

Géοide & Nivellement

par Jean-Jacques LEVALLOIS

Le géοide, jadis chasse gardée de quelques spécialistes, est devenu depuis le développement de la géodésie spatiale et l'immense succès du GPS, la propriété de tous les topographes.

Cependant, tous les utilisateurs du terme l'emploient trop souvent sans trop en connaître les méthodes de détermination, leurs difficultés – théoriques et pratiques – leur précision.

Le présent exposé se propose de leur apporter quelques indications nécessaires en les mettant en garde contre trop d'optimisme, leur faire connaître à quoi tendent depuis quarante ans les efforts des géodésiens spécialistes, et "qu'il n'y a pas de problèmes qui sont résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a des problèmes plus ou moins résolus" (Henri Poincaré).

Le choix du niveau moyen de la mer comme origine des altitudes du nivellement, remonte officiellement en France au milieu du XIX^e siècle; en fait, l'idée était déjà dans l'air dès l'époque de la méridienne de Jacques Cassini qui intitule dans le "Traité de la Grandeur et de la Figure de la Terre" [1] son chapitre X : "Observation de la hauteur de diverses montagnes d'Auvergne, du Languedoc et des Pyrénées avec quelques observations de la hauteur du baromètre et de la bassesse apparente de l'horizon de la mer faites sur quelques-unes de ces montagnes."

Il y précise que *"les opérations géométriques qui se font sur une plaine au niveau de la mer sont simples et propres à être employées pour déterminer la grandeur de la Terre, mais celles qui se font sur des lieux élevés ont besoin d'être réduites par la connaissance de la hauteur de ces lieux..."* et évoque immédiatement ses travaux en Catalogne *"en un lieu élevé d'environ 9 pieds sur la surface de la mer, nous observâmes la hauteur apparente du Canigou sur l'horizon artificiel."*

Picard avait déjà évalué à 44 toises au-dessus "du niveau de la mer" l'emplacement de la tour de la salle orientale de l'Observatoire où se trouvait le baromètre. Il l'avait probablement calculée en comparant la longueur de la colonne du baromètre au niveau de la mer et à l'Observatoire, connaissant le gradient de hauteur du baromètre à Paris (cf. Pascal – expérience de la Tour Saint Jacques).

En fait, Pascal écrit déjà dans [2] *"... toute la mer est précisément du même niveau, c'est-à-dire également distante du centre de la terre en tous ses points : car les liquides ne peuvent reposer autrement puisque les points qui seraient plus haut couleraient en bas..."*. C'est exactement ce qui dira plus tard Clairaut dans [3] *"... un fluide ne saurait être en repos à moins que la surface ne soit de niveau, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne à plomb, parce qu'alors chaque goutte n'a plus de pente à couler d'un côté que de l'autre... toute la question de la forme de la terre est donc fondée sur la loi selon laquelle la force de pesanteur agit"*.

En d'autres termes la notion de la mer "surface" de niveau "origine" est en route. Les mesures géodésiques du XVIII^e siècle se proposent d'en rechercher la forme géométrique générale. On sait déjà que ce n'est pas une sphère et on recherche quel ellipsoïde de révolution conviendrait le mieux à la figure de la Terre.

Les célèbres expéditions de l'Académie Royale des Sciences en Laponie et au Pérou confirment cet aplatis-

sement à la fois par la méthode des arcs et par la méthode pendulaire : l'arc de 1° d'amplitude aux hautes latitudes est plus grand qu'à l'équateur et la valeur de la pesanteur g , y est également supérieure. Dès 1742, Clairaut précise même qu'il existe une équation fondamentale liant l'aplatissement terrestre : $\alpha = (a - b)/a$, à la variation relative de la pesanteur $\beta = (g_p - g_e)/g$, et à l'intensité relative de la force centrifuge équatoriale à la pesanteur $m = \omega^2 a/g$.

Ses équations sont résumées ci-dessous :

$$\alpha = \frac{3}{2} j_2 + \frac{1}{2} m$$

$$\beta = 2\alpha - \frac{9}{2} j_2 + m$$

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} m$$

où j_2 , que nous retrouverons plus loin, est égal au rapport

$$\frac{(C - A)}{Ma^2} \quad C, A \text{ moments d'inertie.}$$

La notion de potentiel de la pesanteur et ses propriétés seront dégagées par Lagrange et surtout Laplace à la fin du XVIII^e siècle. Le mot géοide n'est pas encore inventé (il fera beaucoup pour la mémoire de Listing).

POTENTIEL DE LA PESANTEUR

Au risque de lasser le lecteur, rappelons quelques théorèmes de mécanique qu'il pourra d'ailleurs sauter, quitte à y revenir si ses souvenirs s'estompent.

En un point de la surface terrestre, la pesanteur g est la force qui s'exerce sur une masse unité et l'attire vers "le bas".

Par définition, cette force est verticale (fil à plomb); elle est la résultante de deux forces, l'attraction (universelle) des masses terrestres et la force centrifuge.

a/ Il existe une fonction W appelée potentiel de la pesanteur dont g est la dérivée dW/dn , dn désignant la verticale locale.

Cette fonction est de la forme :

$$W = G \int \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

où :

- G est la constante de l'attraction universelle;
- $\omega^2 x$ la force axifuge en P ;
- r la distance PM ;
- dm la masse attirante en M ;
- x, y, z les coordonnées de P dans le système terrestre pôle, méridiens.

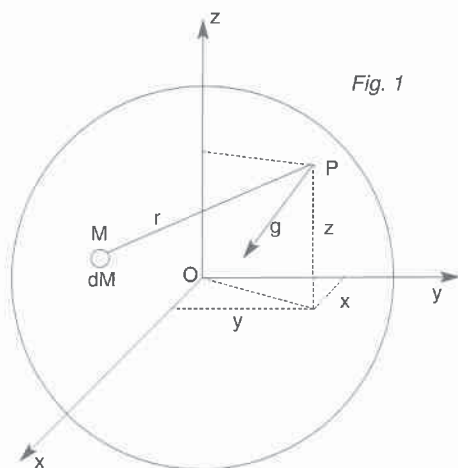


Fig. 1

b/ Si on attribue au potentiel une valeur numérique donnée W_0 , on définit une surface équipotentielle (ou de niveau) normale à toutes les verticales, et une seule. Deux surfaces de niveau, même très voisines, n'ont aucun point commun, elles s'enveloppent.

c/ L'intégrale $G \int dm/r$, c'est-à-dire le terme gravifique du potentiel W ,

– à l'extérieur des corps attirants, est une fonction **harmonique**. Elle vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

– à l'intérieur des corps attirants, elle vérifie une équation différentielle dite équation de Poisson :

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 4\pi G\mu$$

où μ est la densité de matière au point M considéré.

d/ On rappelle les théorèmes de Newton sur le potentiel gravifique de sphères constituées de couches attirantes concentriques :

- leur attraction est égale à celle de la masse totale concentrée au centre de la sphère, le potentiel est égal à GM/R .
- dans une cavité sphérique centrale, le potentiel est constant, l'attraction y est donc nulle.

GÉOÏDE

Par définition, le géoïde est la surface équipotentielle de la pesanteur qui coïncide au mieux avec le "niveau moyen" des mers. [4]

On aurait pu le définir également par un point origine précis – un repère de marégraphe par exemple – ou par une valeur numérique W_0 de ce potentiel au point origine. Ces trois définitions ne sont pas identiques, la première laisse entendre que le géoïde actuel n'est pas éternel, ce que démontrent la géologie ou même les variations à long terme du niveau moyen de la mer sur les côtes. Tout ceci implique qu'un très gros effort soit entrepris au point de vue expérimental géodésique et océanographique.

SYSTÈME DE RÉFÉRENCE 1980

L'Association Internationale de Géodésie a adopté en 1980, un modèle Terre de structure mathématique, qui résume un certain nombre de propriétés du corps terrestre par un petit nombre de valeurs expérimentales (Référence 1980).

C'est un ellipsoïde de révolution, sa surface est une surface équipotentielle de sa propre pesanteur (les deux conditions sont compatibles). Quatre constantes suffisent à la définir :

- 1° rayon équatorial : 6378 137 mètres
- 2° constante géocentrique gravitationnelle :
 $GM = 3986\,005 \cdot 10^8 \text{ M}^2 \text{ S}^{-2}$
- 3° facteur dynamique d'ellipsicité (sans la déformation permanente de marée) :
 $j_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$
- 4° vitesse de rotation terrestre :
 $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ radians par seconde}$

Cet ellipsoïde est orienté dans l'espace par son petit axe, parallèle à l'origine conventionnelle internationale, son méridien origine est parallèle au méridien origine du Bureau International de l'Heure (BIH).

Le World Geodetic System 1984 qui est à la base du GPS ne diffère pratiquement pas de la Référence 1980.

Le rayon équatorial se tire des mesures géodésiques de longueur, (triangulation, Laser spatial, etc.)

La constante gravitationnelle GM se déduit par les équations de la mécanique céleste, du mouvement observé des sondes spatiales à une certaine distance de la Terre.

j_2 est le terme qui intervient dans les équations de Clairaut exprimant la relation entre pesanteur, aplatissement terrestre et force centrifuge.

On trouvera dans les traités didactiques ou dans le Journal of Geodesy (alias Bulletin géodésique) les équations permettant de déduire tout le reste : cf. [5]

Il est bien évident que l'expression mathématique du potentiel terrestre W diffère du potentiel U de la référence et ce sont précisément les discordances des deux modèles qui seront utilisées pour déterminer le géoïde, ils ont seulement une valeur théorique commune $W_0 = U_0$ au niveau géoïde.

SYSTÈMES D'ALTITUDES. QUASI-GÉOÏDE

La référence altimétrique au niveau de la mer, n'a pas une signification équipotentielle très précise : on sait depuis longtemps qu'elle peut en différer de l'ordre du mètre. La nivelle de l'appareil niveleur se met en équilibre dans le plan tangent à la surface équipotentielle, d'où la dualité célèbre : altitude, potentiel. Une surface d'égale altitude n'est pas une surface équipotentielle, le géoïde mis à part, si on le définit comme "la surface de niveau zéro". Il faut donc sacrifier soit la notion de distance verticale, soit celle de repos des fluides.

On arrive cependant à réconcilier les deux aspects en adoptant un système d'altitudes.

Procédons à un nivellement géométrique de précision en mesurant à la fois la dénivelée des deux mires et la valeur de g à l'appareil (à la hauteur de la fiole!). Soit dh la dénivelée, la différence de potentiel entre les deux mires est égale à $g \times dh = dW$.

On peut donc mesurer la différence de potentiel entre deux repères de nivellement au sens quasi rigoureux. Le potentiel de la station nouvelle sera $W = W_0 + \sum gdh$.

On définira un résultat homogène à une altitude en divisant ce potentiel par une quantité homogène à g .

Généralisant à l'ensemble du réseau de nivellement, on appellera système d'altitude celui qui définit cette alti-

tude par l'expression $H = \sum gdh/g_m$, g_m étant une valeur de g convenablement choisie. Autrement dit l'altitude devient un nombre conventionnel (qui variera d'un système à l'autre en un point donné) mais qui en définitive, remplit à peu près toutes les conditions requises pour l'altitude.

Ces systèmes sont nombreux, seuls quelques-uns sont utilisés :

a/ altitude orthométrique :

$$H = \sum gdh/g_m$$

Elle est définie comme la distance verticale H du point considéré au géoïde. Elle aurait droit à tous les suffrages, malheureusement elle ne peut pas être calculée rigoureusement parce qu'on ne connaît g qu'approximativement le long de la verticale intérieure à la terre. On peut se contenter d'hypothèses approchées mais l'impossibilité théorique subsiste, une précision de l'ordre du centimètre paraît une limite de sa définition.

b/ altitude dynamique :

$$H = \sum gdh/\gamma_0$$

où γ_0 est une valeur théorique unique de la pesanteur théorique, au point considéré.

c/ altitude normale

(adoptée par l'IGN pour le réseau 1969) :

$$H = \sum gdh/\gamma_m$$

γ_m étant la pesanteur moyenne théorique à l'air libre du point considéré, dans le modèle de référence.

Remarquons que ces types d'altitude peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\gamma H = \sum gdh$$

$$\text{potentiel } U = \text{potentiel } W$$

γH étant la différence de potentiel d'un modèle Terre théorique. On appelle quasi-géoïde la surface d'altitude zéro du système d'altitudes considéré.

Ces altitudes sont en fait une manière de numérotiser les surfaces de niveau réelles dans le système de potentiel de référence.

Le quasi-géoïde des altitudes orthométriques serait le géoïde vrai. Si l'on exprime l'altitude d'un même point dans deux systèmes différents H_1 et H_2 , on aura :

$$H_1/H_2 = \gamma_2/\gamma_1$$

Ceci pourrait créer entre les quasi-géoïdes correspondants, des différences de quelques mètres au plus sur les plus hautes montagnes...

L'essentiel est de savoir ce que l'on fait.

DÉTERMINATION DU GÉOÏDE

C'est un des problèmes fondamentaux de la géodésie actuelle. L'Association Internationale de Géodésie y consacre les travaux d'une Commission Internationale et d'un Service International, [6] dans un vaste programme en vue d'établir un géoïde mondial.

Nous nous proposons ci-dessous de donner un aperçu des méthodes de calcul utilisées.

1°) Méthode astrogéodésique

On se propose de calculer une portion du géoïde dans une région donnée (la France par exemple) en comparant les coordonnées astronomiques d'un point soit (φ_A, λ_A) à des coordonnées géodésiques (φ_G, λ_G) exprimées dans un système de référence géodésique donné, par exemple triangulation nationale (même ancienne) mais homogène.

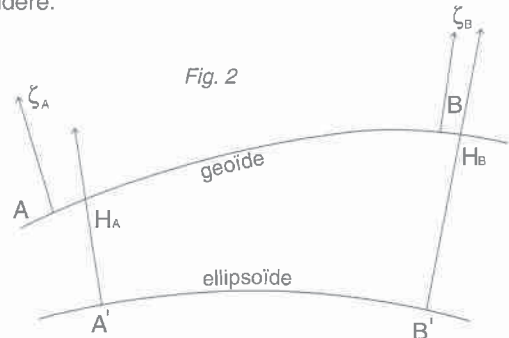
C'est la méthode qui a été appliquée avant l'apparition du GPS lequel fournit une méthode beaucoup plus rapide et plus précise pour parvenir au même but comme on le verra plus loin.

Si on appelle "déviations de la verticale" les discordances respectives entre latitude et longitude astronomique et géodésique.

$$\text{On a : } \xi = (\varphi_A - \varphi_G) \quad \eta = (\lambda_A - \lambda_G) \cos \varphi$$

(A astronomique = géoïde ; G géodésique = ellipsoïde).

Ce sont de petits angles, de quelques secondes sexagésimales, que font entre elles en un point donné, les directions des verticales respectives au géoïde et à l'ellipsoïde, donc des plans tangents à ces surfaces au point considéré.



La méthode la plus simple consiste à traiter l'ensemble de ces angles comme des angles de pente d'un nivellement indirect. La dénivelée entre deux points voisins A, B selon le côté AB sera :

$$H_B - H_A = - AB \cdot (\xi_A + \xi_B)/2$$

$$\text{où : } \xi_A = \xi_A \cos \alpha + \eta_A \sin \alpha$$

$$\xi_B = \xi_B \cos \alpha' + \eta_B \sin \alpha'$$

$$\alpha = \text{azimut AB}$$

$$\alpha' = \text{azimut BA}$$

Les inconnues sont H_A et H_B et tout le reste est connu avec une approximation suffisante. On écrit toutes ces relations entre couples de points A, B les plus proches, on procède à la compensation d'ensemble en se fixant la cote du géoïde en un seul point initial.

C'est de cette manière qu'on a construit un géoïde Européen, tiré des valeurs de la déviation de verticale collectées par G. Bomford, géodésien anglais, sur le réseau géodésique "Europe 1950". La dernière édition date de 1978 [7]. La France y participait par un réseau de 480 points de déviation de la verticale, observés en une douzaine d'années par la méthode des hauteurs égales sur tout son territoire. (1958-1970).

Le support de ce géoïde est l'ellipsoïde de Hayford (1924) sur lequel fut calculée la compensation européenne. On trouvera un peu plus loin une comparaison du résultat avec des travaux modernes.

2°) Méthode gravimétrique

Anomalies de la pesanteur – Géoïde gravimétrique

On appelle anomalie de la pesanteur en un point, la différence numérique entre la valeur g mesurée et la valeur γ que lui attribuerait le modèle géodésique de référence à la même altitude H .

$$\Delta g = g - \gamma$$

Cette anomalie peut-être positive ou négative et on sait que les géodésiens les dénomment suivant le modèle de comparaison :

- anomalies à l'air libre
- anomalies de Bouguer
- anomalies de Rudski
- anomalies isostatiques...

Les prospecteurs ont multiplié les mesures de g développées; associées à la géologie elles fournissent des indications précieuses et les réseaux gravimétriques se sont multipliés. De leur côté les géodésiens ne pouvaient négliger la mesure d'un paramètre aussi important dont ils avaient déjà fait largement usage au XVIII^e siècle. Un Bureau Gravimétrique International fut créé au sein de l'Association Internationale de Géodésie (1954), avec mission de collecter, unifier, publier les valeurs de g et des anomalies dans un réseau mondial, dont elle précise le canevas. Créé en 1954, le B.G.I. détient actuellement dans ses archives plus de 3 millions de données. Elles couvrent une grande partie de la sphère terrestre où elles sont présentées sous forme d'anomalies moyennes de surface (par exemple anomalies de $1^\circ \times 1^\circ$ au nombre de 64800) qui se prêtent à une intégration sur la sphère. Stokes a en effet montré (1849) que l'on pouvait calculer le géoïde en un point en procédant à l'intégration, sur la sphère, des anomalies de la pesanteur. C'est ce que nous allons approfondir.

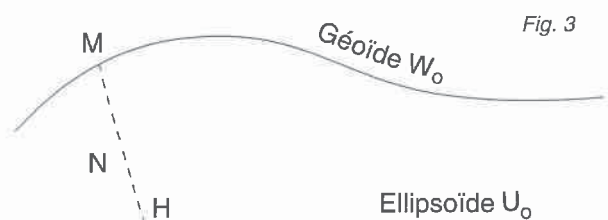
Soient en effet deux points homologues, l'un M sur le géoïde, l'autre H sur l'ellipsoïde de référence, à la verticale de M.

Nous supposons que, par une opération classique en gravimétrie, on ait réduit les valeurs de g au géoïde. L'anomalie Δg est la différence $g(M) - \gamma(H)$ où g et γ sont négatifs tous deux (vecteurs dirigés vers le bas).

Les hypothèses de base sont les suivantes :

- Le centre des masses terrestres et celui de l'ellipsoïde de référence sont confondus, les axes de coordonnées coïncident.
- Géoïde et ellipsoïde de référence sont des surfaces équipotentielle de leur propre pesanteur et par convention les expressions analytiques respectives de leur potentiel W (géoïde) et U (ellipsoïde) y prennent la même valeur $W_0 = U_0$.
- Les masses respectives sont égales.
- Les valeurs observées de la pesanteur terrestre sont réduites au géoïde.

On se propose de chercher une relation liant pour tout point M du géoïde, la pesanteur sur géoïde $g(M)$ et $\gamma(M)$ sur la référence, au potentiel "perturbateur" T défini au point M par l'équation $W(M) = U(M) + T$.



Au point M du géoïde, le potentiel de référence U devient :

$$U_0 + \frac{du}{dz} \cdot HM$$

et par conséquent :

$$W_0 = U_0 + \frac{du}{dz} \cdot HM + T \text{ avec } \frac{du}{dz} = \gamma$$

Il en résulte (formule de Bruns) :

$$HM = \frac{-T}{\frac{dU}{dz}}$$

d'autre part :

$$\frac{dT}{dz} = g_{(M)} - \gamma_{(M)} \text{ donc } \frac{dT}{dz} = g_{(M)} - \left(\gamma_{(H)} + M \frac{d\gamma}{dz} \right)$$

Mais l'anomalie de pesanteur est précisément la valeur : $\Delta g = g_{(M)} - \gamma_{(H)}$.

$$\text{On a donc finalement l'expression } \Delta g = \frac{dT}{dz} - \frac{T}{\gamma} \frac{d\gamma}{dz}$$

$$\text{et rétablissant } \Delta g \text{ avec son signe } -\Delta g = \frac{dT}{dz} - \frac{T}{\gamma} \frac{d\gamma}{dz},$$

expression qui lie en chaque point du géoïde, observation et potentiel perturbateur et peut servir dans les deux sens.

Dans l'hypothèse simplifiée où la référence est considérée comme une sphère de rayon R - c'est d'ailleurs le point de vue initial de la théorie de Stokes - l'équation ci-dessus devient :

$$-\Delta g = \frac{dT}{dp} + \frac{2T}{\rho} \quad \rho \neq R \quad dp = dz$$

Appelée souvent équation fondamentale de la gravimétrie, elle impose une condition au potentiel T qui doit la satisfaire sur chaque portion de surface terrestre - et ce doit être en plus une fonction harmonique. C'est dans cet esprit que Stokes a résolu le problème en 1849 en mettant en forme mathématique le calcul de T donc celui de $N = T/g$.

Il a montré que si on adaptait un développement de T en fonctions sphériques [8] on obtenait la formule :

$$T = \frac{R}{4\pi} \int \Delta g \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) \right] d\omega = \frac{R}{4\pi} \int \Delta g \cdot S(\Psi) d\omega$$

où :

- $d\omega$ = élément de surface sphérique pour Δg .

$$S(\Psi) = \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} + 1 - 5 \cos \Psi - 6 \sin \frac{\Psi}{2}$$

$$+ 3 \cos \Psi \text{Log} \left(\sin \frac{\Psi}{2} + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right)$$

- Ψ distance angulaire du point potentié au point potentiel.

- $P_n(\Psi)$ = polynôme de Légendre d'ordre n .

On effectue l'intégration sur la totalité de la sphère en chacun des points où on désire calculer la valeur de T , d'où $N = T/g$ altitude du géoïde au point considéré.

Cette méthode a permis de constituer des géoïdes mondiaux dès qu'on a disposé d'ordinateurs suffisants et d'une couverture mondiale (ou presque) d'anomalies gravimétriques d'abord sur $5^\circ \times 5^\circ$ puis ultérieurement $1^\circ \times 1^\circ$ et $0^\circ, 5' \times 0^\circ, 5'$.

En fait, une théorie plus complexe avait été mise au point en URSS vers 1950 par Molodensky et ses disciples. Elle généralisait la théorie simplifiée en prenant en compte les anomalies au niveau de la mesure, sur le relief. Elle était beaucoup plus complexe que celle de Stokes, mais travaillant par approximations successives, elle admettait la formule de Stokes en 1^{re} approximation.

De nombreux géoïdes mondiaux ont été calculés ainsi en particulier par l'Ohio State University (Rapp, Uotila).

L'application proprement dite n'est pas particulièrement délicate, mais il faut disposer de bonnes anomalies couvrant le monde entier. C'est la principale difficulté.



Fig. 4 – Liaisons au gravimètre utilisées dans le réseau IGSN 1971

L'Association Internationale de Géodésie y a consacré d'importants travaux. Dès 1951, elle avait décidé de constituer un réseau mondial de stations gravimétriques observées avec les moyens les plus précis de l'époque. Trois "bases" Nord Sud furent établies, l'une en Amérique partant de l'Alaska jusqu'à la pointe Sud du continent, une deuxième en Europe et Afrique joignant le Cap Nord à la Sicile, prolongée ensuite jusqu'au Cap de Bonne Espérance. Une troisième allait d'Australie en Alaska via le Japon. Elles étaient observées par mesures pendulaires relatives (précision de l'ordre du milligal). Elles étaient destinées à l'étalonnage des gravimètres que permettait leur grand compas de milligal du Nord ou du Sud à l'Équateur.

Des liaisons au gravimètre à latitude à peu près constante (faible variation en milligals) permettaient de comparer les étalonnages des 3 bases "méridiennes". En 1971, l'AIG pouvait ainsi publier son catalogue "IGSN" International Gravity Standardization Net 1971 fixant par une compensation d'ensemble, la valeur de g à $\pm 0,1$ milligal en 1854 stations réparties dans le monde entier, destinées à servir d'étalonnage aux mesures gravimétriques. Une dizaine de stations absolues connues alors, en assurent la valeur absolue et l'échelle. La multiplication actuelle des mesures absolues à mieux que $\pm 0,01$ milligal, supprime maintenant la nécessité et le grand mérite de ce beau travail [9], mais il est encore très utile.

3°) Ère spatiale

Le lancement des premiers satellites artificiels (1957) montra quelles nouvelles ressources s'offraient aux géodésiens. On construisit des instruments spéciaux d'observations : instruments d'optique précisant en fonction du temps, la position du satellite dans le champ des étoiles, instruments de radiotélégraphie pour définir la vitesse radiale d'un émetteur de bord, télémètres Laser sur prismes rétroreflecteurs portés par le satellite. On sut presque tous de suite que l'aplatissement terrestre admis par le modèle

de référence de l'époque devait passer de $1/297$ à $1/298,3$ (environ) comme d'ailleurs l'avaient déjà proposé des précurseurs (Helmert – 1901, Heiskanen – 1938, Isotof – 1945) d'après l'analyse des données de leur époque (méthode des arcs, méthode gravimétrique).

Le problème essentiel du potentiel gravifique terrestre avait concentré tout de suite l'attention des gravimétristes. Fin XVIII^e siècle, Laplace (et Legendre) avaient étudié le potentiel d'un corps sphérique hétérogène et étaient parvenus aux résultats suivants : on peut définir sur une sphère, un ensemble de fonctions (dites sphériques) qui permettent, par un développement en série, de définir dans l'espace extérieur, le potentiel et même toute fonction dont on connaît la valeur sur la sphère [8].

- ces fonctions sont harmoniques et forment une suite orthogonale.
- elles sont définies par leur degré n .
- il y a par degré n , $(2n + 1)$ fonctions harmoniques élémentaires.
- elles ont la forme :

$$Y_n = P_n^m \cos(\theta) \times \begin{cases} \cos m\lambda & \text{avec } 0 \leq m \leq n \\ \sin m\lambda & \end{cases}$$

P_n^0, P_n^m sont des polynômes connus de degré égal ou inférieur à n , θ est la colatitude $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, λ la longitude.

Ces fonctions réalisent dans l'espace à 2 dimensions de la surface de la sphère, une analyse harmonique très analogue à l'analyse de Fourier sur le plan.

Finalement on démontre que le potentiel gravifique terrestre en un point extérieur P de l'espace, distant de ρ du centre des masses, est de la forme :

$$V = \frac{GM}{\rho} \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \cdot P_n^m(\sin\varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) + \dots \right]$$

où les C_{nm}, S_{nm} , sont des constantes numériques à déterminer,

- φ la latitude géocentrique ($\theta = \pi/2 - \varphi$),
- λ la longitude,

- R le 1/2 grand axe de l'ellipsoïde de référence,
- ρ la distance OP.
- GM produit de la constante gravitationnelle par la masse de la Terre.

Bornons-nous à symboliser la fonction $V(\rho, \varphi, \lambda)$ sous la forme :

$$V = \frac{GM}{\rho} \left[C_0 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 Y_2 + \dots + \left(\frac{R}{\rho}\right)^n Y_n + \dots \right]$$

sachant que chacune des fonctions sphériques Y_n est un ensemble de $(2n + 1)$ fonctions de la forme définie plus haut.

Cette expression du potentiel pourrait servir à définir le géoïde en écrivant que la fonction $V + 1/2 \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta = W_0$ coïncide avec la valeur du potentiel de la pesanteur à la surface du modèle de référence dont l'expression est bien connue et calculable [8].

L'équation $V(\rho, \varphi, \lambda) = C_0$, lorsque l'on connaît la valeur des constantes C_{nm} , S_{nm} , donne une expression du potentiel gravifique de la Terre, applicable dans l'espace satellites.

La connaissance de ces constantes numériques est donc fondamentale, mais c'est là que commence le problème !

1° Il y aurait intérêt à adopter un nombre élevé d'harmoniques Y_n , mais il est bien connu que la somme des n premiers entiers impairs $1 + 3 + \dots + 2n + 1$, est égale au carré de n , soit n^2 inconnues = 1^{re} difficulté d'ordre numérique (ordinateur), on doit se limiter.

2° Le théorème dit de Shannon, enseigne "... qu'une fonction physique peut être complètement reconstituée à partir de ses échantillons, seulement si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le spectre des fréquences". Ce qui entraînerait des n prohibitifs pour analyser les détails.

3° Les C , S , ne sont pas les seules inconnues du problème ; le champ gravifique est perturbé par des causes multiples qui modifient la trajectoire du satellite, citons

- les marées océaniques ;
- l'attraction luni-solaire ;
- la résistance atmosphérique résiduelle au mouvement ;
- la pression de radiation (solaire et terrestre) ;
- etc.

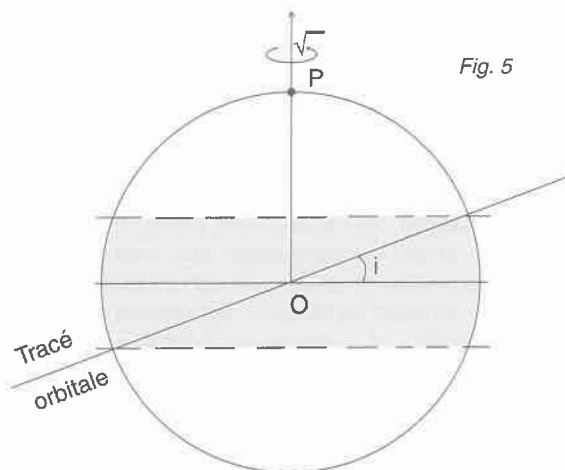
dont l'action doit entrer en compte dans la mise en équation du mouvement. Il s'y ajoute des inconnues naturelles au problème, telles que les coordonnées des stations d'observation.

Les observations possibles sont essentiellement – en fonction du temps – :

- des observations optiques (chambres photographiques) sur fond des étoiles ;
- des observations de distance (télémètres LASER) ;
- des observations de vitesses radiales (effet Doppler).

Tout ceci doit être mis en équation en fonction des paramètres cherchés, après réduction des observations au centre des masses de la Terre, origine des coordonnées, et attribution de poids adéquats.

On désire évidemment que le système d'équations résolvantes soit bien conformé, afin de bien caractériser les inconnues.



En toute première approximation (terre sphérique et orbite plane) le satellite ne survolera, compte tenu de la rotation terrestre, que les zones de latitudes égales ou inférieures à l'angle i , inclinaison équatoriale de l'orbite. Il en résulte que si l'on veut analyser de manière détaillée le champ total de la gravité terrestre, il faudra disposer d'une gamme de satellites correspondant à des inclinaisons de lancements très variées, entre 0° et $\pm 90^\circ$.

Les facteurs $(R/\rho)^n$ qui interviennent dans l'expression du potentiel jouent un rôle important dans le développement de la fonction potentielle :

1° Au point de vue mathématique, la série $(R/\rho)^n Y_n$ n'est convergente que si $\rho > R$. On n'a donc pas le droit de la prolonger jusqu'au sol terrestre, au moins théoriquement.

2° Pour les valeurs élevées de l'indice n , dans l'espace, $(R/\rho)^n$ est très petit, ce qui entraîne deux conséquences :

- l'une fâcheuse, puisque l'influence de l'action des harmoniques de grande fréquence se perdra dans le bruit de fond,
- l'autre favorable, puisqu'aux hautes altitudes, le potentiel est sensible seulement aux faibles fréquences et de ce fait, la trajectoire des satellites élevés sera plus facile à définir et à calculer avec précision. C'est une des raisons pour lesquelles la constellation GPS gravite à 20 000 kilomètres.

Si la terre était un corps de structure sphérique parfaite, l'orbite d'un satellite serait selon les lois de Képler, une ellipse admettant le centre géométrique terrestre comme foyer. Elle serait décrite selon la loi des aires en fonction du temps et sa période serait liée par la 3^e loi de Képler au demi-grand axe de l'ellipse par la relation :

$$GM = 4 \pi^2 a^3 / T^2$$

En réalité l'orbite elliptique est perturbée par les irrégularités des masses attractives du corps terrestre dont chacune agit pour son propre compte ce qui permet d'espérer d'en mettre au moins l'essentiel en évidence : les écarts de la trajectoire du satellite par rapport à une première solution elliptique sont suffisamment faibles pour que cette solution puisse servir de base de départ à un processus d'approximations successives.

On ne saurait dans le cadre de cet article, entrer dans le détail des calculs qui, de l'observation du satellite, vont permettre de tirer des résultats intéressants le géoïde. Le mieux, si l'on désire approfondir la question est de s'en

rapporter à un ouvrage qui les explicite et les décrit tel que [10]. Bornons-nous à résumer les étapes :

1°/ Dès la mise en orbite, le satellite est suivi par les observateurs qui mesurent ses coordonnées équatoriales en fonction du temps, α , δ .

Une observation est constituée par la mesure d'ascension droite α et de la déclinaison du satellite β à l'instant t . On multiplie ces observations pendant une dizaine de minutes et on les traite selon une méthode due à Laplace, qui permet de déterminer par un développement en série en fonction du temps t , les valeurs α , S et les dérivées première et seconde des positions apparentes α' , S' , α'' , S'' (série de Taylor).

Elles sont ramenées au centre de la terre, ce qu'implique un processus d'approximations successives.

On connaît donc à l'instant t au centre de la terre

(α , δ) direction du satellite.

Δ la distance centre terre satellite,

(x , y , z) ses coordonnées,

(x' , y' , z') ses coordonnées de vitesse.

2°/ Par un formulaire classique [10], il est possible d'en déduire les éléments géométriques de mise en place de l'ellipse dans le système terrestre (Ox , y , z) à savoir :

demi grand axe de l'orbite a
 excentricité e
 inclinaison de l'orbite sur l'équateur i
 ascension droite du nœud ascendant Ω
 argument de latitude du périhélie ω
 période et moyen mouvement T , ($2\pi/T = n$)

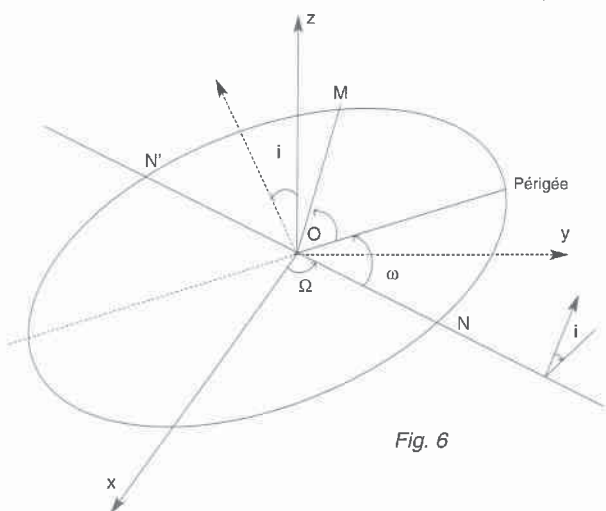


Fig. 6

Ces éléments seraient invariants dans le cas du mouvement elliptique pur.

Inversement il est possible de tirer des coordonnées (a , e , i , Ω , ω , n) les coordonnées (x , y , z , x' , y' , z').

Les éléments elliptiques considérés définissent "l'ellipse osculatrice", celle que décrirait le satellite si, à l'instant t , les perturbations avaient disparu. Les effets perturbateurs s'appliqueront aux éléments osculateurs et communiqueront aux différentes variables des accroissements différentiels dont la valeur observée s'exprimera par des dérivées (da/dt , de/dt , di/dt , $d\Omega/dt$, $d\omega/dt$, dn/dt) et tout le problème sera d'attribuer ces variations aux différentes actions perturbatrices en les modélisant. C'est un problème de mécanique céleste.

Deux formulaires traduisent l'influence des actions perturbatrices sur l'ensemble (a , e , i , Ω , ω , n).

L'un, dû à Gauss, exprime les dérivées (da/dt , de/dt , di/dt , $d\Omega/dt$, $d\omega/dt$, dn/dt) directement en fonction des forces composantes agissant sur le satellite, telle que freinage atmosphérique, électrique, pression de radiation. Il s'applique à tous les types de forces (modélisées).

Lagrange de son côté, a écrit un système de 6 équations applicables en mécanique dans le cas de l'existence d'un potentiel perturbateur.

Ce champ perturbateur est résumé dans le développement :

$$\mathfrak{R} = \frac{GM}{\rho} \left[\left(\frac{R}{\rho} \right) Y_2 + \dots + \left(\frac{R}{\rho} \right)^n Y_n + \dots \right]$$

Il ne contient pas de terme : $\frac{GM}{\rho}$

qui engendre le mouvement elliptique pur, ni le terme :

$$GM \left(\frac{R}{\rho} \right) Y_1$$

qui correspond au choix du centre O (centre des masses terrestres comme origine commune à la méthode gravimétrique).

Soient, da/dt , de/dt , di/dt , $d\Omega/dt$, $d\omega/dt$, dM/dt , les dérivées des éléments elliptiques (éléments osculateurs), Lagrange a montré que dans le cas d'un champ de potentiel perturbateur \mathfrak{R} existaient les 6 relations suivantes [10] :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} ; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} ; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \Omega} ; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i} ; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i} ; \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} \end{aligned}$$

C'est un système différentiel du 6^e ordre qu'il s'agit d'intégrer et d'abord d'explicitier littéralement.

Notons seulement que les J_n^0 , C_n^m , S_n^m , y figurent comme coefficients inconnus des fonctions sphériques, ils entrent donc directement dans l'expression des perturbations et des vérifications.

Le développement de la fonction perturbatrice (approximations successives) et son intégration mettent en évidence des termes dits séculaires, des termes à longue et à courte période.

L'influence luni-solaire, dépend également des équations de Lagrange mais c'est un développement à part.

La fonction perturbatrice Y_2 contient en particulier un terme zonal J_2 . Le développement du système de Lagrange par rapport aux éléments moyens, aboutit en 1^{re} approximation aux valeurs suivantes pour Ω , ω , M .

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} K \cos i_0 . t$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{4} K (4 - 5 \sin^2 i_0) . t = \bar{\omega}$$

$$M = M_0 + n_0 t + \frac{3}{2} K \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) . t = \bar{M}$$

$$\text{avec : } K = \frac{n_0 \mathfrak{R}^2 J^2}{a_n^2 (1-e^2)^2}$$

Dans le facteur K on retrouve le fameux terme j_2 qui intervient dans le développement du potentiel de la Terre et dans celui de la référence. Ces 3 expressions sont fonctions linéaires du temps t et par conséquent, correspondent à des mouvements qui s'accumulent à l'observation (tour par tour). C'est de l'observation du mouvement (rétrograde) du nœud ascendant de l'orbite que l'on a déduit la valeur de j_2 adoptée dans le modèle de référence. Cette valeur est bien meilleure que ce que l'on pourrait obtenir à partir des équations de Clairaut.

Les a, e, i ne peuvent pas contenir de termes séculaires, ce sont "des fonctions linéaires et homogènes des dérivées de la fonction perturbatrice R par rapport à des éléments figurant dans les fonctions trigonométriques" [10], ils sont donc stables en moyenne, et on peut définir une orbite moyenne où les valeurs (a, e, i) deviennent (a_0 , e_0 , i_0) et où les paramètres (Ω , ω , M) sont fonction du temps comme le montre le système ci-dessus. La différence entre valeurs moyennes et la valeur instantanée à t, donne les variations δa , δe , δi , $\delta \Omega$, $\delta \omega$, δM permettant de former les équations d'observations.

Nous ne pénétrerons pas plus dans le développement général de la fonction perturbatrice pour laquelle on consultera [11], [12]. Sachons toutefois qu'il est possible de mettre les perturbations provenant des termes Y_n en équation jusqu'à l'ordre nécessaire.

Les premiers modèles de géoïde par satellite sont apparus vers 1965, la "Standard Earth" du Smithsonian Astrophysical Observatory, contenait les valeurs numériques :

- de la constante $GM = 398\,603,2$;
- du demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre évalué à 6378 165 m (à comparer avec les valeurs de la référence 1984) ;
- les valeurs des harmoniques zonales pairs et impairs jusqu'à J_{13} ;
- les harmoniques Tisseraux jusqu'à $n = 7$, $m = 6$;
- les coordonnées géocentriques de 12 stations d'observation.

Ses promoteurs avaient exploité les résultats de la poursuite de 10 satellites (Fig. 8).

D'autres solutions apparurent vers la même époque basées sur le réseau TRANET et les observations DOPPLER.

Des travaux plus récents ont été publiés, chacun d'eux présentant un progrès par rapport à ce qui précédait.

Leur but est d'assurer aux orbites des satellites les précisions de plus en plus fines qu'exige la mise en œuvre des systèmes mondiaux de détermination des positions terrestres, GPS, son rival GLONASS (Russie), DORIS système Français, veulent des orbites connues au décimètre ou mieux. Tout cela comporte une infrastructure et une organisation mondiale d'observation au sol chargée de contrôler la position des satellites, de publier les éphémérides dans un champ de la gravité très fouillé.

Tout récemment un modèle global de champ de gravité a été publié conjointement par le Geodätisches Forschung Zentrum de Postdam (Allemagne) et le Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale (GRGS) de Toulouse et Grasse, qui lui ont consacré un très bel article (en Anglais) dans le journal of Geodesy. Vol 71 - N° 4 - mars 1997. C'est le modèle GRIM 4 qui comporte 2 solutions GRIM 4 - S4 et GRIM 4 - C4. [13].

Il prend la suite de 3 modèles précédents GRIM 1, 2, 3 par les mêmes auteurs. Le sommaire explique "... *Un modèle précis du champ de gravité est une exigence a priori pour la restitution des orbites, des positions des stations de poursuite et la réduction des données altimétriques... Le nouveau modèle existe en deux versions, la première (S4) dérive uniquement des données recueillies sur 34 satellites, la seconde (C4) incorpore des données altimétriques sur les océans et des données de pesanteur terrestre... les modèles sont des solutions en harmoniques sphériques et ont une résolution d'ordre 60 pour GRIM 4.S4 et d'ordre 72 pour "GRIM 4.C4 ce qui correspond à une résolution spatiale de 555 kilomètres à la surface de la terre..."*

Le système résolvant du traitement d'ensemble par les moindres carrés comportait 5252 inconnues. Il a été tenu compte des termes dus aux marées, des termes de résistance de la haute atmosphère, etc.

La partie la plus intéressante pour nos lecteurs est certainement celle qui traite de la précision des résultats obtenus. Nous reproduisons à suivre deux tables extraites de [13].

La table 1 présente la comparaison avec d'autres travaux similaires exécutés aux U.S.A On y notera en particulier l'amélioration de la précision des valeurs des anomalies de pesanteur de GRIM 4 due à l'introduction des valeurs des anomalies superficielles dans le modèle C4.

La table 2 montre la précision obtenue par GRIM. S4 et GRIM. C4 dans la définition de l'orbite des satellites,

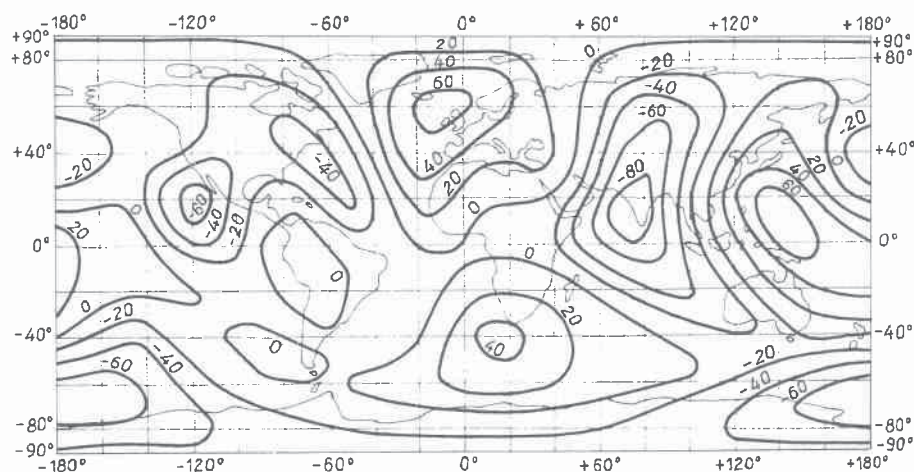


Fig. 8 a – Géoïde d'après ANDERLE (1966)

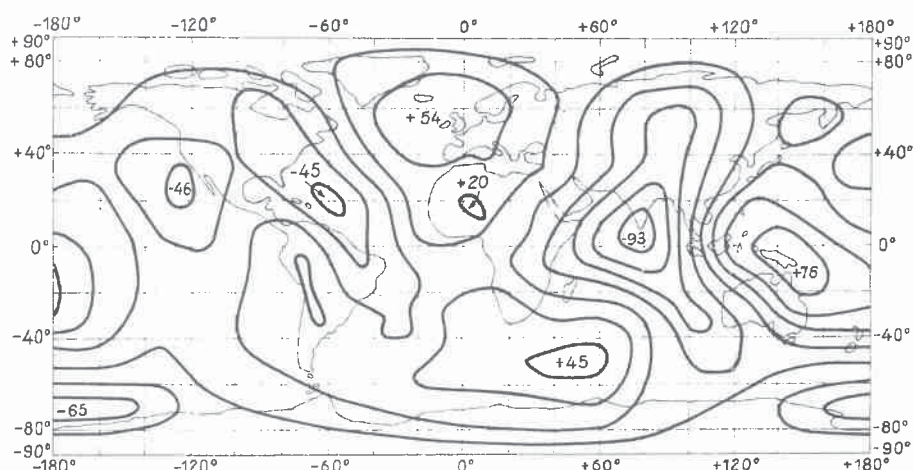


Fig. 8 b – Géoïde de la Standard Earth d'après GAPOSCHKIN (1967)

Data set	Data type (Unit)	Resolution	GRIM4-S4 JGM2-S	GRIM4-C4 JGM3
Altimetry MSS93	N (m)	1° X 1°	1.41 (-17.1...10.1) 1.39 (-14.9...9.9)	0.77 (-9.7...8.6) 0.76 (-9.9...8.7)
MSS95a	N (m)	5° X 5°	0.76 (-4.4...3.2) 0.73 (-5.7...2.7)	0.30 (-2.9...1.2) 0.24 (-3.0...1.2)
OSU92	N (m)	5° X 5°	0.75 (-4.5...2.8) 0.72 (-3.8...2.5)	0.25 (-3.0...1.6) 0.21 (-2.3...1.4)
OSU95	N (m)	5° X 5°	0.79 (-5.0...3.0) 0,76 (-6,3...2,4)	0.35 (-3,4...1,8) 0,30 (-3,6...1,8)
Marsh 89*	Δg (mgal)	5° X 5°	4,3 (-21,3...19,7) 4,3 (-19,1...20,3)	3,2 (-13,6...24,4) 3,1 (-14,0...19,4)
Gravimetry OSU89*	Δg	5° X 5°	6,4 (-27,6...28,6) 6,5 (-26,4...30,3)	5,7 (-27,1...31,0) 5,6 (-27,4...29,7)
Doppler/GPS-Levelling DGL90*	N (m)	point values	1,56 (n = 941) 1,52 (n = 936)	1,11 (n = 843) 0,93 (n = 773)
Spher. harm. model JGM2-S	N (m) Δg	5° X 5° 5° X 5°	0,60 (-3,0...4,0) 2,2 (-11,4...13,1)	
JGM3	N (m) Δg (mgal)	5° X 5° 5° X 5°		0,43 (-3,8...5,7) 2,4 (-31,0...37,1)

Table 1 – Intercomparisons with external data sets, wrms (min... max) of residuals after bias adjustment (N-geoid undulation, Dg-gravity anomaly, n : number of non-rejected points, *comparison up to degree 50 only).

Table 2 – Orbit fit to tracking data

Satellites	Arc length	Type of data	GRIM4-S4	GRIM4-CA	JGM2S	JGM3
ERSI	5d	laser (cm)	8,3	7,7	11,8	10,8
		X-over (cm)	14,7	14,3	16,6	14,9
SPOT-2	3d	Doris (mm/s)	,58	,57	,58	,57
STARLETTE	7d	laser (cm)	12,8	12,5	11,8	12,0
STELLA	6d	laser (cm)	11,6	10,9	85,7*	14,1
TOPEX	4d	laser (cm)	4,6	4,4	4,8	4,7
		Doris (mm/s)	,55	,55	,55	,55
		X-over (cm)	9,5	9,5	9,5	9,5
		GPS-SST (cm)	2,4	2,5	2,4	2,4
LAGEOS-1	10d	laser (cm)	4,9	4,8	5,9	5,9
LAGEOS-2	10d	laser (cm)	4,4	4,4	5,3	5,1

* no STELLA data included

Fig. 9 – Tables 1 et 2

comparée à celle de deux autres modèles sur les mêmes satellites.

L'attention des lecteurs est attirée sur la précision radiale obtenue par les orbites des satellites ERS1 et TOPEX-POSEIDON (voir Table 2); d'autre part, la précision atteinte par DORIS sur la position au sol s'élève à ± 2 cm, ce qui implique au moins une même précision orbitale.

Il est difficile de dire quelle est la précision d'un géoïde issu des mesures spatiales. D'une part on ne peut aller trop loin dans le développement de la fonction perturbatrice par suite de la multiplication des inconnues qui croît comme le carré de l'ordre n , d'autre part le facteur :

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^n$$

étouffe rapidement l'influence des anomalies de faible étendue, lorsque la résolution des appareils de mesure de poursuite est atteinte : à 1 000 kilomètres d'altitude le facteur :

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^n$$

est de l'ordre de 5×10^{-4} de sa valeur pour $R/\rho = 1$.

Dans les comparaisons de modèles globaux, l'emploi des mêmes données, aboutit à des résultats voisins. La table 2 mesure un bon accord GRIM 4 avec JGM2S sauf sur le satellite STELLA qui précisément n'est pas entré dans le calcul JGM2S.

[13], indiquant pourquoi GRIM 4 existe sous les deux variantes S4 et C4 explique que S4 est indépendante de toute hypothèse concernant la surface topographique de la mer, ce qui permet d'utiliser ce géoïde pour la différentier des valeurs obtenues par altimètre, et considère "qu'une restitution précise du champ de gravité par satellites est limitée au degré Y_{10} ou Y_{15} par suite de la variabilité de la surface topographique de la mer au cours du temps". La combinaison S4, C4 donne une représentation plus complète et il y a longtemps que les différents modèles de potentiel utilisent concurremment les anomalies gravimétriques, tentative toute naturelle puisque la pesanteur est le gradient du potentiel. Dans le cas précis de GRIM 4 la résolution spatiale de S4 est sensible à des traits du géoïde de l'ordre de 2000 km et celle de C4 à des traits de 500 km, tous deux sont équivalents pour le calcul des orbites.

La précision du géoïde correspondant varie d'une région de la terre à une autre. Elle dépend de la densité des mesures de g , d'une part, de la fréquence des passages de satellites d'autre part : les régions polaires ne sont pas survolées et ne sont pratiquement pas couvertes. GRIM 4.C4 annonce en basant son évaluation sur la matrice de variance-covariance un écart type de $\pm 1,54$ m dans les régions polaires, $\pm 0,66$ m sur les océans, $\pm 0,89$ m sur les continents, $\pm 7,7$ milligals pour les anomalies gravimétriques avec des maxima de l'ordre de 20 milligals.

La table 1 tirée de [13] donne quelques autres comparaisons qui sont du même ordre de grandeur, sauf pour les systèmes antérieurs à 1990. Parmi les modèles le plus utilisé par les géodésiens pour leurs études, OSU 91 [14], modèle global mixte, catalogue les anomalies gravimétriques $360 \times 360^\circ$, mais affiche des précisions de l'ordre de 2,00 m sur les pôles, $\pm 0,26$ m sur les océans, $\pm 0,38$ m sur les régions bien couvertes (anomalies) et un écart type de $\pm 0,57$ m. Sans ergoter davantage, disons

que les modèles globaux de géoïde ont une précision de $\pm 0,8$ m sur les continents et $\pm 0,5$ m sur les océans, mais on est encore loin du décimètre ou du centimètre, à moins que par des études locales on puisse localement séparer des traits plus fins sur des régions limitées.

GPS ET GÉOÏDE

Le modèle global de potentiel de GPS est le World Geodetic System – W.G.S. 1984. C'est lui qui assure le calcul des orbites de la constellation des 24 satellites avec la précision voulue – il reçoit en permanence des améliorations et des mises à jour, et on sait que les satellites sont rigoureusement suivis par un secteur de contrôle attentif.

À un instant t donné, les calculs orbitaux permettent de définir la position spatiale (x, y, z, t) de chacun dans le système général de la référence géodésique.

Dans ces conditions x, y, z sont bien des coordonnées de l'espace de l'ellipsoïde de référence, en particulier l'altitude d'un point de station peut être rapportée à l'ellipsoïde par un calcul facile de géométrie.

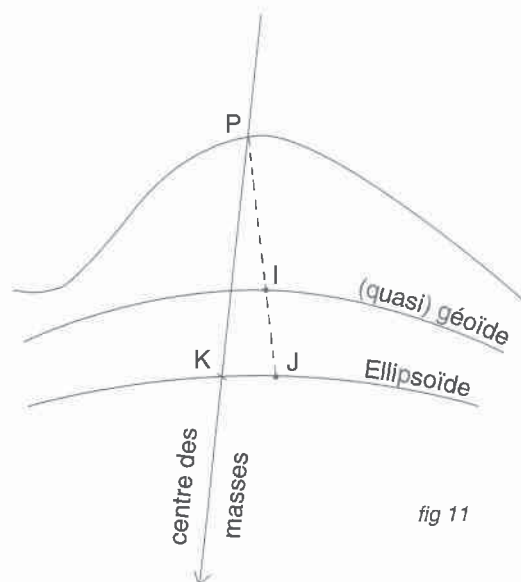


fig 11

Soit alors P le point de station, HE son altitude ellipsoïde. L'altitude du point P donnée par le nivellement est HN.

Nous avons $PJ = HE$, $PI = HN$, donc la quantité IJ représente l'altitude du zéro du nivellement au-dessus de l'ellipsoïde – c'est donc un point du (quasi) – géoïde. On peut donc construire point par point un (quasi) géoïde d'altitude $HG = HE - HN$. Ses erreurs ne peuvent provenir que des erreurs sur HE ou sur le nivellement HN (voir plus loin).

Amélioration d'un géoïde national ou local

La propriété qui vient d'être mise en évidence permet, au moins théoriquement et sous bénéfice d'inventaire, d'étendre à toutes les terres émergées un géoïde aussi détaillé qu'on le voudrait. On n'en n'est pas encore là, mais on peut espérer améliorer considérablement un géoïde national ou international entre pays connexes en unissant les efforts et les travaux.

L'Association Internationale de Géodésie en a confié la coordination au Service International du Géoïde et au Bureau Gravimétrique International. Le but fixé est le

"géoïde centimétrique". Le problème n'est pas simple et exige de nombreux travaux préliminaires, portant sur des étendues assez importantes, quoique modestes par rapport à la sphère terrestre, correspondant à des régions où la cartographie, et la géodésie géométrique et physique sont bien connues.

On part d'un système de géoïde global, le O.S.U.91A est souvent employé en raison de son développement, mais d'autres modèles tel que EGM 96, de même découpage et plus récents sont également valables, et on doit l'améliorer localement.

Quel qu'il en soit, le géoïde du modèle est donné par la formule de Stokes :

$$N = \frac{R}{4\pi g} \int \Delta g \cdot S(\Psi) \, ds$$

ou par le calcul du développement harmonique du potentiel. Il ne contient que les anomalies gravimétriques $360^\circ \times 360^\circ$ et on doit calculer dans la région intéressée, les anomalies gravimétriques qui ne sont pas prises en compte dans l'intégrale ci-dessus, dont le pouvoir séparateur, la résolution, est limitée au degré 360. La hauteur N du géoïde dans la région considérée doit être augmentée d'un dN :

$$N = \frac{R}{4\pi g} \int (\Delta g' - \Delta g) S(\Psi) \, ds$$

où Δg est l'anomalie du modèle, $\Delta g'$ l'anomalie à moyenne et à très petites longueurs d'onde dans la région considérée, qui n'est pas intervenue dans le calcul de la formule de Stokes du modèle. On a alors recours à un modèle numérique du terrain (MNT pour parler le langage des professionnels). C'est la description numérique détaillée du terrain, en prismes, déduite de la cartographie de la région étudiée. On lui demande une grande finesse, l'effet de chaque prisme sera traité comme un élément différentiel de la loi d'attraction universelle de masse dm.

$$\text{Attraction} = G \cdot \frac{(H - H_0) \, dm}{r^3} \quad \text{Potentiel} = G \cdot \frac{dm}{r}$$

En principe un modèle régional de terrain peut être décrit par une transformation de Fourier à deux dimensions et analysé en longueur d'onde. On peut donc par un programme adéquat, isoler des gammes de fréquence de la topographie correspondant grosso modo, aux grandes longueurs d'onde (spatial), aux moyennes (anomalies $1^\circ \times 1^\circ$) et aux petites longueurs d'onde (M.N.T.). Cette décomposition va permettre d'entrer dans le détail, en isolant tel domaine que l'on veut, pour opérer seulement sur un ou les autres.

C'est ce qu'explique [15]. "La haute fréquence s'obtient à partir d'un modèle numérique de terrain (MNT) dont la finesse du pas influencera la précision des calculs. En fonction de la disponibilité et des variations de la topographie on choisira un pas de 5 à 1 kilomètre voire mieux et un débordement du MNT, par rapport aux données gravimétriques, d'au minimum une demi longueur d'onde caractéristique du potentiel, soit 55 km. On calcule ensuite un MNT filtré en supprimant toutes les longueurs d'onde plus courtes que 55 km. Celui-ci représente la surface topographique de référence qui devrait correspondre au potentiel de degré 360. En soustrayant le MNT filtré du MNT original on obtient le modèle résiduel de terrain qui sera utilisé pour calculer l'effet de la topographie. Numériquement cette opération est réalisée en une étape..." (Programme).

Le modèle résiduel de terrain est une surface assez bien lissée, elle va pouvoir servir d'une part à calculer les anomalies gravimétriques détaillées de la région étudiée et la variation de potentiel qui en résulte donc la hauteur du géoïde par l'équation de Bruns. Son intérêt est de créer un lissage très efficace de la surface topographique.

Étant donné l'énormité des calculs, des fichiers à mettre en mémoire, la difficulté de constituer des M.N.T. suffisamment détaillés, on comprendra facilement que la méthode ne puisse pas s'appliquer à de très grandes étendues.

Voici comment [16] se résument les calculs de la méthode du terrain résiduel.

Le potentiel perturbateur T est divisé en 3 parties M, R, RT :

$$T = T_M + T_R + T_{RT}$$

T_M est la partie relative au modèle global adopté (OSU 91 A)

T_R contient des ondes moyennes

T_{RT} est le domaine du terrain réduit - fréquence ≥ 360

1°) Δg_M est l'anomalie due au modèle global, on la calcule par l'équation dérivée (par rapport à r) de l'équation du modèle global.

2°) Δg_{RT} est la composante verticale de l'attraction du terrain résiduel par la masse dm :

$$\Delta g_{RT} = G \int \frac{(H - H_0)}{r^3} \, dm$$

(l'expression $\frac{(H - H_0)}{r}$ est le cosinus de l'angle du rayon vecteur avec la verticale).

$$3^\circ) \Delta g_R = \Delta g - (\Delta g_{RT} - \Delta g_M) - \Delta g_M.$$

Cette partie provient des anomalies de longueur d'onde "moyennes" Δg qui résultent soit de nouvelles mesures (procurées par le B.G. International) convenablement réduites, soit du (MNT) dans la gamme R du terrain. Elles sont intégrées par la formule de Stokes.

Δg_{RT} est un effet indirect : la suppression des masses (ou leur introduction) provoque une variation de potentiel, souvent minime, mais dont il faut tenir compte (MNT).

En définitive le géoïde en un point est la somme

$$N = N_M + N_R + N_{RT}$$

où N_M est connu... formule de Stokes,

N_R est connu... formule de Stokes,

N_{RT} est obtenu en calculant la variation

de potentiel au point considéré,

et en appliquant la formule de Bruns :

$$N = \frac{T_{RT}}{g} \quad \text{on trouve } N = \frac{GR^2}{\gamma} \int \frac{\rho(H - H_0)}{r} \, d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire et $r(H - H_0)d\sigma = dm$, qui est la masse d'un potentiel de simple couche plane, limitée à la surface plane du MNT.

C'est sur l'analyse "spectrale" du terrain que repose tout l'édifice.

Comme déjà dit plus haut, la somme des calculs est imposante, mais on peut espérer en calculant les géoïdes locaux par facettes, arriver à une solution d'ensemble acceptable sur la surface Européenne par exemple, sur la surface USA plus CANADA en Amérique du Nord etc. L'émulation est grande !

GÉOÏDE ET NIVELLEMENT

Nous avons vu plus haut qu'il était possible de définir point par point un quasi géoïde en comparant l'altitude d'un point, telle que l'a fournie le nivellement direct H_N d'une part, rapportée à son (quasi) géoïde et le nivellement GPS, d'autre part, rapportée à l'ellipsoïde de la référence internationale : H_E : l'altitude du (quasi) géoïde par rapport à la référence internationale est :

$$H_G = N = H_E - H_N$$

Répetons, c'est important, que les trajectoires des satellites GPS sont connues en x, y, z au moins au décimètre près, elles sont suivies et corrigées quotidiennement [14] et exprimées dans le système géométrique de la référence géodésique W.G.S. 1984.

En principe le géoïde (nommons le GPS) et le géoïde gravimétrique tels qu'on vient de les définir précédemment devraient coïncider.

C'est un problème important : les praticiens qui de nos jours utilisent GPS seraient heureux de fixer l'altitude de départ de leurs travaux par les résultats GPS sans trop les vérifier sur le nivellement direct. L'évidence théorique est là : le potentiel dont le gradient agit sur la bulle du niveau est le même que celui qui gouverne la pesanteur. C'est même une équation de condition reliant les deux types de mesure !

Actuellement, tous les géodésiens qui calculent un géoïde gravimétrique, cherchent le recoupement avec le géoïde GPS et chacun, suivant son tempérament, a tendance à incriminer les erreurs systématiques de l'un ou l'autre : elles existent en effet. Il est exact que le réseau initial N.G.F. établi autour de 1900 et le réseau IGN 1969 présentent un écart systématique Nord-Sud atteignant 50 cm entre Dunkerque et Bayonne. Il n'est pas dû, contrairement à ce que l'on entend dire parfois, au choix des altitudes normales ; c'est un systématisme d'observation qui a été confirmé par une compensation identique appliquée séparément aux dénivelées brutes mesurées des deux réseaux. Une traversée Nord-Sud faite postérieurement n'a pas départagé les deux concurrents, elle est entre les deux.

La plupart des (quasi) géoïdes locaux montrent par rapport au géoïde GPS un systématisme qu'une transformation linéaire en x, y (ou φ , λ) résorbe assez correctement. On évoque alors des harmoniques de grande longueur d'onde imparfaitement déterminés dans le modèle global adopté (pas dans GPS).

Au point de vue expérimental, un travail copieux a été mené en France principalement au LAREG (IGN Laboratoire de recherches en géodésie) [16]. Après avoir exposé assez en détail les méthodes que nous avons résumées ci-dessus – en particulier la méthode du terrain résiduel – l'auteur passe à la "Comparaison du quasi-géoïde aux points nivelés du R.B.F."

On sait que sous le nom de R.B.F. (Réseau de Base Français), la section de géodésie de l'IGN a observé par GPS les coordonnées φ , λ , H_E , d'un ensemble d'environ 1 000 points géodésiques, qu'elle a reliés au nivellement IGN 1969. Cet ensemble définit donc un (quasi) géoïde du territoire français, auquel on peut comparer le géoïde gravimétrique QGF 96 résultant du calcul général.

L'étude des résidus de la comparaison entre les deux surfaces montre (je recopie les résultats)

- un systématisme du premier degré entre les deux surfaces, dont une fonction linéaire du type :

$$a + b (\varphi - \varphi_0) + c (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi = v,$$

résorbe la plus grande partie.

Ceci fait :

- des résidus dont les plus importants sont concentrés sur :
 - la côte Bretonne (Vannetais)
 - la côte Landaise
 - les Pyrénées (Canigou, Carlitte)
 - la côte Provençale (région Cannes, Nice) ont un aspect systématique local, dont les causes seraient dues à des renseignements incomplets (gravimétrie, relief du fond océanique,...).

L'écart type des résidus après l'application de la formule linéaire est égal à $\pm 0,128$ m avec des résidus compris entre $-0,428$ m $\leq v \leq +0,724$ m.

On en déduit une "grille de référence d'altitude" dite RAF 96. Elle est obtenue en ajoutant à l'anomalie d'altitude QGF 96,

1°) La correction linéaire de l'écart.

2°) Une correction d'interprétation des résidus, c'est-à-dire tous les systématismes mis en évidence moyennant quoi, cette grille à mailles fines donne dans les régions où elle a été essayée un écart type de l'ordre de ± 2 cm. Ceci prouve bien que les erreurs signalées plus haut (Bretagne, Landes, etc.) recèlent vraisemblablement une cause systématique locale. Autrement dit la "grille de référence d'altitude" semble bien constituer un répertoire géographique empirique de passage du nivellement GPS au nivellement N.G.F. 1969. L'auteur insiste [16] à juste titre, sur la prudence avec laquelle on doit appliquer les résultats. Il étudie actuellement une nouvelle grille.

Cette opération se pose actuellement pour tous les géodésiens qui dans leurs organisations nationales étudient la question. Nous citerons pour terminer les conclusions des géodésiens de l'Institut Géodésique Finlandais, pays où la géodésie est traitée avec une considération particulière [17]. Nous résumons l'essentiel :

- les nivellements GPS (obtenus avec 5 géoïdes différents) ont été comparés aux réseaux de nivellement direct. **Dans tous les cas** la comparaison a révélé une pente, qui a été résorbée par **ajustement à une surface du second degré...**

- la comparaison du nivellement GPS au nivellement direct donne des réponses claires aux questions suivantes :

1°) le nivellement de haute précision ($\pm 0,9$ mm/ $\sqrt{\text{km}}$) ne peut pas être remplacé par du nivellement GPS.

2°) le nivellement de moindre précision ($\pm 1,5$ mm/ $\sqrt{\text{km}}$) pourrait être remplacé par du nivellement GPS sur des lignes de plus de 50 km de longueur.

3°) si la précision du nivellement direct est inférieure à 2 mm/ $\sqrt{\text{km}}$, les résultats du nivellement GPS sont probablement meilleurs.

4°) tout ceci à condition d'éviter les erreurs inhérentes au GPS (trajets multiples, antenne, troposphère, etc.).

Ces conditions paraissent optimistes, elles sont sûrement adéquates aux problèmes qui se posent à nos collègues finnois, mais pour la France elles méritent une

GÉOÏDE GRIM 4 (DEGRÉ MAX = 72)

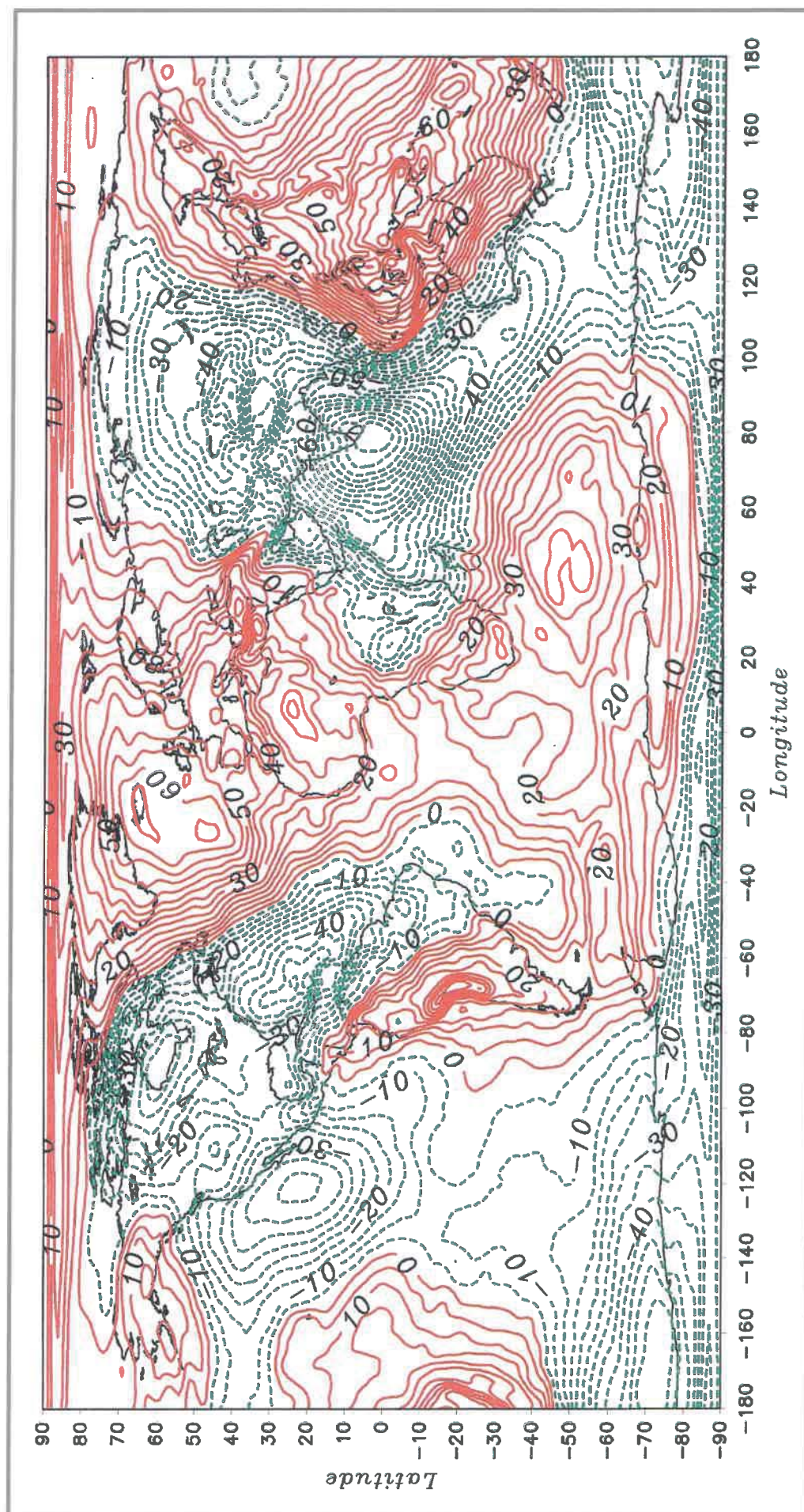


Fig. 10

Document du Bureau Gravimétrique International (BGI). G. Balmino – Préparée par Nicole Vales.

étude plus approfondie : Alpes, Massif Central, Pyrénées posent des problèmes difficiles de définition de modèle, de densité des mesures de g, etc.

Il faut attendre que les études annoncées au groupe permanent du CNIG "Positionnement Statique et Dyna-

mique" par le sous-groupe "Conversion altimétrique RGF 93 – IGN 69" aient permis de dégager ses conclusions. Il est à l'œuvre, et comme le disait la fière devise de Guillaume d'Orange, il n'est pas nécessaire d'espérer pour entreprendre, ni de réussir pour persévérer.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jacques CASSINI : De la grandeur et de la figure de la Terre - Suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1718)
- [2] B. PASCAL : Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air - La Pléiade.
- [3] A. CLAIRAUT : Théorie de la figure de la Terre (1742)
- [4] Journal of Geodesy - Manuel du géodésien - Vol. 70-1996
- [5] Bulletin géodésique - Manuel du géodésien - Vol. 66-1992
- [6] New geoids in the World - International geoid Service - Bureau gravimétrique international
- [7] International Association of Geodesy. S.S.G. 5.50 Atlas of the vertical deflection points in Europe and Mediterranean countries.
- [8] J.-J. LEVALLOIS - Géodésie générale - Tome III
- [9] Association Internationale de Géodésie.
The International Gravity Standardization Net
- [10] J. KOVALEVSKY - Mécanique céleste - Tome IV de Géodésie générale - Levallois
- [11] Y. THIRY - Les fondements de la mécanique céleste
- [12] B. MORANDO - Mouvement d'un satellite artificiel de la terre
- [13] SCHWINTZER, REIGBER, BODE,..., MASSMAN, RAIMONDO, BIANCALE, BALMINO, BARLIER, BOUDON.
Long Wavelength global gravity field models;
GRIM4, S4, GRIM4, C4 - Journal of Geodesy - 71/4 (1997)
- [14] BOTTON, F. DUQUENNE, EGELS, EVEN, WILLIS.
GPS localisation et navigation - Hermès
- [15] POITEVIN, ZIANG, EVERAERTS.
International Association of Geodesy - New geoids in the world - International Geoid Service
- [16] H. DUQUENNE. Le modèle de quasi-géoïde français QGF 96 et la surface d'altitude de référence d'altitude RAF 96 - E.S.G.T. - IGN
- [17] Publication de l'Institut géodésique finnois : Matti OLLIKAINEN - Détermination of orthometric Heights using GPS Levelling



- PRISES DE VUES
AÉRIENNES VERTICALES
- NUMÉRISATION DE PHOTOGRAPHIES
AÉRIENNES SUR FILM
- AÉROTRIANGULATION NUMÉRIQUE
- ORTHOPHOTOPLANS

Centre d'Exploitation : Aéroport de Nancy-Essey • F - 54510 TOMBLAINE
Tél. (33) 03 83 18 00 03 • Fax (33) 03 83 18 00 53