

■ Avec un GPS portable le report des coordonnées sur le fond de carte peut poser un problème pratique. Dans le dernier numéro de cette revue, Henri Dufour nous livrait des programmes rédigés sur une simple calculette (HP 32 SI) et qui peuvent être d'une utilité non seulement pour les randonneurs, mais aussi pour les utilisateurs des deux systèmes projectifs de France (Lambert et UTM).

Dans l'article qui suit l'auteur fournit des précisions à son premier exposé.■

## transformation des réceptions gps en coordonnées cartographiques (suite)

# GPS et coordonnées en projection

**Henri Dufour**  
ingénieur général géographe (CR)

On désire ici donner des précisions supplémentaires au précédant exposé (AFT N°82 pages 54 à 56) à divers points de vue :

**A/** Préciser les raisons qui nous font préférer, pour le passage des réseaux locaux au réseau mondial GPS (sur WGS 84) l'usage des coordonnées en projection à celui des coordonnées tridimensionnelles.

**B/** Proposer aux "constructeurs" GPS.

1 - De ne faire des calculs que sur l'ellipsoïde WGS 84.

2 - De réaliser un programme relativement simple "dit GPS 4" qui permettrait de donner à l'utilisateur les principales projections conformes utilisées dans le monde entier. Ce programme, installé sur un récepteur GPS permettrait à l'opérateur, une fois introduites les caractéristiques des projections, de connaître en temps réel, en tout lieu :

- sa position en WGS 84 (UTM) normalisé,
- sa position dans 2 projections conformes arbitraires (STEREO, MERCATOR, LAMBERT, GAUSS-KRÜGER).

**C/** Inciter les organismes géographiques nationaux à fournir de leur côté :

- les constantes utilisées pour leurs projections de cartes géographiques.
- le calage des centres de projection dans le système WGS 84, (nous allons préciser ces points).

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- Institut Géographique National : projection cartographique de LABORDE - MADAGASCAR  
SGN 27813

- Marteen HOOIJBERG : practical Geodeny using computers

SPRINGER

**A/** Avant l'arrivée des concepts de la GEODESIE 3D (disons vers 1956) les calculs de coordonnées de 1<sup>er</sup> ordre se faisaient en général en système géographique ( $\lambda, \phi$ ) et l'exploitation aux ordres inférieurs en coordonnées rectangulaires sur une projection conforme (parfois non définie avec toute sa rigueur mathématique et ceci a été jusqu'en 1945 le cas de la projection LAMBERT en France).

Toutefois certains calculs ont été réalisés sur des projections créées uniquement dans ce but : ce fut le cas de la BT 45 (Bureau Technique 45), qui n'était autre, à un coefficient d'échelle près, que la future LAMBERT II étendu et la BT 46 (pour l'Afrique du Nord), toutes deux définies et utilisées au Bureau Technique de la Géodésie (J-J LEVALLOIS, M. DUPUY).

L'arrivée des concepts de la GEODESIE 3D et de la GEODESIE Spatiale ont convaincu les utilisateurs scientifiques (et moi-même le premier) de travailler plutôt en coordonnées cartésiennes terrestres (XC, YC, ZC). Partant du principe suivant, que l'on doit rappeler :

Le même réseau Géodésique, calculé selon 2 méthodes, (1 et 2) sur des ellipsoïdes différents, devrait donner lieu à des résultats en 3D, tels que :

$XC2=XC1+\Delta X$   $YC2=YC1+\Delta Y$   $ZC2=ZC1+\Delta Z$   
( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ) étant constants ou légèrement variables sur l'étendue du réseau.

### EXEMPLES FRANÇAIS

1= Système NT, 2 = Europe 1950 -  $\Delta X= 81^m$   $\Delta Y=36^m$   $\Delta Z=440^m$

1= Système NT, 2 = WGS 84 -  $\Delta X=168^m$   $\Delta Y=60^m$   $\Delta Z=320^m$

1= Europe 50, 2 = WGS 84 -  $\Delta X= 87^m$   $\Delta Y=96^m$   $\Delta Z=120^m$

### MAIS :

1<sup>er</sup> - Les 2 réseaux doivent normalement être corrigés de l'écart entre h, altitude issue du nivellement général, et H, altitude géométrique,

$$H = h + DH$$

DH, qui peut atteindre plusieurs mètres, pouvant être par exemple obtenu par nivellement astrogéolodique, (intégration de dénivelées obtenues à partir des déviations de la verticale).

2<sup>ème</sup> - Les variations du réseau (1) au réseau (2) peuvent être modélisées en fonction de (XC, YC, ZC), mais comme les données sont en général riches à la surface du globe et pauvres sur la normale, les modèles utilisés conduisent à des systèmes rapidement instables.

En général on fait apparaître 7 paramètres : 3 translations, 3 rotations, 1 facteur d'échelle. Aller au delà de ces 7 paramètres me paraît incorrect.

La comparaison des coordonnées en projection m'est apparue par la suite, comme étant tout aussi judicieuse :

1<sup>er</sup> - On fait des comparaisons 3D, dont on ne retient qu'une valeur moyenne ( $\Delta XO, \Delta YO, \Delta ZO$ ).

2<sup>ème</sup> - On prend les 2 réseaux et on les transforme en projection :

- l'un sur son ellipsoïde de calcul et dans une projection conforme (1).

- l'autre sur son ellipsoïde de calcul et dans la projection conforme de mêmes constantes (centre de projection, coefficient d'échelle au centre) que la projection (1).

- Entre les résultats en projection existe un décalage (DX, DY)

$$XE2 = XE1 + DX \quad YN2 = YN1 + DY$$

(DX, DY) n'ont pas de raison particulière d'être constants, mais il apparaît qu'ils sont lentement variables sur une zone étendue ( $\pm 5$  m à moins de 800 km du centre de projection, en général).

- Par des méthodes théoriques ou empiriques il est possible de soustraire de (DX, DY) une formule théorique (DXO, DYO) qui prend en compte à la fois les effets du décalage ( $\Delta XO, \Delta YO, \Delta ZO$ ) et ceux du changement d'ellipsoïde.

### LES VALEURS RÉSIDUELLES :

$$SX = DX - DXO; SY = DY - DYO$$

traduisent les variations intrinsèques entre les 2 réseaux : elles peuvent se modéliser à 2 variables en fonction de (XE, YN) avec toute la finesse désirable, faisant apparaître des termes d'échelle, d'orientation, de déformation (globaux ou localisés).

- Par ailleurs la comparaison des altitudes reste un problème totalement disjoint et c'est très bien ainsi, d'autant que (comme le déplore à juste titre A. FONTAINE), on a un peu trop tendance actuellement à mélanger l'altitude géométrique H (donnée par GPS par rapport à l'ellipsoïde WGS 84) et l'altitude "classique" qui commande les courbes de niveau sur les documents cartographiques et aussi l'écoulement des liquides dans les tuyaux faiblement inclinés...

### B/PROPOSITION AUX CONSTRUCTEURS

- Le constructeur n'a besoin d'exécuter des calculs à partir de ( $\lambda, \phi$ ) (notations qui seront remplacées ici par J, L) que sur l'ellipsoïde WGS 84.

- Il pourrait par contre fournir systématiquement les résultats dans une projection conforme, utilisant un codage et des paramètres inscrits par l'utilisateur, ce qui permettrait à ce dernier de se repérer dans le monde entier (ou presque) sur toutes les cartes utilisant les projections conformes suivantes :

UTM normalisé WGS 84 - GAUSS-KRÜGER, STEREO, MERCATOR, LAMBERT.

- Le programme GPS 4 proposé en annexe a été conçu pour un maximum de généralité et de "confort". Il nécessite toutefois, tel qu'il est, que le calculateur du GPS soit capable de réaliser les calculs en variables complexes, y compris pour les lignes trigonométriques et hyperboliques.

il utilise un codage spécial des projections que nous allons expliciter.

### - CODAGE DES PROJECTIONS : (CD)

UTM Normalisé : CD(0)

CD = 501 à 560                      532 = fuseau 32

(plus généralement 500 + x correspond à la longitude origine 6 x -177).

PROJECTION 1 : CD (1) dite principale

195 : LAMBERT

295 : STEREO de la sphère bitangente

200 + x : MERCATOR oblique de la sphère bitangente, à l'inclinaison  $I = x$

200 (avec  $L1 = 0$ ) : MERCATOR    290 : MERCATOR transverse.

395 : STEREO de la sphère de courbure

300 + x : MERCATOR oblique de la sphère de courbure, à l'inclinaison  $I = x$

390 : MERCATOR transverse de la sphère de courbure

(avec  $L1 = 0 \rightarrow$  GAUSS-LABORDE)

400 à 495 : réservé

498 : GAUSS-KRÜGER

PROJECTION 2 : CD (2) dite auxiliaire :

CD (2) = CD (1) + 500

### - DIALOGUE ENTRE GPS ET SON UTILISATEUR :

L'utilisateur inscrit sur GPS les éléments des 2 projections désirées :

PROJECTION 1 : CD (1) et les éléments suivants :

J1 L1 K1 X1 Y1

(J1, L1) : coordonnées géographiques (en degrés décimaux) de l'origine mathématique de la projection.

K1 = coefficient d'échelle à l'origine.

(X1, Y1) = coordonnées cartographiques au centre mathématique.

PROJECTION 2 : mêmes éléments pour une deuxième projection : J2 L2 K2 X2 Y2

Une fois enregistrées ces données, le GPS doit fournir sur simple inscription du code CD les coordonnées (XE, YN) dans la projection demandée :

500 < CD < 560 : UTM Normalisé

CD < 500 : Projection principale

CD > 600 : Projection auxiliaire

### C/PROPOSITION AUX ORGANISMES GÉOGRAPHIQUES NATIONAUX

- Ils devraient fournir aux usagers :

- Essentiellement la liste des projections utilisées sur les cartes dont ils ont la charge :

CD - J1, L1, K1, X1, Y1

- et si possible les valeurs  $\bar{X}_1, \bar{Y}_1$ , voisines de (X1, Y1) telles que  $\bar{X}_1 = X_1 + DX$   $\bar{Y}_1 = Y_1 + DY$  (notations utilisées en A) ou, si l'on veut, les valeurs qu'il faut inscrire sur le récepteur pour que, au centre mathématique de la projection, ce récepteur donne exactement les coordonnées cartographiques de ce centre. (Ces valeurs DX, DY peuvent être établies à partir de ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ) ; on peut aussi stationner un point quelconque de coordonnées cartographiques connues et étalonner le GPS sur ce point...)

D/ Nous croyons que, sur les bases qui ont été proposées, pourrait s'établir un dialogue efficace entre constructeurs GPS et utilisateurs munis de cartes topographiques. Ce dialogue nécessite un effort à la fois des constructeurs (acceptation d'un code, réalisation d'un programme du type GPS 4) et des organismes géographiques.

Nous militons en même temps pour l'adoption des unités angulaires degrés décimaux (déjà considérées comme "standard" par les constructeurs de calculettes) et pour une unification des présentations des projections.

A défaut de ce dialogue, les utilisateurs peuvent naturellement "repiquer" les coordonnées ( $\lambda, \phi$ ) (ou J, L) sur une calculette de leur choix. GPS 4 a été programmé sur HP 48 GX (250<sup>GR</sup>).

Par ailleurs, on a pu programmer ensemble sur HP 32 SII (125<sup>GR</sup>) la projection GAUSS-KRÜGER (au 1/10 mm) et la projection LAMBERT. Elles sont disponibles au siège de l'AFT, naturellement il existe aussi d'autres calculatrices utilisables...

## ANNEXES

### A/ CALCUL DES CONSTANTES D'ELLIPSOÏDE (limité aux éléments utiles dans GPS 4)

| WGS 84  | A = 6378137,000 m   | G = 298,257 223 563    |
|---|---------------------|------------------------|
| B9 = 1 - 1/G                                      | B = A - A/G         | B9 = 996 647 . 189 335 |
| G2 = G x G  | E2 = (2G - 1)/G2    | B = 6356752, 31425 m   |
| E = E2^0,5  | E3 = E2 / (1 - E2)  | E2 = 6694 .379 99014   |
| E1 = E3^0,5                                       | E1 = TAN (ASIN (E)) | E = 81819 . 190 842 6  |
| E4 = EL • E2                                      | E6 = E2 • E4        | E1 = 82094 . 437 9497  |
| C2 = A (E2/8 - E4/96 - 9E6/1024 - 901 E8/184320)  | E8 = E4 • E4        | C2 = 5334,214766 m     |
| C4 = A (13 E4/768 + 17E6/5/20 - 311 E8/737280)    |                     | C4 = 4,844691 m        |
| C6 = A ( 61 E6/15360 + 899 E8/430080)             |                     | C6 = 0,007 626 m       |
| C8 = A (49561 E8/41287680)                        |                     | (C8 = 0,000015 m)      |
| D7 = A (E2/4 + 3 E4/64 + 5 E6/256 + 175 E8/16384) |                     | D7 = 10687,854176 m    |
| C9 = A - D7                                       |                     | C9 = 6367449,14582 m   |

### B/ Présentation de GPS 4

On considère ce programme comme optimal tant en ce qui concerne la concision des calculs, la richesse des résultats, que la précision finale de ces résultats.

La clé de cet "optimum" se trouve dans le fait que l'information (J, L) est d'abord saisie :

- dans la projection stéréo équatoriale centrée en L (Z1)
- puis dans la projection stéréo équatoriale centrée en LO (Z2).

On peut alors passer dans la projection de GAUSS-KRÜGER (variable Z3), par un développement totalement rigoureux (terme négligé (C8 sur 8Z) avec C8 = 0<sup>mm</sup>, 015) qui constitue en fait la définition stricte de la projection, valable jusqu'à 89° de longitude du méridien central.

**Sinon** : m passe par formule homographique (Z, Z1) : vers la projection LAMBERT, le MERCATOR, la STE-REO, ou encore la MERCATOR oblique de la sphère de Courbure.

L'ellipsoïde est pris en compte dès le début (termes en A0).

L'erreur sur les résultats (avec 12 chiffres significatifs) reste inférieure à 2/100 mm.

Les notations sont celles de la HP 48 GX

|      | GPS4  |                   |                   | Codes                        |
|------|---|-------------------|-------------------|------------------------------|
|      | J0 = J1 L0 = K1 K0 = K1 X0 = X1 Y0 = Y1                         |                   |                   | 195 295 324 498 ou 530       |
|      | QI = CD IF CD > 500   |                   |                   | J1 = 3° J = 9°               |
| THEN | QI = CD - 500 IF QI < 100 THEN                                  |                   |                   | L1 = 36° L = 43°,200         |
| ↓    | J0 = 6 QI - 177 QI = 498 KO = 0,9996                            |                   |                   | K1 = 0,9996                  |
|      | X0 = 500 000 Y0 = 0 (IF L < 0 THEN Y0 = 10 000 000 END)         |                   |                   | X1 = 500 000                 |
|      | J0 = J2 L0 = L2 K0 = K2 X0 = X2 Y0 = Y2                         |                   |                   | Y1 = 0                       |
| END  | (IF QI > 495 THEN L0 = 0 END)                                   |                   |                   | I = 95 95 24 98              |
|      | I = 100 FP (QI/100) Q = ABS (( DI-I)/100)                       |                   |                   | Q = 1 2 3 4                  |
|      | J3 = (J-J0)/2 SO = SIN (L0) C = COS (L/2) S = SIN (L/2)         |                   |                   | J3 = 3°                      |
|      | AO = ATANH (E • 50 - ATANH (E • SIN (L))) AO = TANH (E • AO/2)  |                   |                   | AO = - 324 • 761 878         |
|      | Z1 = i (S + C • AO) / (C + S • AO) C = COS J3 S = SIN (J3)      |                   |                   | RE (Z2) = 396 5670 • 307 548 |
|      | Z2 = i (S - CZ1) / (C + S • Z2) IF I = = 98                     |                   |                   | IM (Z2) = 44 184 • 753 630   |
| THEN | Z = 2 ATAN (Z2)   |                   |                   | RE (Z) = 753 373 • 356 988   |
| ↓    | Z3 = C9 • Z + C2 • SIN (2 • Z) + C4 SIN (4 • Z) + C6 • SIN (6Z) |                   |                   | IM (Z) = 76 586 • 592 274    |
| ELSE | W = COS (ASIN (E • SO)) C = COS (L0/2) S = SIN (L0/2)           |                   |                   | W = 998 842 • 904 864        |
|      | IF Q = = Z  |                   |                   | RE (Z) = 63959 • 463 846     |
| THEN | Z = (C • Z2 - S) / (C + S • Z2)                                 |                   |                   | IM (Z) = 38 327 • 842 939    |
| ELSE | Z1 = (C • Z2 - S) / (C - S Z2) CO = COS (L0)                    |                   |                   | RE (Z1) = 81 390 • 661 768   |
|      | IF QI = = 195   |                   |                   | IM (Z1) = 52 061 • 551 761   |
|      | Z4 = TANH (SO • ATANH (Z1)) Z = CO • Z4 / (SO + SO • Z4)        |                   |                   | RE (Z4) = 47 824 • 025 333   |
|      | (E1 = TAN (ASIN(E))) β = COS (ATAN (E1 • CO • CO))              |                   |                   | IM (Z4) = 30 715 • 739 005   |
|      | Z4 = β TANH (ATANH(Z1)/β) Z = CO • Z4 / (1 + SO • Z4)           |                   |                   | β = 998 559 • 580 766        |
| END  | IF I ≠ 95   |                   |                   | RE (Z4) = 81 390 • 781 335   |
|      | Z1 = COS (I) - i SIN (I) Z = Z1 • ATANH (Z/ Z1)                 |                   |                   | IM (Z4) = 52060 • 691 401    |
|      | Z3 = 2 • A Z/W  |                   |                   | RE (Z1) = COS (Z4)           |
| END  | XE = KO • IM (Z3) + XO YN = KO • RE (Z3) + YO                   |                   |                   | IM (Z1) = - SIN (Z4)         |
|      | XE , YN   |                   |                   | E1 = e' = 82094 • 437950     |
| XE → | (1) 991 137,49641   | (2) 989 291,05447 | (3) 990 392,42828 | (4-5) 987 517,15210          |
| YN → | 816 351,44530   | 816 502,86342     | 815 134,60877     | 4 800 532,04382              |

### C/ Exemples d'application

Nous avons converti dans notre système un certain nombre de projections présentées par M. HOOJBERG ou connues à l'Institut Géographique Français.

| UTM NORMALISÉ ou GAUSS-KRÜGER                      |  |  |  |
|--|--|--|--|
| AUSTRALIE Zone 54 (fuseau 54)                      | ans 1966   | A = 6 378 160,000<br>XE = 758 053,0896                                 | G = 298,25<br>YN = 5 828 496,9735  |
| CD = 554   | J = 143° 55'30"6330 • L = - 37° 39'15"5571   |  |  |
| REP. FÉDÉRALE ALL. SYSTEME 1922 (RAVENBERG) BESSEL |  | A = 6 377 397,155<br>X1 = 500 000<br>XE = 583 038,4725                 | G = 299,15281285<br>Y1 = 0<br>YN = 5 444 314,5538                                    |
| CD = 498   | J1 = 12,000 L1 = 0 K1 = 1,000<br>J = 13° 08'15"2808 L = 49° 06'48"5214                                     |  |  |
| GRANDE BRETAGNE GRILLE UNIQUE                      | AIRY   | A = 6 377 563,396<br>XO = 400 000<br>X1 = 400 000<br>XE = 651 409,9029 | G = 299,32496459<br>YO = - 100 000,000<br>Y1 = - 5 527 063,8148<br>YN = 313 177,2703 |
| CD = 498   | JO = -2° LO = 49° K1 = 0,9996012717<br>J1 = -2 L1 = 0 K1 = -<br>J = 1° 43' 04" 5177 L = 52° 39' 27" 2531   |  |  |
| IRLANDE  | AIRY MODIFIED  | A = 6377340,189<br>XO = 200 000<br>X1 = 200 000<br>XE = 328546,3442    | G = 299,324 96459<br>YO = 250 000, 0000<br>Y1 = 5 679 822, 8901<br>YN = 237 617,1863 |
| CD = 498   | JO = -8° LO = 53° 30' K1 = 1,000 035<br>J1 = - 8 L1 = 0 K1 = -<br>J = 6° 04' 06" 0065 L = 53° 22' 23" 1566 |  |  |

| LAMBERT                               |  |   |  |
|---------------------------------------|--|---|--|
| BELGIQUE *                            | INTER 1924   | A = 6 378 388,000<br>XO = 500 000,01256<br>X1 = 150 000,01256<br>XE = 260 597,92035 | G = 297<br>YO = 165 372,95628<br>Y1 = 132 248,76831<br>YN = 165 555,22024            |
| CD = 195                              | JO = 4° 22'02"952082 LO = 50° 47'57"704<br>L1 = 50° 30'05"710403 K1 = 0,999 932 491 643<br>J1 = 4,36748668944 L1 = 50,5015862231<br>J = 5° 56'09"8964 L = 50° 47'25"7956 |   |  |
| USA SPC 83 STATE TEXAS CENTRAL-GRS 80 |  | A = 6 378 137,000<br>XO = 700 000,000<br>X1 = 700 000<br>XE = 117 571,2278          | G = 298,257222101<br>YO = 3 000 000,000<br>Y1 = 3147 960,77846<br>YN = 3274 824,8169 |
| CD = 195                              | JO = -100°20' LO = 29°40'<br>L1 = 31° 0005" 007016 K1= 0,999 881743 629<br>J1 = -100,333 333 333 L1 = 31, 001 390 837 8<br>J = -106° 30' L = 32°                         |   |  |

| MERCATOR OBLIQUE SPHÈRE DE COURBURE |  |   |  |
|-------------------------------------|--|---|--|
| MADAGASCAR projection de LABORDE    | INTER 24   | A = 6378 388,000<br>X1 = 400 000<br>(590 553.991)<br>XE = 590 554,052 | G = 297<br>Y1 = 800 000<br>(898 640,983)**<br>YN = 898 640,874 |
| α = 21 <sup>GR</sup>                | JO = 49 <sup>GR</sup> LO = - 21 <sup>GR</sup> K1 = 0,9995<br>CD = 371,10 JI = 44,100 LI = - 18,900 K1 = /<br>(I = 79 <sup>GR</sup> = 71°,10) J = 51 <sup>GR</sup> L = - 20 <sup>GR</sup> |   |  |

\* Donné sous réserves

\*\* Valeurs vraies, pour une définition un peu différente de la projection