Clothoïde unique de raccordement entre deux circonférences

par José F. ZELASCO
Diplômé d'Étude Approfondie
Spécialité Sciences Géodésiques

Lors de l'étude et la réalisation de projets routiers, la géométrie des tracés peut bénéficier aujourd'hui des facilités d'emploi des calculatrices électroniques de bureau et même de poche. Il est désormais permis d'adopter des méthodes de calcul mettant en œuvre des formules mathématiques plus complètes pour les raccordements par clothoïdes et également plus précises que les formules approchées utilisées jusqu'alors, réduisant et même supprimant l'usage de certaines tables.

En outre, ces méthodes permettent l'emploi systématique de courbes circulaires de grand rayon, à la place d'alignements droits comme il est d'usage habituellement, autorisant ainsi une meilleure adaptation de la géométrie du tracé aux caractéristiques du terrain (crêtes de collines, rivières, zones suburbaines, pistes existantes et même courbes de niveau) et réduisant de ce fait le coût des terrassements.

Pour définir géométriquement une courbe circulaire, on choisit trois points de passage ce qui permet d'obtenir les coordonnées du centre et le rayon de courbure.

Il reste alors à résoudre, pour définir le tracé, le problème du raccordement par clothoïde entre deux circonférences consécutives de grand rayon ainsi définies, ou entre une telle circonférence de grand rayon et une autre de plus faible rayon qui, dans la procédure classique habituelle, s'intercalait entre deux alignements droits.

Bien entendu, la méthode s'appliquera aussi au raccordement entre deux circonférences de petit rayon (route de montagne).

Nous nous proposons donc ici de résoudre ce problème du raccordement, par une clothoïde unique, de deux courbes circulaires dont les courbures peuvent aussi bien être soit de même sens (courbe en "ove"), soit de sens contraire ("contre-courbe" ou courbe en "S").

Il est montré ci-après comment obtenir le paramètre de la clothoïde unique de raccordement et définir ainsi le tracé qui sera par conséquent le plus harmonieux, avec le plus grand coefficient de confort et de sécurité pour une vitesse donnée, la courbure de la trajectoire variant d'une façon continue et uniforme depuis la courbure de la première circonférence jusqu'à celle de la deuxième, éventuellement en passant par la valeur zéro (point d'inflexion de la clothoïde) si les courbures des deux circonférences sont de sens opposés.

L'usage d'une courbe de raccordement unique entre deux circonférences est ainsi facilité et son emploi peut donc être proposé beaucoup plus largement.

Le paramètre de la clothoïde unique est calculé en fonction, d'une part, des rayons des deux circonférences et, d'autre part, de la plus courte distance entre les deux circonférences.

Les points de raccordement entre la clothoïde unique et chacune des deux circonférences sont ensuite déterminés ainsi que le point d'inflexion, qui peut être utile, tout au moins dans le cas d'une courbe en "S".

Enfin, l'implantation de la clothoïde est proposée à partir d'un point quelconque de la courbe.

1. RAPPEL DE L'ÉTUDE DE LA CLOTHOÏDE

Pour des raisons d'ordre pratique, on emploie, dans les formules, des lettres majuscules pour les éléments d'une clothoïde à paramètre différent de l'unité (éléments terrain) et des minuscules pour les éléments relatifs à la clothoïde unitaire. Pour les invariants (indépendants du paramètre) on utilise les minuscules de l'alphabet grec.

1.1 Définition de la clothoïde

La clothoïde est définie comme étant la courbe plane dont la courbure, (inverse du rayon de courbure), en un point varie linéairement avec l'abscisse curviligne de ce point sur la courbe. L'abscisse curviligne S est comptée positivement et négativement de part et d'autre du point O pour lequel la courbure est nulle (point d'inflexion).

Soit R le rayon de courbure au point d'abscisse curviligne S. Nous avons :

$$(1) \quad RS = A^2.$$

A est une constante appelée PARAMÈTRE de la clothoïde, A est homogène à une longueur.

1.2 Équation de la clothoïde

La courbe est symétrique par rapport au point O pris comme origine des coordonnées et la tangente à la courbe en ce point (droite ausculatrice puisque la courbure est nulle en ce point) est choisie comme axe des x (figure 1).

L'équation réduite de la clothoïde s'obtient en posant :

$$(2) \quad \frac{R}{A} = r \text{ et } \frac{S}{A} = s$$

r est le rayon de courbure réduit et s l'abscisse curviligne réduite.

Nous avons

$$(3) \quad rs = 1$$

C'est l'équation de la clothoïde unitaire.

Soit τ(tau) l'angle que fait la tangente au point d'abscisse s avec l'axe Ox. Par définition de la courbure nous avons :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds} \text{ (différentielle de } \tau \text{ par rapport à s)}$$

$$\text{ou } s = \frac{d\tau}{ds}$$

$$\text{ou encore } d\tau = s ds$$

et en intégrant :

$$(4) \quad \tau = \frac{s^2}{2}$$

τ étant nul pour s = O il n'y a pas de constante d'intégration. τ est ainsi exprimé en radians.

En un point M de la courbe, de coordonnées x et y, nous pouvons écrire les 2 équations différentielles :

$$dx = \cos\tau \, .ds$$
$$dy = \sin\tau \, .ds$$

ou encore

$$(5) \quad dx = \cos\frac{s^2}{2} \, . \, ds$$

$$dy = \sin\frac{s^2}{2} \, . \, ds$$

Les équations réduites paramétriques de la clothoïde unitaire sont obtenues par les intégrales :

$$(6) \quad x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2} \, . \, ds$$

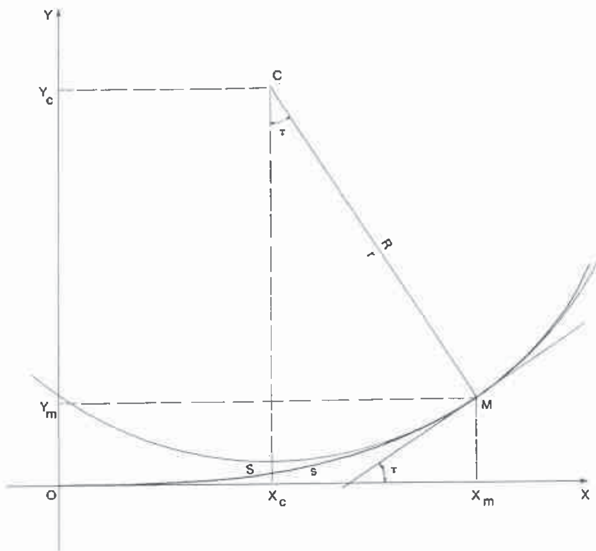
$$y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2} \, . \, ds$$

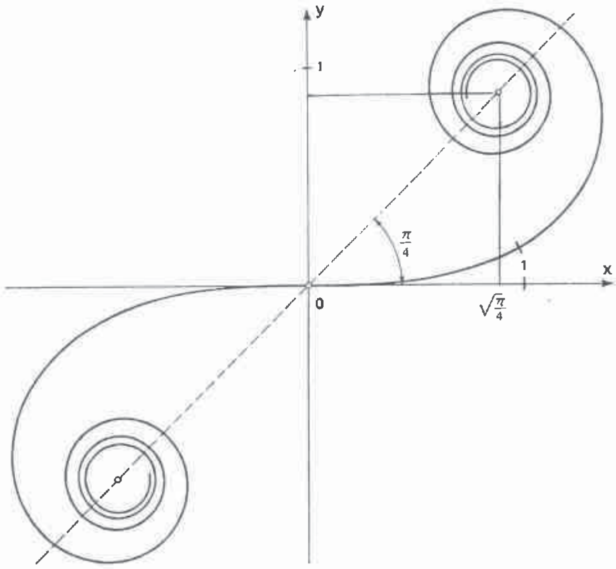
On démontre que la courbe admet comme points asymptotes (quand s tend vers l'infini) les points de coordonnées :

$$x = y = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (figure 2)}$$

1.3 Cercle ausculateur à la clothoïde

En un point M de la clothoïde unitaire, de coordonnées x_M et y_M, le rayon de courbure est r et la tangente à la courbe fait l'angle τ avec l'axe des x (figure 1).





Les coordonnées du centre C du cercle ausculateur en M sont donc

$$(7) \quad x_c = x_M - r\sin\tau \quad = x_M - \frac{1}{s}\sin\frac{s^2}{2}$$

$$y_c = y_M + r\cos\tau \quad = y_M + \frac{1}{s}\cos\frac{s^2}{2}$$

2. CLOTHOÏDE DE RACCORDEMENT ENTRE 2 CIRCONFÉRENCES

2.1 Formules développées

Dans la pratique, seule la partie de la clothoïde voisine et de part et d'autre du point O est utilisée pour les tracés géométriques. L'abscisse curviligne s dépasse rarement l'unité.

Il est commode alors d'utiliser, pour ce qui suit, le développement en série limitée pour exprimer les coordonnées du point courant M sur la clothoïde et celles du centre de courbure C en ce point.

D'après les équations (5) on peut écrire en développant :

$$(8)\quad \frac{dx}{ds} = \cos\frac{s^2}{2} = 1 - \frac{s^4}{8} + \frac{s^8}{384} - \frac{s^{12}}{46080} + \dots$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\frac{s^2}{2} = \frac{s^2}{2} - \frac{s^6}{48} + \frac{s^{10}}{3840} - \dots$$

d'où, en intégrant, nous avons les équations paramétriques de la clothoïde :

$$(9)\quad x_M = s - \frac{s^5}{40} + \frac{s^9}{3456} - \dots$$

$$y_M = \frac{s^3}{6} - \frac{s^7}{336} + \frac{s^{11}}{42240} - \dots$$

Les coordonnées du centre de courbure C au point M sont données par les relations (7). En développant nous avons :

$$x_c = s - \frac{s^5}{40} + \frac{s^9}{3456} - \dots$$

$$-\frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^6}{48} + \frac{s^{10}}{3840} - \dots\right)$$

$$y_c = \frac{s^3}{6} - \frac{s^7}{336} + \frac{s^{11}}{42240} - \dots$$

$$+\frac{1}{s}\left(1 - \frac{s^4}{8} + \frac{s^8}{384} - \frac{s^{12}}{46080} + \dots\right)$$

et en ordonnant, nous avons

$$(10)\quad x_c = \frac{s}{2} - \frac{s^5}{240} + \frac{s^9}{34560} - \dots$$

$$y_c = \frac{1}{s} + \frac{s^3}{24} - \frac{s^7}{2688} + \frac{s^{11}}{506880} - \dots$$

2.2. Distance C entre les centres C_1 et C_2 de deux circonférences

Les coordonnées réduites des centres C_1 et C_2 sont x_{c1}, y_{c1} et x_{c2} y_{c2} et la distance c les séparant est donnée par la formule :

$$c^2 = (x_{c1} - x_{c2})^2 + (y_{c1} - y_{c2})^2$$

En exprimant les coordonnées des centres par les expressions développées (10) nous avons :

$$(11)\quad c^2 = \left(\frac{s_1 - s_2}{2} - \frac{s_1^5 - s_2^5}{240} + \frac{s_1^9 - s_2^9}{34560}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} + \frac{s_1^3 - s_2^3}{24} - \frac{s_1^7 - s_2^7}{2688} + \frac{s_1^{11} - s_2^{11}}{506880}\right)^2$$

En développant et en ordonnant :

— le 1^{er} terme, de degré -2 en s_1 et s_2 est :

$$\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right)^2$$

(12a). Il peut s'écrire $(r_1 - r_2)^2$

— le 2^e terme, de degré 2 en s_1 et s_2 est :

$$\left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right)\left(\frac{s_1^3 - s_2^3}{24}\right)$$

En remplaçant $\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}$ par $-\frac{s_1 - s_2}{s_1 s_2}$

et $s_1^3 - s_2^3$ par $(s_1 - s_2)(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^3)$

le terme de degré 2 peut s'écrire :

$$\frac{(s_1 - s_2)^2}{12 s_1 s_2}(3 s_1 s_2 - s_1^2 - s_1 s_2 - s_2^2)$$

et encore :

$$(12b)\quad -\frac{(s_1 - s_2)^4}{12 s_1 s_2}$$

— le 3^e terme, de degré 6 en s_1 et s_2, est :

$$-\frac{(s_1 - s_2)(s_1^5 - s_2^5)}{240} + \left(\frac{s_1^3 - s_2^3}{24}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right)\left(\frac{s_1^7 - s_2^7}{2688}\right)$$

Après des transformations intermédiaires analogues aux précédentes, cette expression peut se mettre sous la forme:

$$\frac{(s_1 - s_2)^2}{20160 s_1 s_2}(15 s_1^6 - 34 s_1^5 s_2$$

$$+ s_1^4 s_2^2 + 36 s_1^3 s_2^3 + s_1^2 s_2^4 - 34 s_1 s_2^5 + 15 s_2^6)$$

puis encore :

$$\frac{(s_1 - s_2)^6}{20160 s_1 s_2}(15 s_1^2 + 26 s_1 s_2 + 15 s_2^2)$$

et enfin :

$$(12c)\quad \frac{(s_1 - s_2)^8}{1344 s_1 s_2} + \frac{(s_1 - s_2)^6}{360}$$

— le 4^e terme, de degré 10 en s_1 et s_2, est :

$$\frac{(s_1 - s_2)(s_1^9 - s_2^9)}{34560} + \left(\frac{s_1^5 - s_2^5}{240}\right)^2 - \frac{(s_1^3 - s_2^3)(s_1^7 - s_2^7)}{32256} - \frac{(s_1 - s_2)(s_1^{11} - s_2^{11})}{253440\, s_1 s_2}$$

Après transformations intermédiaires, l'expression peut se mettre sous la forme :

(12d)

$$-\frac{(s_1 - s_2)^{12}}{253440\, s_1 s_2} - \frac{17\,(s_1 - s_2)^{10}}{604800} - \frac{s_1 s_2 (s_1 - s_2)^8}{20160}$$

On observera que $s_2 - s_1 = l$ longueur de l'arc de la clothoïde séparant les 2 points de contact des 2 circonférences.

On posera en outre :

$$\rho\,(\text{rho}) = \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)^2}$$

De la sorte l'expression de C^2 s'écrira :

(12) $c^2 = (r_1 - r_2)^2$

$$-\frac{1}{s_1 s_2}\left[\frac{l^4}{12} - \left(\frac{1}{1344} + \frac{\rho}{360}\right) l^8 + \left(\frac{1}{253440} + \frac{17\rho}{604800} + \frac{\rho^2}{20160}\right) l^{12}\right]$$

2.3 Calcul de l'arc de clothoïde unitaire entre les points de contact des 2 circonférences

En observant que $\frac{1}{s_1 s_2} = r_1 r_2$ et en multipliant les 2 membres de l'égalité par A^2 il vient, C étant la distance entre les centres des 2 circonférences :

(13) $C^2 = (R_1 - R_2)^2$

$$-2R_1R_2\left[\frac{l^4}{24} - \left(\frac{3}{14} + \frac{4}{5}\rho\right)^2 \left(\frac{l^4}{24}\right) + \left(\frac{3}{110} + \frac{34}{175}\rho + \frac{12}{35}\rho^2\right)\left(\frac{l^4}{24}\right)^3\right]$$

Nous avons en (13) une expression permettant le calcul de $l^4/24$ donc de "l" en fonction de C et R_1 et R_2. En effet "ρ" peut s'exprimer en fonction de R_1 et R_2 :

$$\rho = \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)^2} = \left(\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2}\right)^2 \frac{1}{s_1 s_2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)^2 s_1 s_2} = \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2}$$

(14) $\rho = \frac{R_1 R_2}{(R_1 - R_2)^2}$

ρ est donc positif pour une courbe de raccordement entre deux circonférences de même sens de courbure (courbe en "Ove"), ρ est négatif dans l'autre cas (courbe en "S").

La longueur l s'obtient donc ainsi en résolvant une équation de degré 3. On peut se ramener à une équation de degré 2 en négligeant le terme en l^{12} mais ce n'est pas toujours justifié.

Nous allons obtenir l plus facilement en exprimant la quantité $l^4/24$ en fonction de la plus courte distance K entre les deux circonférences (figure 3).

La distance C entre les centres, la plus courte distance K entre les deux circonférences, les rayons R_1 et R_2 de ces circonférences sont liés par la relation:

$R_1 = C + R_2 + K$ dans le cas d'une courbe "Ove"
$C = - R_1 + R_2 + K$ dans le cas d'une courbe en "S", en convenant que dans ce cas, où R_1 et R_2 sont de signes contraires, R_1 est négatif.

Dans les 2 cas : $|C| = -(R_1 - R_2) + K$
d'où $C^2 = (R_1 - R_2)^2 - 2K(R_1 - R_2) + K^2$

et en posant λ (lambda) $= \frac{K(R_1 - R_2)}{R_1 R_2}$

nous avons :

(15) $C^2 = (R_1 - R_2)^2 - 2R_1R_2\left(\lambda - \frac{\rho}{2}\lambda^2\right)$

En comparant les expressions (13) et (15) on écrit :

(16) $$\lambda - \frac{\rho}{2}\lambda^2 = \frac{l^4}{24} - \left(\frac{3}{14} + \frac{4}{5}\rho\right)\left(\frac{l^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{3}{110} + \frac{34}{175}\rho + \frac{12}{35}\rho^2\right)\left(\frac{l^4}{24}\right)^3$$

On en déduit l'expression de $l^4/24$ sous la forme d'un développement en série, limité à l'ordre 3 en λ :

(17) $$\frac{l^4}{24} = \lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\rho\right)\lambda^2 + \frac{1}{35}\left(\frac{174}{77} + \frac{97}{10}\rho + \frac{24}{5}\rho^2\right)\lambda^3$$

En posant par commodité :

$$R_d = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

les expressions λ et ρ s'écrivent :

$$\lambda = \frac{K}{R_d} \qquad \rho = \frac{R_d}{R_1 - R_2}$$

On remarquera que R_d est la courbure d'un cercle égale à la différence de courbure des deux cercles à raccorder. En effet :

$$\frac{1}{R_d} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

2.4 Calcul du paramètre A de la clothoïde

Le paramètre A de la clothoïde est alors :

(18) $A = lRd$

d'où

$$(19) \quad A^4 = 24\left[R_d^3 K + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\rho\right) R_d^2 K^2 + \frac{1}{35}\left(\frac{174}{77} + \frac{97}{10}\rho + \frac{24}{5}\rho^2\right) R_d K^3\right]$$

(19bis) $A^4 =$

$$24 R_d^3 K \left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{7R_d} + \frac{1}{5(R_1 - R_2)}\right) K + \left(\frac{174}{77R_d^2} + \frac{97}{10(R_1 - R_2) R_d} + \frac{24}{5(R_1 - R_2)^2}\right)\frac{K^2}{35}\right]$$

2.5 Longueur L de la clothoïde de raccordement

La longueur L de la clothoïde entre les deux points de raccordement aux circonférences est donnée par les formules :

(20) $L = lA$

ou (21) $L = \dfrac{A^2}{R_d}$

2.6 Cas de la clothoïde de raccordement entre une droite et un cercle de rayon R

Dans ce cas $R_d = R$ $\quad \rho = 0$ et $\quad l = s$

La distance entre le cercle et la droite est appelée E. Les formules (17), (18) et (19) deviennent :

$$(22) \quad \frac{s^4}{24} = \lambda + \frac{3}{14}\lambda^2 + \frac{174}{2695}\lambda^3$$

$$= \lambda\left[1 + \frac{3}{14}\lambda\left(1 + \frac{116}{385}\lambda\right)\right]$$

(23) $A = sR$

$$(24) \quad A^4 = 24\left[R^3 E + \frac{3}{14} R^2 E^2 + \frac{174}{2695} R E^3\right]$$

On en déduit :

$$(24\text{ bis}) \quad L^2 = 24\left[RE + \frac{3}{14}E^2 + \frac{174}{2695}\frac{E^3}{R}\right]$$

3. DÉFINITION DU TRACÉ GÉOMÉTRIQUE

La connaissance du paramètre A de la clothoïde de raccordement entre les 2 circonférences, et par conséquent la connaissance de la longueur L de clothoïde entre les 2 points de raccordement, permet la définition complète de la courbe.

Les abscisses curvilignes réduites s_1 et s_2 des points de raccordement de la clothoïde et des circonférences sont :

$$(25) \quad s_1 = \frac{A}{R_1} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{A}{R_2}$$

On vérifiera que $s_2 - s_1 = l = \dfrac{L}{A}$

Le calcul des coordonnées réduites des centres des circonférences est obtenu par les formules (10)

Tous les points nécessaires de la clothoïde et en particulier les points de raccordement aux 2 circonférences peuvent être calculés en coordonnées réduites par les formules (9).

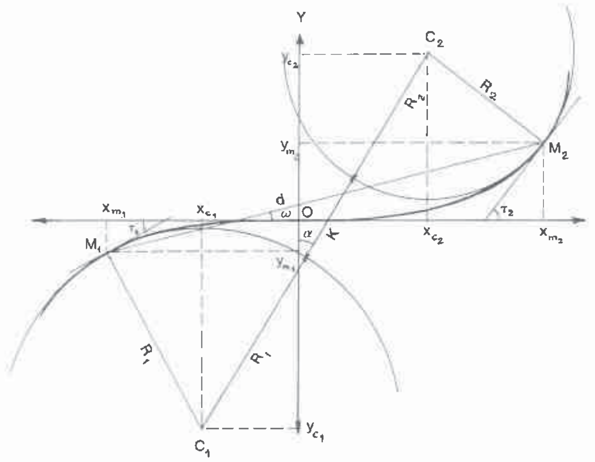
Pour en obtenir les coordonnées dans le système terrain on est amené à une transformation de coordonnées sur 2 points : les 2 centres des circonférences qui sont connus dans les 2 systèmes.

Le rapport d'échelle est A et l'angle de rotation est la différence des gisements (azimuts) de la ligne des centres entre les 2 systèmes de coordonnées.

Mais à cette méthode classique, nous préférons ici une méthode plus directe évitant le calcul des coordonnées réduites.

3.1 Gisement de la ligne des centres de 2 circonférences

L'angle α (alpha) que fait la ligne joignant les centres de 2 circonférences avec la perpendiculaire à la tangente au point d'inflexion de la clothoïde est donné par (figure 3) :



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_{c_1} - x_{c_2}}{y_{c_1} - y_{c_2}}$$

En exprimant les coordonnées des centres par les développements en série donnés par les formules (10) et en utilisant le coefficient ρ défini en (14), nous avons avec $l = L/A$:

$$(26)\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\rho l^2}{2}\left[1-\left(\frac{1}{120}-\frac{\rho^2}{12}\right) l^4 + \left(\frac{1}{17280}-\frac{\rho}{5040}-\frac{\rho^2}{480}+\frac{\rho^4}{120}\right) l^8\right]$$

et en exprimant directement l'angle α à partir de la formule de l'arc tangente nous avons à π près (200 grades) :

$$(27)\quad \alpha = \frac{\rho l^2}{2}\left[1-\frac{l^4}{120}+\frac{l^8}{17280}-\frac{\rho\, l^8}{5040}\right]$$

ou encore

$$\alpha = -\frac{\rho l^2}{2}\left[1-\frac{l^4}{120}\left(1-\frac{l^4}{144}+\frac{\rho\, l^4}{42}\right)\right]$$

On remarque que la formule (27) donnant directement l'angle est plus simple que celle donnant la tangente.

Soit G le gisement (azimut) de la direction de la droite joignant les centres C_1 et C_2 des deux circonférences.

L'angle de rotation entre le système de coordonnées terrain et le système de coordonnées réduites de la clothoïde unitaire est alors, à π près :

(28) $G-\alpha$

3.2 Coordonnées des points de raccordement

Les points P_1 et P_2 de raccordement de l'arc de clothoïde avec les 2 circonférences (figure 4) sont calculés directement, à partir des coordonnées connues des centres C_1 et C_2 des circonférences, par rayonnement : les distances sont respectivement les rayons R_1 et R_2 et les angles que font les rayons C_1P_1 et C_2P_2 avec la perpendiculaire à la tangente au point d'inflexion de la clothoïde sont, suivant la formule (4), les suivants à π près (200 grades) :

$$\tau_1 = \frac{s^2_1}{2} \qquad\qquad \tau_2 = \frac{s_2^2}{2}$$

Dans le système de coordonnées terrain, les gisements des rayons $C_1\,R_1$ et $C_2\,R_2$ sont donc à π près :

$$\tau_1 + G - \alpha \qquad\qquad \tau_2 + G - \alpha$$

3.3 Corde entre 2 points sur la clothoïde

Entre 2 points appartenant à la clothoïde unitaire dont les coordonnées répondent aux formules (9) la distance d est donnée par la formule (figure 3) :

$$(29)\quad d = l-\left(\frac{1}{90}+\frac{\rho}{24}\right) l^5 + \left(\frac{1}{22680}+\frac{37\,\rho}{120960}+\frac{\rho^2}{1920}\right) l^9$$

Cette formule s'établit par un calcul analogue à celui ayant donné la formule (12).

L'angle que fait la corde entre les deux points de la courbe et la tangente à la clothoïde au point d'inflexion est donné par la formule :

$$(30)\quad \omega = \left(\frac{1}{6}+\frac{\rho}{2}\right) l^2 - \left(\frac{1}{2835}+\frac{\rho}{720}\right) l^6$$

Cette formule s'établit par un calcul analogue à celui ayant conduit à la formule (27).

3.4 Coordonnées du point d'inflexion de la clothoïde

Dans le cas précédent, si l'une des extrémités de la corde est le point O d'inflexion de la clothoïde :

$\rho = 0$

l = s abscisse curviligne de l'autre extrémité de la corde.

Les formules (29) et (30) deviennent :

$$(31)\quad d = s-\frac{s^5}{90}+\frac{s^9}{22680}$$

$$(32)\quad \omega = \frac{s^2}{6}-\frac{s^6}{2835}$$

Les coordonnées, dans le système terrain, du point d'inflexion de la clothoïde s'obtiendront de deux façons, à partir de chacun des points P_1 et P_2 de raccordement de la clothoïde avec les deux circonférences, formant ainsi une polygonale $C_1\,P_1\,OP_2\,C_2$ reliant les centres des 2 circonférences (figure 4).

— Rayonnement à partir de P_1, sur le gisement

$G - \alpha + \omega_1 - \frac{\pi}{2}$ à π près avec la distance $D_1 = Ad_1$

— Rayonnement à partir de P_2 sur le gisement

$G - \alpha + \omega_2 - \frac{\pi}{2}$ à π près avec la distance $D_2 = Ad_2$

4. IMPLANTATION POLAIRE DE LA CLOTHOÏDE

Par arcs égaux à partir d'un point de la courbe.

Tout point de la clothoïde peut être calculé en coordonnées terrain par rayonnement à partir du point d'inflexion O au moyen des formules (31) et (32) et implanté sur le terrain à partir des points connus du canevas de base. La méthode est toutefois assez laborieuse.

Il est préférable d'utiliser, pour une implantation de points relativement serrés, l'implantation semi-polaire à partir d'un point de la courbe.

On peut procéder à l'implantation à partir:

— du point d'inflexion
— des points de raccordement
— de tout autre point isolé de la courbe qui aura été implanté et dont la direction de la tangente à la clothoïde aura été déterminée.

L'implantation semi-polaire est analogue à la méthode bien connue des arcs égaux, utilisée habituellement pour l'implantation des circonférences.

4.1 Implantation d'une circonférence (rappel)

L'implantation d'un cercle de rayon R, à partir d'un point de station S de sa circonférence, est réalisée en implantant les extrémités successives M_1 M_2... M_n... d'arcs tous égaux, de longueur L_c, dans des directions successives formant entre elles un angle $\widehat{M_n S M_{n-1}}$ constant, angle de l'arc capable, égal à

$$(33) \quad \frac{L_c}{2R}$$

Le premier point M_1 est implanté à la distance L_c de la station en ouvrant cet angle constant à partir de la tangente au cercle au point stationné.

Le point M_n est implanté à la distance L_c du point précédent M_{n-1}, assimilant ainsi corde et arc de cercle. Ceci n'est bien entendu admissible que pour les cercles de grand rayon pour lequel le rapport L_c/R est petit.

4.2 Implantation de la clothoïde à partir du point d'inflexion

L'implantation d'une clothoïde de paramètre A suffisamment grand peut être réalisée, à partir du point d'inflexion, par la même méthode, en implantant les extrémités successives M_1 M_2... M_n... d'arcs tous égaux, de longueur L_c, dans des directions successives formant entre elles un angle $\widehat{M_n O M_{n-1}}$ qui variera, à partir de la direction de la tangente au point d'inflexion, suivant une progression :

$$(34) \quad (2n - 1)\frac{L_c^2}{6A^2}$$

dont le premier terme est $\frac{L_c^2}{6A^2}$ et la raison $\frac{L_c^2}{3A^2}$

n étant le numéro d'ordre du point.

La somme de ces angles jusqu'à la n^e direction c'est-à-dire l'angle qui sous-tendra l'arc $L = nL_c$ est bien :

$$\Sigma_1^n (2n - 1) \times \frac{L_c^2}{6A^2} = n^2\frac{L_c^2}{6A^2} = \frac{L^2}{6A^2}$$

(voir formule (32) limitée au 1er terme)

4.3 Implantation de la clothoïde à partir d'un point de la courbe

L'implantation de la clothoïde de paramètre A, à partir d'un point de station S quelconque de la courbe, est réalisée, encore de la même façon, en implantant les extrémités successives M_1 M_2... M_n... d'arcs tous égaux, dans des directions successives formant entre elles un angle $\widehat{M_n S M_{n-1}}$ qui variera, à partir de la direction de la tangente à la clothoïde au point de station, suivant une progression :

$$(35) \quad (2n - 1)\frac{L_c^2}{6A^2} + \frac{L_c}{2R}$$

dont le premier terme est $\frac{L_c^2}{6A^2} + \frac{L_c}{2R}$ et la raison $\frac{L_c^2}{3A^2}$

— n est le numéro d'ordre du point

— R est le rayon de courbure de la clothoïde au point de station

— L_c sera pris positif ou négatif suivant que l'on implante l'arc de la clothoïde à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle ausculateur au point de station ou autrement dit suivant que l'on s'éloigne du point d'inflexion ou que l'on s'en rapproche.

La somme de ces angles jusqu'à la n^e direction c'est-à-dire l'angle qui sous-tendra l'arc $L = nL_c$ est :

$$\Sigma_1^n (2n - 1)\frac{L_c^2}{6A^2} + \frac{nL_c}{2R} = \frac{n^2L_c^2}{6A^2} + \frac{nL_c}{2R}$$

c'est-à-dire :

$$(36) \quad \frac{L^2}{6A^2} + \frac{L}{2R}$$

La justification de l'expression (36) vient de la formule (30)

$$\omega = \frac{l^2}{6} + \frac{\rho l^2}{2}$$

dans laquelle $\rho = \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)^2} = \frac{s_1 s_2}{l^2}$

$$\rho l^2 = s_1 s_2$$

s_1 abscisse curviligne du point de station $= s = \frac{S}{A}$

s_2 abscisse curviligne du point implanté $=$

$$s + l = \frac{S + L}{A}$$

$$\rho l^2 = \frac{S (S + L)}{A^2}$$

d'où $\omega = \frac{L^2}{6A^2} + \frac{S (S + L)}{2A^2}$

or $\frac{S}{A^2} = \frac{1}{R}$ et $\frac{S^2}{2A^2} = \frac{s^2}{2} = \tau$

d'où enfin $\omega = \frac{L^2}{6A^2} + \frac{L}{2R} + \tau$

L'expression (36) est bien égale à la différence $\omega - \tau$ entre les directions du point implanté (de rang n) et de la tangente à la clothoïde au point de station.

On remarquera que l'expression (35) n'est autre que la somme ou la différence des expressions (34) et (33). Cela montre que l'implantation de la courbe à partir d'un point de station quelconque sur la clothoïde s'obtient facilement en superposant les angles entre les directions d'implantation vers des extrémités successives sur le cercle ausculateur au point de station et sur la clothoïde à partir du point d'inflexion, pour des mêmes éléments de longeur L_c.

4.4 Implantation de points métriques imposés à intervalle constant

On tirera utilement parti de cette méthode dans le cas où on devra implanter des points sur un tracé, dont les abscisses curvilignes (points kilométriques ou points métriques) sont imposées à intervalle constant L_c pour le report des profils en travers du projet par exemple.

Dans le cas général, le point de station S sur la clothoïde est quelconque. Il n'est pas lui-même un des points métriques imposés. Le point de station est à une distance L_0 du point métrique imposé M_0 le plus proche auquel nous donnerons le numéro d'ordre zéro.

L'implantation de M_0 se fera à partir de la station S, à la distance L_0, sur la direction SM_0 qui fera avec la direction de la tangente à la courbe, l'angle

$$\frac{L_0^2}{6A^2} + \frac{L_0}{2R} \quad \text{(formule 35)}$$

L_0 sera pris, comme L_c, positif ou négatif suivant que M_0 est implanté en s'éloignant du point d'inflexion ou en s'en rapprochant.

L'implantation de la clothoïde est ensuite réalisée, encore de la même façon, en implantant les extrémités successives M_1 M_2... M_n... d'arcs tous égaux de longueur L_c, dans des directions successives formant entre elles un angle $\widehat{M_n S M_{n-1}}$ qui variera, à partir de la direction SM_0, suivant une progression :

$$(37) \quad (2n - 1)\frac{L_c^2}{6A^2} + \frac{L_0 L_c}{3A^2} + \frac{L_c}{2R}$$

dont le premier terme (angle $\widehat{M_0 S M_1}$) est

$$(38) \quad \frac{L_c^2}{6A^2} + \frac{L_0 L_c}{3A^2} + \frac{L_c}{2R}$$

et la raison $\frac{L_c^2}{3A^2}$

n étant le numéro du point.

5. APPLICATION NUMÉRIQUE

5.1 Calcul des éléments de la clothoïde

Un tableau montre, à partir des éléments relatifs à deux circonférences (coordonnées du centre et rayon), le calcul du paramètre de la clothoïde de raccordement puis le calcul des coordonnées des points de raccordement P_1 et P_2 et du point d'inflexion O.

Les calculs ont été poussés avec un nombre de décimales qui peut paraître excessif. Il faut toutefois considérer que, si l'on veut obtenir la distance K entre les deux cercles avec un nombre raisonnable de chiffres significatifs, il faut exprimer la distance des centres C avec plus de décimales que n'en comportent les coordonnées et les rayons de départ.

Enfin ce surcroît de décimales montre la précision des formules si l'on veut bien regarder la concordance des résultats pour les deux déterminations du point d'inflexion.

5.2 Implantation de la clothoïde

L'implantation de la clothoïde est proposé à partir d'une station située au point de raccordement P_1 dont la distance métrique sur le tracé est quelconque. Les gisements d'implantation sont calculés pour les points d'abscisses curvilignes rondes tous les 20 mètres.

IMPLANTATION DE LA CLOTHOIDE

- Station d'implantation	P_1
- Gisement de la courbe au point de station	$305^G\ 4594$
- Distance métrique sur le tracé	1731.40
- Rayon de courbure au point de station	R = 350.504
- Paramètre de la clothoïde	A = 175.393

Les abscisses augmentent de la station vers le point d'inflexion

Implantation des points d'abscisses curvilignes rondes tous les 20 mètres

d'où Lo = - 8.60

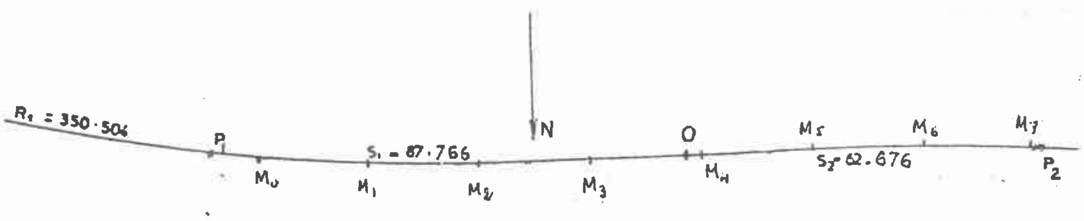
Lc = -20.00

- angle entre la tangente en P_1 et P_1M_o : $\frac{L_o^2}{6\,A^2} + \frac{Lo}{2R} = -\,0^G.\ 7555$

- angle entre P_1M_o et P_1M_1 : $\frac{L_c^2}{6\,A^2} + \frac{LoLc}{3\,A^2} + \frac{Lc}{2\,R} = -\,1^G\ 5596$

- Raison de la progression : $\frac{L_c^2}{3\,A^2} = 0^G.\ 2759$

Points	Distances métriques sur le tracé en mètres	Distances partielles en mètres	Angles partiels en grades	Gisements en grades	Directions
P_1	1731.40			305.4594	Tang. en P_1
		8.60	- 0.7555		
M_o	1740			304.7039	P_1M_o
		20	- 1.5596		
M_1	1760		+ 0.2759	303.1443	P_1M_1
		20	- 1.2837		
M_2	1780		+ 0.2759	301.8606	P_1M_2
		20	- 1.0078		
M_3	1800		+ 0.2759	300.8528	P_1M_3
		20	- 0.7319		
M_4	1820		+ 0.2759	300.1209	P_1M_4
		20	- 0.4560		
M_5	1840		+ 0.2759	299.6649	P_1M_5
		20	- 0.1801		
M_6	1860		+ 0.2759	299.4848	P_1M_6
		20	+ 0.0958		
M_7	1880			299.5806	P_1M_7
P_2	1881.842			299.6029	P_1P_2



CLOTHOÏDE DE RACCORDEMENT ENTRE DEUX CIRCONFERENCES

	<u>1ère circonférence</u>	<u>2ème circonférence</u>
Coordonnées du centre	X_1 = 27 663,244 Y_1 = 4 302,790	X_2 = 27 554,882 Y_2 = 5 141,738
Rayon	R_1 = - 350,504	R_2 = 490,816

	<u>Calcul du paramètre</u>	
	$R_1 - R_2$	= - 841,320
	$R_d = R_1 R_2 / (R_1 - R_2)$	= 204,479 8308
	$\rho = R_d / (R_1 - R_2)$	= - 0,243 046 439
Distance des Centres	C	= 845,917 294 9
Ecartement des circ.	K	= 4,597 294 85
	$\lambda = K/R_d$	= 0,022 482 876
Formule (17)	$\ell^4/24$	= 0,022 554 396
Longueure réduite de l'arc	ℓ	= 0,857 749 779
Paramètre	$A = \ell R_d$	= 175,392 5297
	<u>Calcul de l'angle de rotation</u>	
Gisement ligne des Centres	G_{12}	= $- 8^G$ 17 75.69
Formule (27)	α_{12}	= $- 5^G$ 66 64.45
Rotation	$G_{12} - \alpha_{12}$	= $- 2^G$ 51 11 24

Eléments relatifs au :	Raccordement à la 1ère circonférence	Raccordement à la 2è circonférence
Abscisse réduite s	s_1 = -0,500 400 936	s_2 = 0,357 348 842
Abscisse curviligne $S = As$	S_1 = -87,766 586	S_2 = 62,676 318
Angle tangente $\tau = s^2/2$	τ_1 = 7^G 97 05 14	τ_2 = 4^G 06 47.60
Gisement CP = $G_{12} - \alpha_{12} + \tau$	G_1 = 5^G 45 93 90	G_2 = 201^G 55 36 36
Formule (32) ω	ω_1 = 2^G 65 64.86	ω_2 = 1^G 35 48 73
Gisement PO = $G_{12} - \alpha_{12} + \omega - 100^G$	$G_{p_1 0}$ = 300^G 14 53 62	$G_{p_2 0}$ = 98^G 84 37 49
Formule (31) d	d_1 = -0,500 052 406	d_2 = 0,357 284 099
Distance PO au point d'inflexion D = d A	D_1 = - 87,705 46	D_2 = 62,664 96

Coordonnées et segments	X	Y	X	Y
Centre des circonférences C	27 663,244	4 302,790	27 554,882	5 141,738
Segment CP	+ 30,020 96	+ 349,215 97	- 11,976 91	490,669 85
Points de raccordements P	27 693,264 96	4 652,005 97	27 542,905 09	4 651,068 15
Segment PO	- 87,705 23	+ 0,200 26	+ 62,654 63	+ 1,138 08
Point d'inflexion O	27 605,559 73	4 652,206 23	27 605,559 72	4 652,206 23