

Transformation de coordonnées

par Michel SAUTREAU

1. RAPPEL DU PROBLÈME

Soient :

- (f) la figure constituée par n points de coordonnées connues dans un système de référence (r), dit système "initial",
- (F) la figure **homologue** de (f) formée par ces mêmes points donnés dans un autre système de référence (R), dit système "final" :

système de référence (r)		système de référence (R)
$m_1(x_1, y_1)$		$M_1(X_1, Y_1)$
$m_2(x_2, y_2)$	fig. (f)	$M_2(X_2, Y_2)$
.....	fig. homologue (F)
$m_n(x_n, y_n)$		$M_n(X_n, Y_n)$

L'adaptation de (f) sur (F), **sans modification des angles de la figure initiale**, conduit à appliquer à chaque point $m(x, y)$ de (f) une transformation composée :

- d'une translation (de composante p, q),
- d'une rotation (d'angle θ),
- et d'un changement d'échelle (d'amplitude k).

Si l'on désigne par M_t le transformé du point m, les équations de cette transformation sont :

$$M_t \begin{cases} X_t = p + (k \cdot \cos \theta) x - (k \cdot \sin \theta) y \\ Y_t = q + (k \cdot \sin \theta) x + (k \cdot \cos \theta) y \end{cases}$$

soit encore, en posant $a = k \cdot \cos \theta$ et $b = k \cdot \sin \theta$:

$$M_t \begin{cases} X_t = p + a x - b y \\ Y_t = q + b x + a y \end{cases} \quad (1)$$

Le problème consiste à déterminer les valeurs des quatre **paramètres de la transformation** : p, q, a, b.

Si l'on connaît les coordonnées de deux points dans le système de référence (r) et celles de leurs homologues dans le système (R), ces paramètres sont facilement calculables par la résolution du système linéaire de quatre équations à quatre inconnues obtenu en écrivant les relations (1) précédentes pour chaque point.

Lorsque le nombre des points connus dans les deux systèmes de référence — appelés également **points d'appui** de la transformation — est supérieur à deux, une solution par moindres carrés doit être mise en œuvre pour le calcul des paramètres. Cette solution conduit à rendre minimale la somme des carrés des écarts MM_t existant, pour chaque point d'appui, entre la position M définie dans le système (R) et la position M_t obtenue dans ce système à l'issue de la transformation, et cela sans modifier les angles de la figure initiale. A cet effet, les calculs successifs suivants sont à effectuer :

1° Coordonnées des barycentres g et G des figures homologues (f) et (F) :

$$x_g = \frac{\sum x_i}{n}, y_g = \frac{\sum y_i}{n}, X_G = \frac{\sum X_i}{n}, Y_G = \frac{\sum Y_i}{n};$$

2° Coordonnées réduites de tous les points d'appui, après translation des axes de chaque système en g et en G respectivement :

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - x_g & y'_i &= y_i - y_g \\ X'_i &= X_i - X_G & Y'_i &= Y_i - Y_G \end{aligned}$$

3° Paramètres a et b de la transformation :

$$a = \frac{\sum (x'_i X'_i + y'_i Y'_i)}{(x_i'^2 + y_i'^2)}, b = \frac{\sum (x'_i Y'_i - y'_i X'_i)}{(x_i'^2 + y_i'^2)}$$

4° Paramètre p et q de la transformation :

$$p = X_G - a x_g + b y_g; q = Y_G - a y_g - b x_g$$

La qualité de l'adaptation est enfin appréciée en calculant les **résidus sur les points d'appui**, c'est-à-dire les écarts, pour chaque point, entre les positions M et M_t définies précédemment :

$$\begin{aligned} \text{écarts en projection} \quad \Delta X_i &= X_i - (p + a x_i - b y_i) \\ \Delta Y_i &= Y_i - (q + b x_i + a y_i) \end{aligned}$$

$$\text{écart en position} : \Delta D_i = \sqrt{\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2}$$

2. ANALYSE SOMMAIRE DU CALCUL SUR H.P. 67

Les calculs sont exécutés à l'aide de deux cartes programme :

- la première (programme "ADAPT A") sert à déterminer les paramètres de la transformation,
- la seconde (programme "ADAPT B") permet ensuite de calculer, d'une part, les résidus ΔX , ΔY , ΔD , sur les points d'appuis, d'autre part les coordonnées transformées X_t , Y_t , des points connus uniquement dans le système initial.

Ainsi que cela a été précisé en introduction, le calcul est effectué, quel que soit le nombre de points d'appui, sans avoir à réintroduire manuellement les données. Compte tenu du nombre en général important de données à conserver en mémoire et des possibilités de stockage réduites de la calculatrice H.P. 67, il est nécessaire d'avoir recours à un stockage auxiliaire sur des cartes données, celles-ci étant utilisées en enregistrement pour transférer sur la carte le contenu des mémoires de l'appareil, puis en lecture pour opérer le transfert inverse.

Pour faciliter la tâche de l'opérateur chargé du calcul, ses diverses interventions ont été codifiées comme suit :

1° Introduction d'une donnée dans l'appareil : signalée par l'affichage automatique au tableau d'un **nombre-indice** ; la donnée à composer au clavier est alors :

- s'il s'agit des points d'appui (nombre-indice de la forme n.), celle inscrite dans la case de l'imprimé de calcul portant ce nombre dans son angle supérieur gauche (cf. imprimé ci-après, page 1, cadre 1 "Points d'appui"),

- s'il s'agit d'un point à transformer (nombre-indice de la forme p,q), celle située à l'intersection de la ligne p et de la colonne q (cf. imprimé de calcul, page 2).

2° Enregistrement des données contenues dans le calculateur sur une carte données : signalé par l'affichage automatique de la mention "Crd" au tableau.

3° Lecture d'une carte données (transfert des données dans le calculateur) : signalée par l'affichage automatique du code p. 00 au tableau, le chiffre p inscrit à gauche étant celui de la carte données n° p à introduire dans l'appareil.

4° Résultats à noter sur l'imprimé de calcul : signalé par un **clignotement** du point décimal du résultat à noter, suivi d'un arrêt du calcul.

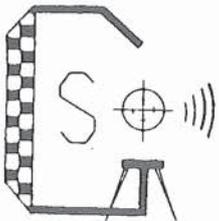
A noter que dans les cas 1°, 3° et 4° ci-dessus, le calcul ne reprend qu'en pressant la touche R/S ; en revanche, dans le cas 2°, la reprise est automatique dès le passage de la carte données en enregistrement.

L'analyse du calcul correspondant au programme "ADAPT A" de loin le plus complexe, est donné en dernière page (tableau A).

3. PROGRAMME DE CALCUL

3.1. Calcul des paramètres de la transformation (programme "ADAPT A")

3.2. Calcul des résidus et des coordonnées X_t , Y_t , des points à transformer (programme "ADAPT B")



G.T.A.S.

Géodésie Télémétrie Assistance

Tél 806.66.25

Réparation

Vente

Achat

Location

Toutes Marques

Niveaux

Théodolites

Tachéomètres _____

G.T.A.S.

Géodésie Télémétrie Assistance

24 rue Rochebrune — 75011 — PARIS Métro : Voltaire — St-Maur

3.2. Calcul des résidus et des coordonnées X_t, Y_t , des points à transformer
(programme "ADAPT B")

N°	Instruction
001	f LBL B
	1
	STO E
	f LBL 0
	1
	RCL 0
	x
	RCL 1
	RCL 2
010	RCL 3
	RCL E
	g SCI
	DSP 0
	R/S
	f FIX
	STO E
	h ↓
	STO 3
	h ↓
020	STO 2
	h ↓
	STO 1
	h LST x
	STO 0
	f LBL 1
	f ISZ
	RCL (i)
	RCL 2
	x
030	f ISZ
	RCL (i)
	RCL 3
	x
	-
	f ISZ
	RCL (i)
	-
	CHS
	DSP 2
040	f RND
	f -x-
	R/S
	f DSZ
	f DSZ
	RCL (i)

N°	Instruction
	RCL 3
	x
	f ISZ
	RCL (i)
050	RCL 2
	x
	+
	f ISZ
	f ISZ
	RCL (i)
	-
	CHS
	f RND
	f -x-
060	R/S
	g x^2
	h ↕
	g x^2
	+
	f $\sqrt{\quad}$
	f -x-
	R/S
	1
	STO - 7
070	RCL 7
	f x=0
	GTO 2
	h RC I
	2
	3
	g x/y
	GTO 1
	RCL E
	1
080	+
	STO E
	GTO 0
	f LBL 2
	0
	DSP 0
	h RTN
	f LBL E
	1
	.
090	2

N°	Instruction
	STO 7
	f LBL 3
	DSP 1
	RCL 7
	R/S
	STO 6
	RCL 2
	x
	STO 4
100	RCL 3
	RCL 6
	x
	STO 5
	0
	.
	1
	STO + 7
	RCL 7
	R/S
110	STO 6
	RCL 3
	x
	STO - 4
	RCL 2
	RCL 6
	x
	STO + 5
	RCL 0
	RCL 4
	+
120	DSP 2
	f -x-
	R/S
	RCL 1
	RCL 5
	+
	f -x-
	R/S
	0
130	.
	9
	STO + 7
	GTO 3

4. MISE EN ŒUVRE DU PROGRAMME DE CALCUL

I. Préparation du calcul

• Servir les colonnes 2 à 6 de la page 1 de l'imprimé de calcul (N^{os} et coordonnées des points d'appui dans les deux systèmes) ainsi que les colonnes 1 à 3 de la page 2 (N^{os} et coordonnées, dans le système initial, des points à transformer).

• Préparer des cartes données a raison **d'une carte pour 4 points d'appui** ; identifier chaque carte donnée par un numéro porté **au crayon** en commençant par l'unité : 1, 2,...

II. Calcul des paramètres de la transformation (programme "ADAPT A")

1. Introduire dans l'appareil la carte programme "ADAPT A", le contacteur étant en position "RUN" (1).

2. Inscrive au tableau le nombre total n de points d'appui.

3. Appeler le calcul en pressant la touche A (2).

4. A chaque arrêt, un nombre-indice est affiché automatiquement au tableau de l'appareil (3) :

• Composer, au clavier, la donnée inscrite dans la case de l'imprimé de calcul ayant ce nombre-indice inscrit dans son angle supérieur gauche,

• Relancer à chaque fois le calcul en pressant la touche R/S.

5. Après le chargement de 4 points d'appui (ou après celui du dernier point d'appui), la mention "Crd" est affichée automatiquement au tableau de l'appareil :

• Passer la carte données correspondante (cf. indications portées, entre chaque groupe de 4 points d'appui, sur la page 1 de l'imprimé de calcul). **Le calcul reprend automatiquement après ce passage.**

6. A l'issue du passage de la dernière carte données, est affiché au tableau le code 1. 00 :

• Passer la carte données n° 1 et la conserver provisoirement en main,

• Relancer le calcul en pressant la touche R/S,

• A l'affichage de la mention "Crd", repasser la carte données n° 1.

Le calcul reprend automatiquement. S'il y a plus de 4 points d'appui, apparaît le code 2. 00 :

• Passer la carte données n° 2 et la conserver provisoirement en main,

• Relancer le calcul en pressant la touche R/S,

• A l'affichage de la mention "Crd", repasser la carte données n° 2.

et ainsi de suite pour les codes 3. 00,
4. 00,...

7. Après le passage de la dernière carte données, s'affichent à nouveau successivement, selon le nombre de points d'appui, les codes 1. 00, 2. 00, ...
A chaque affichage :

• Passer la carte données correspondant au numéro de code,

• Relancer le calcul en pressant la touche R/S.

8. A l'issue du passage de la dernière carte données, apparaissent successivement, **signalés par un clignotement du point décimal suivi d'un arrêt du calcul**, les résultats cherchés, lesquels sont à noter

dans le cadre du bas de la page 1 de l'imprimé de calcul ; dans l'ordre :

- p - relancer le calcul en pressant la touche R/S,
- q - relancer le calcul en pressant la touche R/S,
- a - relancer le calcul en pressant la touche R/S,
- b - relancer le calcul en pressant la touche R/S.

9. Apparition de 0. au tableau : NE PAS ETEINDRE L'APPAREIL ; PASSER AU CALCUL SUIVANT (§ III ci-dessous).

III. Calcul des résidus sur les points d'appui (Programme "ADAPT B") (1)

1. Introduire dans l'appareil la carte programme "ADAPT B".

2. Appeler le calcul en pressant la touche B.

3. Affichage automatique du code 1. 00 :

- Passer la carte données n° 1,
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S.

4. Résultats successifs, signalés par un clignotement du point décimal, à noter page 1, colonnes 7, 8 et 9 :

$\left. \begin{array}{l} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta D \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{du 1}^{\text{er}} \text{ point d'appui} \\ \\ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Entre chaque} \\ \text{résultat} \\ \\ \text{relancer le calcul} \\ \text{en pressant la touche} \\ \text{R/S.} \end{array} \right\}$
$\left. \begin{array}{l} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta D \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{du 2}^{\text{e}} \text{ point d'appui} \\ \\ \end{array} \right\}$	

etc.

5. S'il y a plus de 4 points d'appui, affichage automatique du code 2. 00

- Passer la carte données n° 2,
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S,
- Noter les résultats successifs X, Y, D (comme en 4 ci-dessus) pour les points d'appui 5, 6, ... etc.

6. Apparition du 0. au tableau : fin du calcul des résidus. NE PAS ETEINDRE L'APPAREIL ; PASSER AU CALCUL IV.

IV. Calcul des coordonnées transformées des points nouveaux (programme "ADAPT B") (1)

NOTA. Pour ce calcul, les données à introduire dans l'appareil sont, successivement, les coordonnées x et y des points dans le système initial. L'introduction de ces données est signalée par un arrêt du calcul et par l'affichage automatique au tableau d'un nombre de la forme p,q dans lequel :

• p représente la ligne sur laquelle est inscrite le point (p = 1, 2, 3, 4, ...), le numéro de cette ligne figurant dans la marge de gauche de la page 2 de l'imprimé de calcul,

(1) Quelle que soit la nature de la carte (programme ou données), **ses deux faces sont à passer successivement** dans l'appareil, en respectant l'ordre : face 1, face 2.

(2) Si l'on a omis d'inscrire le nombre n avant de presser la touche A, le message "Error" est affiché. Reprendre, dans cette éventualité, les opérations en 2.

(3) Le premier nombre-indice affiché est 8, correspondant à la coordonnée x du 1^{er} point d'appui.

(1) Au cas où l'appareil aurait été éteint après le calcul II, introduire manuellement les paramètres p, q, a et b dans les registres R0, R1, R2 et R3 respectivement avant d'entreprendre ce calcul.

• q représente la colonne dans laquelle est inscrite la donnée à composer (q = 2 pour x, q = 3 pour y).

1. Appeler le calcul en pressant la touche E.

2. Au 1^{er} arrêt du calcul (affichage automatique du nombre 1,2) :

- Composer au clavier la coordonnée x du point à transformer (ligne 1, colonne 2),
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S.

3. Au 2^e arrêt du calcul (affichage automatique du nombre 1,3) :

- Composer au clavier la coordonnée y du point à transformer (ligne 1, colonne 3),
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S.

4. Au 3^e arrêt du calcul (clignotement du point décimal) :

- Noter le résultat X_t (ligne 1, colonne 4),
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S.

5. Au 4^e arrêt du calcul (clignotement du point décimal) :

- Noter le résultat Y_t (ligne 1, colonne 5),
- Relancer le calcul en pressant la touche R/S, ce qui

ramène en 2. ci-dessus pour le point suivant inscrit sur la ligne 2.

5. Imprimé de calcul. Exemple de calcul

Le modèle d'imprimé adapté au programme est donné ci-après. Sur cet imprimé figure un exemple de calcul d'une transformation de coordonnées comprenant 11 points d'appui.

Il est précisé que, dans la mesure où le nombre de points d'appui serait supérieur à 20 — c'est-à-dire dépasserait la capacité du cadre 1 de l'imprimé — il y aurait lieu d'utiliser comme feuille de suite un cadre identique pour consigner les données relatives aux points d'appui n° 21, 22, ... ; dans cette éventualité, ce dernier cadre serait à modifier manuellement comme suit :

— colonne 1 : remplacer les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 portés dans cette colonne par 6, 7, 8, 9 et 10 respectivement,

— indications portées entre chaque groupe de quatre points : modifier les numéros des cartes données à passer dans l'appareil : 6 au lieu de 1, 7 au lieu de 2, 8 au lieu de 3, etc.

Ets GUIZOU
215, RUE DU ROUET
13008 MARSEILLE



notre parc d'instruments
topographiques
à votre disposition

 91/79.41.41



ne restez pas
en panne...

louez un appareil.

NIVEAUX
THEODOLITES
TACHEOMETRES
DISTOMATS D13S
LASERS

Expédition Express sur toute la France
Tarif location sur demande

TABLEAU A

Analyse du calcul correspondant au programme "ADAPT A"

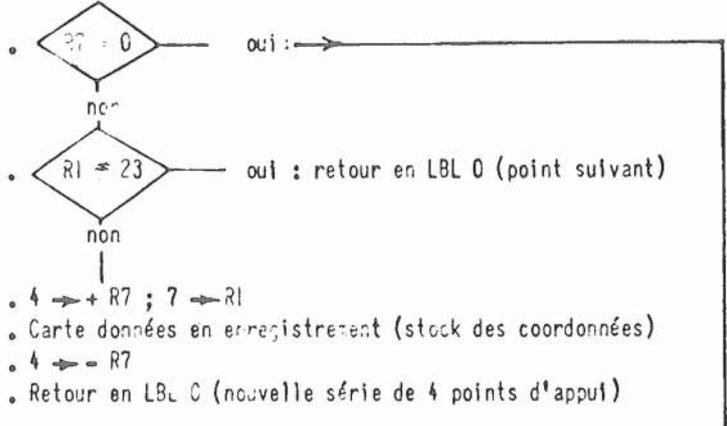
Symbolisme utilisé : n → R8 : stocker la donnée n dans le registre n° 8
 p → + R6 : additionner la donnée p au contenu du registre n° 6
 q → - R2 : soustraire la donnée q au contenu du registre n° 2

LBL A

- Flags 0 et 1 enlevés
- n (nombre total de points d'appui) inscrit au tableau
- n → RE ; n → R7 ; 7 → R1

LBL 0

- 1 → + R1 ; x au tableau → R(i) ; x/n → + R0
- 1 → + R1 ; y au tableau → R(i) ; y/n → + R1
- 1 → + R1 ; X au tableau → R(i) ; X/n → + R2
- 1 → + R1 ; Y au tableau → R(i) ; Y/n → + R3
- 1 → - R7



- 7 → R1 ; $\frac{R1 + 1}{4} - 2 \rightarrow R7$ (Nombre de points d'appui figurant sur la dernière carte données)
- Carte données en enregistrement (dernière carte)

LBL 1

- Poser le flag 1
- R0 → t ; R1 → z ; R2 → y ; R3 → x (1)
- Carte données en lecture
- x → R3 ; y → R2 ; z → R1 ; t → R0

LBL 2

- 1 → + R1 ; x_g → - R(i)
 - 1 → + R1 ; y_g → - R(i)
 - 1 → + R1 ; X_g → - R(i)
 - 1 → + R1 ; Y_g → - R(i)
 - 1 → - R7
-
- 4 → + R7 ; 7 → R1
 - Carte données en enregistrement (stock coordonnées réduites)
 - 4 → - R7
 - Retour en LBL 1 (nouvelle série de 4 points)

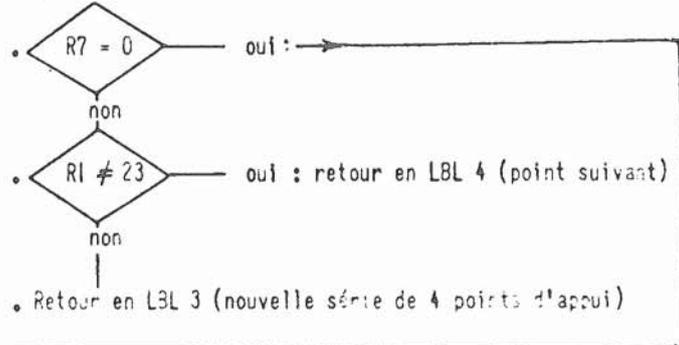
- 7 → R1
- $\frac{R1 + 1}{4} - 2 \rightarrow R7$ (Nombre de points d'appui figurant sur la dernière carte données)
- Carte données en enregistrement (dernière carte)

LBL 3

- Poser le flag 0
- R4 → z ; R5 → y ; R6 → x (1)
- Carte données en lecture
- x → R6 ; y → R5 ; z → R4

LBL 4

- $(x^2 + y^2) \rightarrow + R4$
- $(x^2 X^2 + y^2 Y^2) \rightarrow + R5$
- $(x^2 Y^2 - y^2 X^2) \rightarrow + R6$
- 1 → - R7



LBL 5

- Calcul de a = R5/R4
- Calcul de b = R6/R4
- Calcul de p = X_g - ax_g + by_g
- Calcul de q = Y_g - bx_g - ay_g
- a → R2 ; b → R3 ; p → R0 ; q → R1

FIN DU PROGRAMME ADAPT A

NOTA. Les séries d'instructions identiques signalées par des accolades en marge sont en fait regroupées dans un même sous programme, les retours à des LBL différents étant assurés à l'aide de tests sur les flags 0 et 1

(1) Afin de pouvoir conserver les données contenues dans les registres R0, R1, R2 et R3 (puis, ultérieurement, dans R4, R5 et R6), ces données sont stockées provisoirement dans les registres x, y, z, t, de la pile, lesquels ne sont pas affectés par le passage d'une carte données en lecture.

IMPRIME DE CALCUL

1. POINTS D'APPUI

Carte données 1	N° du point 2	Système initial		Système final		Résidus		
		x 3	y 4	X 5	Y 6	ΔX 7	ΔY 8	ΔD 9
1	8		9	10	11			
	12		13	14	15			
	16		17	18	19			
	20		21	22	23			
Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 1								
2	8		9	10	11			
	12		13	14	15			
	16		17	18	19			
	20		21	22	23			
Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 2								
3	8		9	10	11			
	12		13	14	15			
	16		17	18	19			
	20		21	22	23			
Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 3								
4	8		9	10	11			
	12		13	14	15			
	16		17	18	19			
	20		21	22	23			
Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 4								
5	8		9	10	11			
	12		13	14	15			
	16		17	18	19			
	20		21	22	23			
Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 5 (etc. si plus de 20 points d'appui).								

2. PARAMETRES DE LA TRANSFORMATION

p = _____	q = _____
a = _____	b = _____

3. POINTS NOUVEAUX A TRANSFORMER

N° du point 1	Système initial		Système final	
	x 2	y 3	x ^t 4	y ^t 5
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				

IMPRIME DE CALCUL

1. POINTS D'APPUI

Carte données	N° du point	Système initial		Système final		Résidus		
		x	y	X	Y	ΔX	ΔY	ΔD
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	105	13 161,02	12 313,35	588 839,40	139 581,47	0,06	0,04	0,07
	110	15 939,88	10 775,96	591 861,70	138 606,23	- 0,04	0,01	0,04
	115	10 536,22	7 526,54	587 182,53	134 379,59	0,00	- 0,02	0,02
	120	9 066,88	8 740,97	585 507,28	135 289,33	- 0,03	0,02	0,04

Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 1

2	125	8 298,57	11 457,94	584 231,58	137 808,21	0,01	- 0,01	0,02
	130	7 328,02	10 542,13	583 454,88	136 723,09	- 0,05	0,01	0,05
	135	6 456,30	8 731,27	582 947,15	134 778,56	0,01	0,06	0,06
	140	6 123,21	12 002,30	581 992,16	137 924,70	0,03	- 0,04	0,05

Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 2

3	145	6 010,13	8 130,42	582 624,66	134 103,10	0,01	- 0,05	0,05

Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 3

4								

Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 4

5								

Affichage de la mention "Crd" au tableau : passer la carte données n° 5 (etc. si plus de 20 points d'appui).

2. PARAMETRES DE LA TRANSFORMATION

p = -578 287,5169	q = -124 969,8376
a = -0,981 403 698	b = -0,192 023 536

3. POINTS NOUVEAUX A TRANSFORMER

N° du point 1	Système initial		Système final	
	x_2	y_3	x_4^t	y_5^t
1	12 503,15	8 652,11	588 896,75	135 861,95
2	7 401,23	8 566,32	583 906,18	134 798,07
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				

En cas d'utilisation d'une feuille de suite (plus de 30 points nouveaux à transformer) modifier à la main le numérotage des lignes porté dans la marge de gauche de cette feuille (31 au lieu de 1, 32 au lieu de 2, etc.).