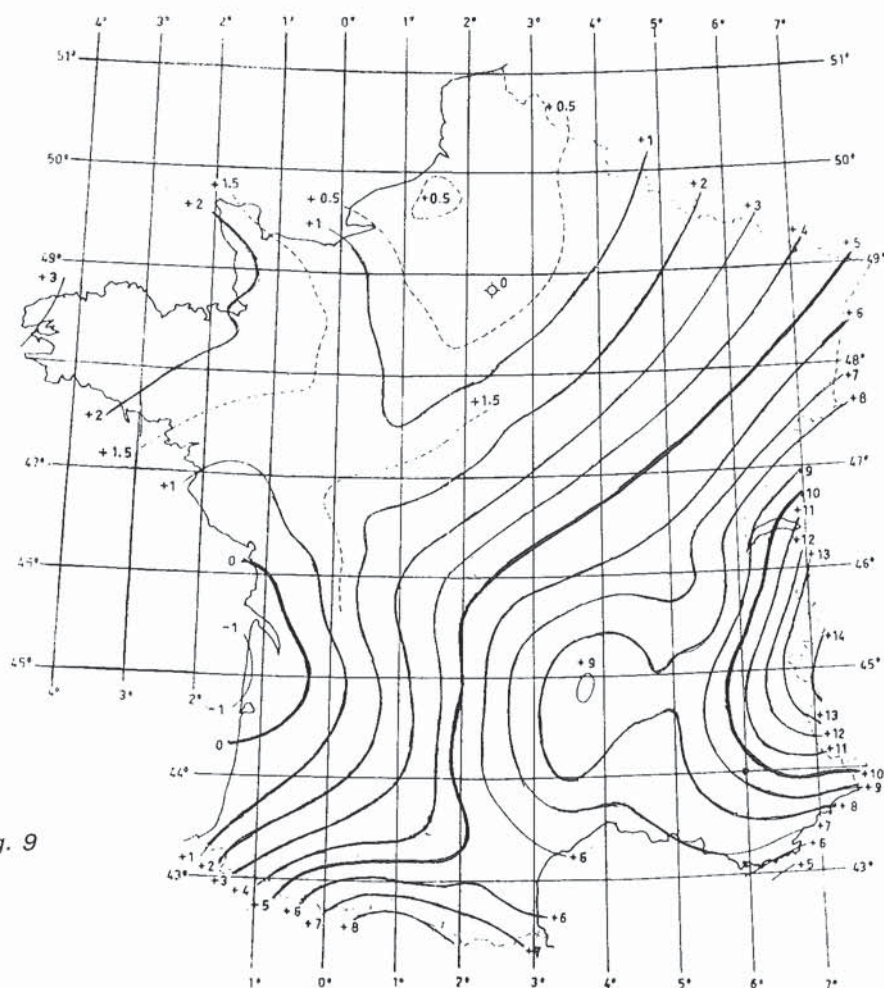
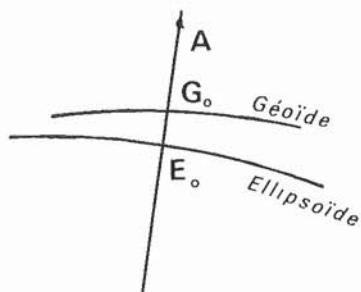


Fig. 9

Si pour de telles longues visées, on se trouve à l'est de la ligne Forbach-Bayonne, on pourra utiliser la carte du géoïde ci-dessus, dans laquelle le réseau des méridiens et parallèles géographiques a été tracé de degré en degré par rapport au méridien international de Greenwich. Il suffit de connaître à une fraction de degré près la longitude et la latitude du point de station pour pouvoir interpoler l'altitude du géoïde. Par exemple pour le point A situé à la longitude 6° est de Greenwich et de latitude 44°, on interpole 9,5 m.

Fig. 10



Pour avoir en ce point la hauteur $EoA = h_A$ du point de station au-dessus de l'ellipsoïde, il suffira d'ajouter à l'altitude $Z_A = G_0A$ (au-dessus du géoïde) la quantité ainsi mise en évidence :

$$h_A = EoA = G_0A + EoGo \text{ (fig. 10)}$$

$$h_A = Z_A + 9,5 \text{ m}$$

On constate sur la carte qu'en aucun point du territoire français la différence entre ellipsoïde et géoïde ne dépasse 14 m. Or nous avons vu que pour une visée de 2 180 m, il suffirait, pour garder la précision du demi-centimètre, d'avoir $|\Delta h_A| \leq 14,6 \text{ m}$.

Il en résulte que pour des visées de longueur inférieure à environ 2 250 m, on pourra sur l'ensemble du territoire français confondre hauteur au-dessus de l'ellipsoïde h , et altitude Z . Ce faisant, on ne commettra pas d'erreur supérieure à 0,5 cm.

4.2 Erreur sur Do en fonction de l'erreur sur Ro

a) Cas où l'on passe par l'intermédiaire de Dh_{AB}

Différentions la formule 13) par rapport à Ro :

$$17) dDo \approx \frac{Dh_{AB} \times h_l}{Ro^2} dRo$$

b) Cas où l'on passe directement de Dp à Do

Reprenons la formule 14), dont nous prendrons la différentielle logarithmique par rapport à Ro .

$$2 \frac{dDo}{Do} = \frac{h_A \frac{dRo}{Ro^2}}{1 + \frac{h_A}{Ro}} + \frac{h_B \frac{dRo}{Ro^2}}{1 + \frac{h_B}{Ro}}$$

dont la partie principale est :

$$\frac{dDo}{Do} \approx \frac{dRo}{Ro^2} \left(\frac{h_A + h_B}{2} \right); \text{ comme } h_l = \frac{h_A + h_B}{2} \text{ on a :}$$

$$18) dDo \approx \frac{Do \times h_1}{Ro^2} dRo$$

Les formules 17) et 18) donnent les résultats quasi-identiques puisque les petites quantités $\frac{Dh_{AB} \cdot h_1}{Ro^2}$ et $\frac{Doh_1}{Ro^2}$ sont pratiquement égales.

Application numérique

Reprenons l'application numérique du n° 2.2.3 où $Do = 4360,631$ m,

$$h_1 = h_A + \frac{\Delta h}{2} = 720,80 + \frac{437,435}{2}$$

$$h_1 = 939,52 \text{ m}$$

$$Ro = 6\,367\,000 \text{ m}$$

Supposons qu'on ait $dRo = 50 \text{ km} = 50\,000 \text{ m}$

$$\text{On trouve } dDo = \frac{4360,631}{6\,367\,000^2} \times 939,52 \times 50\,000$$

soit $dDo = 0,005 \text{ m}$

La petitesse de dDo justifie parfaitement que l'on prenne pour Ro le rayon de courbure moyen terrestre : $Ro = 6\,367 \text{ km}$. Il est absolument inutile, comme on le fait en géodésie, de calculer le rayon de courbure de la section normale de l'ellipsoïde par la relation d'Euler.

5. Cas de visées zénithales réciproques

Les formules que nous avons démontrées :

$$5) Dh_{AB} \approx Dp \cos \left(i' + \frac{\omega}{2} \right)$$

$$7) \Delta h \approx Dp \sin \left(i' + \frac{\omega}{2} \right)$$

$$8) \Delta h \approx Dh_{AB} \tan \left(i' + \frac{\omega}{2} \right)$$

concernent le cas d'une visée unilatérale, où l'on a stationné le point A et où l'angle de site observé est positif ; dans ce cas $i' = i - p$.

Lorsque l'angle de site observé i est négatif, il est facile de voir qu'il faut dans les formules précédentes remplacer $i' + \frac{\omega}{2}$ par $\frac{\omega}{2} - li'$, expression dans laquelle

$$li' = lil + p$$

Supposons qu'on ait à la fois A et B, réalisant ainsi des visées réciproques. Soient Z_A et Z_B les distances zénithales mesurées, Z'_A et Z'_B les distances zénithales corrigées de la réfraction.

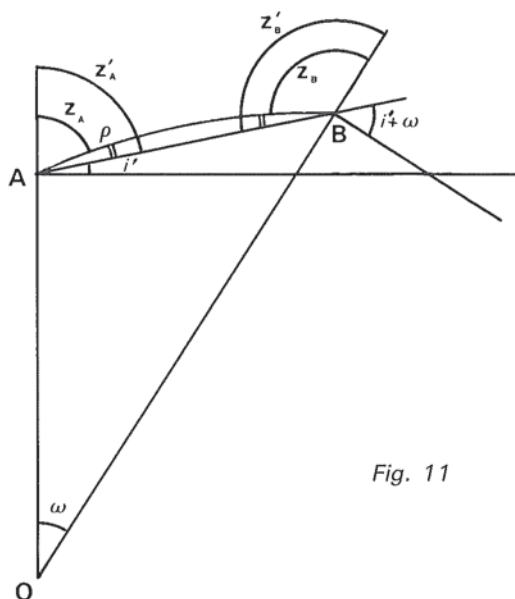


Fig. 11

$$Z'_A = Z_A + \rho$$

$$Z'_B = Z_B + \rho$$

Si les visées sont à la fois réciproques et simultanées on peut admettre qu'on a le même angle de réfraction en A et B, d'où la relation : $Z'_B - Z'_A = Z_B - Z_A$

On remarque sur la fig. 11 que : $i' = \frac{\pi}{2} - Z'_A$

$$i' + \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2} - (\pi - Z'_B) = Z'_B - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{En additionnant : } 2i' + \omega = Z'_B - Z'_A = Z_B - Z_A$$

$$i' + \frac{\omega}{2} = \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

Ainsi les formules 5, 7 et 8 deviennent :

$$5\text{bis}) Dh_{AB} \approx Dp \cos \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

$$7\text{bis}) \Delta h \approx Dp \sin \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

$$8\text{bis}) \Delta h \approx Dh_{AB} \tan \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

Ces formules sont utilisées en géodésie pour des visées ne dépassant pas une dizaine de km. Pour des portées plus longues, ou pour avoir davantage de précision, il suffit d'introduire $\cos \frac{\omega}{2}$ en dénominateur.

Ainsi les formules géodésiques peuvent-elles être obtenues à partir des formules topométriques, que nous avons démontrées directement en supposant que la visée était unilatérale et en adoptant les conditions moyennes de réfraction.

On aurait pu faire l'inverse, c'est-à-dire déduire les formules topométriques, relatives à une visée unilatérale, des formules géodésiques relatives à des visées réciproques.

Il est évident que la détermination de Dh_{AB} et celle de Δh a une précision plus grande lorsque les visées sont réciproques et encore meilleure si les visées sont réciproques et simultanées.

6. Conclusion

Lorsqu'on procède à des mesures électromagnétiques de distances longues et surtout si celles-ci sont inclinées, il faut respecter une rigueur géodésique. On a intérêt à effectuer des mesures de distances zénithales réciproques et si possible simultanées qui réduisent au minimum l'incertitude sur les conditions de réfraction atmosphériques. Dans ce cas, on utilise les formules géodésiques 5bis, 7bis, 8bis.

Si on se contente d'une visée unilatérale, il faut tenir compte des conditions moyennes de réfraction même pour le calcul de la distance.

Il n'est pas indispensable de calculer la distance réduite à l'horizon d'altitude moyenne, comme on le fait habituellement en topométrie. On peut calculer directement Do par la formule 14) et la dénivelée par la formule 7).

Mais si on calcule la distance Dh_{AB} réduite à l'horizon du point d'altitude moyenne, il faut absolument utiliser l'une des 4 méthodes exposées en 2.2.1 et ne pas se contenter de la formule $Dh_{AB} = Dp \cos i$, car on fait alors une erreur pouvant dans certains cas dépasser 10 cm (voir tableau II), une telle erreur étant inadmissible, compte tenu de la précision des instruments modernes de mesure électromagnétique des distances.