

analyse statistique des formes quadratiques

la méthode des déterminants

Steffen Schön
 dr. ing. Hansjörg Kutterer
 Geodätisches Institut
 Université
 de
 Karlsruhe

Les auteurs, du texte qui suit appartiennent à l'Université de Karlsruhe, ils nous proposent un article de très haut niveau concernant l'identification de formes relevées au cours de travaux de métrologie industrielle. Ces relevés sont supposés s'appliquer à des formes quadratiques, les erreurs de mesures peuvent aussi affecter l'identification de la forme. Comme dans les cas élémentaires, on identifie une conique par les valeurs des paramètres ou de relations entre ceux-ci dans son équation canonique, les auteurs identifient les formes quadratiques à l'aide de la valeur des déterminants (valeur scalaire) des matrices 2X2, 3X3 ou 4X4, qui sont des paramètres ou des relations entre les paramètres ou des relations entre les paramètres des équations canoniques et quadriques et qui sont des invariants pour une forme déterminée. Ce qui est très intéressant c'est la manière de prendre une décision lorsque deux ou plusieurs formes conviendraient, en vérifiant que les résidus ne comportent plus aucun biais et ne sont dus qu'à des erreurs accidentelles.

La rédaction

RÉSUMÉ

Il est souvent nécessaire, en topométrie d'industrie ou en métrologie, d'effectuer des approximations mathématiques sur les séries de points discrets mesurés. Les formes quadratiques jouent un rôle important dans la résolution de ces problèmes que, ce soit en deux ou en trois dimensions.

Cet article présente une méthode d'identification des sections coniques tridimensionnelles en utilisant des déterminants de leur matrice de forme. Une idée clé est de propager les variances et covariances relatives aux mesures sur les paramètres qui servent à la classification. Nous montrerons l'influence d'un développement de Taylor jusqu'au second ordre (dans l'ordre deux dans la loi de la propagation des variances et covariances) sur les tests statistiques qui doivent être appliqués en vue de cette classification. Quelques exemples numériques clôtureront l'exposé.

ABSTRACT

The mathematical approximation of discrete points by continuous functions like quadratic forms (a.k.a. conic sections) is a common task in industrial surveying. A method for the identification of the special kind of quadratic form based on determinant evaluations is presented. Statistical tests are used to take the randomness of the parameters of the quadratic forms into account. Both a linear and a quadratic approach are applied for the variance propagation. The considerations are concluded by numerical examples.

INTRODUCTION

L'Institut de géodésie de l'université de Karlsruhe possède un système de topométrie industrielle et des logiciels de traitement de mesures et d'analyses. L'Institut est actuellement en train de les réécrire et de les enrichir. Dans ce contexte, il est souhaitable de perfectionner le logiciel d'analyse et d'identification de formes.

Une des principales tâches de la topométrie d'industrie est de déterminer avec une grande précision la position et la forme d'objets dans l'espace. Des théodolites et des tachéomètres sont utilisés pour ce travail (Schwarz, 1995).

On obtient les coordonnées des points objets $w = [x, y, z]^T$ et leur matrice de variance-covariance (MVC) C_w . Suppo-

sons un objet industriel approximé par une forme quadratique (1) :

$$w^T A w + 2a^T w + a_0 = 0$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \text{ (matrice de forme), } a = \begin{pmatrix} a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Dans une première étape, il s'agit de déterminer les 10 paramètres $\hat{p} = [a_i]$, dits paramètres de forme et leur (MVC) $C_{\hat{p}}$ par la méthode des moindres carrés. Pour éviter l'introduction de valeurs approchées dans ces paramètres lors de l'estimation, une solution à l'aide de valeurs propres est proposée par E. Drixler (1993).

Dans une deuxième étape, on s'intéresse à la forme elle-même. Deux possibilités standards d'identification sont envisageables pour résoudre ce problème :

Une transformation sur axes principaux donne accès à la classification de la forme par valeurs propres et à l'orientation dans l'espace par vecteurs propres. Cette démarche est développée par Bock (1998) et Bock et Kutterer (1998).

LA CLASSIFICATION PAR DÉTERMINANTS

Si on s'intéresse uniquement à la forme de l'objet, celle-ci peut être parfaitement identifiée à l'aide des quatre invariants suivants : $q = [\Delta, D, J, B]^T$

où :

$$\Delta = \det A$$

$$D = \det A^*$$

$$J = \det A_{11} + \det A_{22} + \det A_{33} \quad (2)$$

$$B = \det A_{11}^* + \det A_{22}^* + \det A_{33}^*$$

$A^* = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_{10} \end{pmatrix}$ et A_{ii}^*, A_{ii}^* sont les mineurs des matrices A, A^* pour l'élément a_{ii}, a_{ii}^* .

La figure 1 donne un aperçu de la classification. Les cas pathologiques, comme par exemple ceux des ellipsoïdes complexes, ne sont pas pris en compte.

LA PROPAGATION DES VARIANCES

Une des idées centrales de cet article est la supposition de l'existence d'une certaine incertitude au niveau de l'identification des formes quadratiques. Ceci est bien compréhensible. Les mesures sont plus ou moins biaisées. Ces erreurs accidentelles se propagent sur les coordonnées w sous forme de la MVC C_{ww} . Les paramètres de formes sont estimés grâce aux positions des points et donc les invariants déterminés sont eux aussi stochastiques.

Pour déterminer la MVC des invariants, on utilise habituellement « la loi de la propagation des variances et covariances ». Si les relations entre les paramètres à déterminer et ceux qui sont donnés sont non-linéaires, il faut linéariser ce système ce qui s'effectue traditionnellement

par développement de Taylor. Les équations (3, 4) montrent les formules obtenues lors d'un développement de premier ordre en point de développement mf (appelé « cas linéaire » par la suite). La MVC du vecteur aléatoire g de dimension $q \times 1$ donné par :

$$C_{gg} = J C_{ff} J^T$$

$$\text{avec : } g = g_0 + J(f - \mu_f)$$

Dans l'équation ci-dessus :

f représente un vecteur aléatoire de dimension,

$\mu_f = E(f)$ son espérance,

$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial f_j} \end{bmatrix}_{i=1,q, j=1,p}$ la matrice non-stochastique des premières dérivées

g_0 un vecteur quelconque, non-stochastique,

Dans le cas d'un développement jusqu'à l'ordre 2 du vecteur aléatoire h (« cas non-linéaire »), on obtient d'après Grafarend, Schaffrin (1993) :

$$h = h_0 + J(f - \mu_f) + \frac{1}{2} H((f - \mu_f) \otimes (f - \mu_f)) \quad (6)$$

où :

\otimes désigne l'opérateur du produit de Kronecker,

$$H = [\text{vec}H_1, \dots, \text{vec}H_k]^T$$

$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_i}{\partial f_j \partial f_k} \end{bmatrix}_{j=1,q, k=1,p}$ la matrice des deuxièmes dérivées

où $\text{vec}H_i$ transforme la matrice H_i dans un vecteur contenant les colonnes de H_i .

Dans ce cas la MVC est exprimée par :

$$C_{hh} = J C_{ff} J^T + \frac{1}{4} H (C_{ff} \otimes C_{ff} + E((f - \mu_f) \otimes C_{ff} (f - \mu_f))) H^T$$

Dans notre cas concret (6) a pour forme :

$$C_{qq} = J C_{pp} J^T + \frac{1}{4} H (C_{pp} \otimes C_{pp} + E((\hat{p} - \mu_p) \otimes C_{pp} (\hat{p} - \mu_p))) H^T \quad (7)$$

et la matrice jacobienne est définie par :

$$J = \left[\frac{\partial \Delta}{\partial a_i}, \frac{\partial D}{\partial a_j}, \frac{\partial J}{\partial a_k}, \frac{\partial B}{\partial a_l} \right]_{i=1,1, j=1,1, k=1,p, l=1,1}^T \quad (8)$$

Par souci de place, nous ne montrerons pas explicitement les éléments de la matrice jacobienne ni hessienne.

Classification des formes quadratiques (sections coniques)	D ≠ 0 Section conique régulière		D = 0 Section conique irrégulière		
	D > 0	D > 0			
Δ ≠ 0 section conique avec point central	Hyperboloïde	Ellipsoïde	Cône		
Δ = 0 section conique sans point central	Paraboloïde hyperbolique J < 0	Paraboloïde elliptique J < 0	B ≠ 0	J < 0	Cylindre hyperbolique
				J = 0	Cylindre parabolique
				J > 0	Cylindre elliptique
			B = 0	J < 0	Plan
				J = 0	Plan double

Fig. 1 - Classification des formes quadratiques par déterminants

LES TESTS STATISTIQUES

Pour tenir compte de la stochasticité des invariants vue au paragraphe précédent, il faut appliquer des tests statistiques en vue de la classification.

Une première approche pourrait consister à tester la significativité des invariants en fonction de la forme à identifier (démarche unidimensionnelle). L'influence des corrélations entre les invariants y serait négligée.

La *figure 2* illustre une autre stratégie (démarche multidimensionnelle).

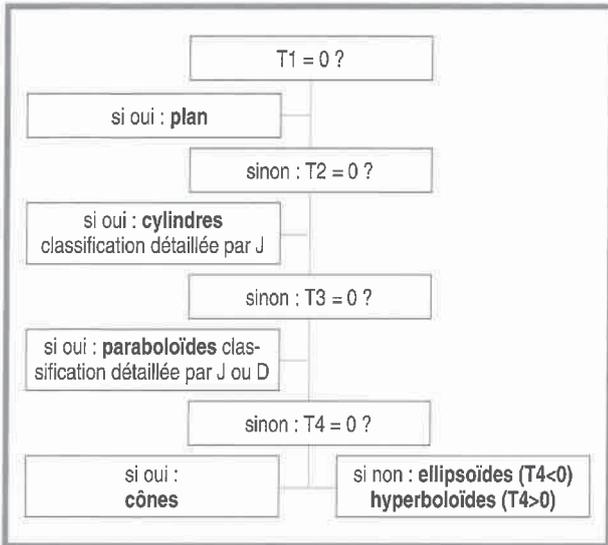


Fig. 2 - Stratégie multidimensionnelle

On regroupe les tests de façon suivante :

$$T_1 = \frac{1}{3\hat{\sigma}_0^2} \begin{pmatrix} \Delta \\ D \\ B \end{pmatrix}^T Q_{\Delta,D,B} \begin{pmatrix} \Delta \\ D \\ B \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2} \begin{pmatrix} \Delta \\ D \end{pmatrix}^T Q_{\Delta,D} \begin{pmatrix} \Delta \\ D \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \frac{\Delta}{\hat{\sigma}_\Delta}, \quad T_4 = \frac{D}{\hat{\sigma}_D}$$

où $Q_{\Delta,D}$, $Q_{\Delta,D,B}$ sont les sous matrices des invariants correspondants de $C_{pp} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} Q_{pp}$.

Ces valeurs de décision T_i obéissent à la loi de Fisher $F_{j,r}$, de degré de liberté $f = 3, 2$ ou 1 et de redondance r .

Dans un premier temps, on tient compte de trois invariants Δ, D, B . Si le test n'est pas significatif, on ne peut pas refuser l'hypothèse nulle : $T_1 = 0 | H_0$. La forme est donc classifiée comme étant un plan. En cas d'échec, l'opération suit son cours avec T_2 . L'acceptation de l'hypothèse nulle $T_2 = 0 | H_0$ mène à un cylindre. Sinon la décision se fera avec T_3 et T_4 , en accordant les risques de première espèce α . L'invariant J permet d'effectuer des classifications détaillées, du type cylindre parabolique, elliptique ou hyperbolique.

EXEMPLES

Des exemples numériques ont pour but de mettre en évidence les différences entre les méthodes citées ci-dessus. Nous présenterons l'influence de l'ordre du dé-

veloppement de Taylor dans la démarche par déterminants. Des calculs de simulation sont effectués par des logiciels développés sous Matlab® version 5.1. Les formes sont discrétisées par 100 points dont les coordonnées sont biaisées à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires non-corrélés obéissant à la loi normale de moyenne 0.0 et d'écart type 0.01.

Exemple 1 : Classification d'un cône

Dans ce cas, 500 répétitions de simulations ont été effectuées. Les deux histogrammes de la *figure 3*, représentent : le cas linéaire (histogramme supérieur) et le cas non-linéaire (histogramme inférieur). Dans la partie droite, une légende indique les formes classifiées et le graphique du bas montre la forme choisie pour la simulation. La *figure 4* présente les histogrammes des quatre variables de décision T_i . Le cas linéaire est présenté dans la première ligne et le non-linéaire dans la seconde. Les traits tirés limitent la région critique des tests.

Référons-nous tout d'abord à la *figure 3* : Dans le cas linéaire, pour à peu près 75 % des cas, la forme est identifiée en cône, dans 25 % en hyperboloïdes ou ellipsoïdes. Cependant dans le cas non-linéaire, 100 % sont classifiés en cône. En utilisant les informations données en *figure 4*, on constate que la variable de décision T_4 joue un rôle clé, car toutes les autres variables de décision sont comparables dans les deux cas au niveau de leur significativité. Dans le cas non-linéaire, T_4 est toujours en dehors de la région critique. Par contre, dans le cas linéaire, T_4 se trouve dans la région critique pour environ 25 % des cas. Ceci entraîne le rejet de l'hypothèse nulle, d'où les 25 % d'hyperboloïdes ou ellipsoïdes.

Exemple 2 : Cas limite entre des formes

Ce deuxième exemple met en évidence le comportement des tests, pour les cas limites entre des formes. Choisissons un paraboloïde elliptique peu courbé. Les conditions de simulation et la conception des schémas des résultats sont les mêmes que dans l'exemple précédent.

Référons-nous tout d'abord à la *figure 5* : Dans le cas linéaire, pour près de 30 % des cas, la forme est identifiée à un paraboloïde hyperbolique ou plan, pour 20 % à des cylindres et pour 10 % des cas à un cône.

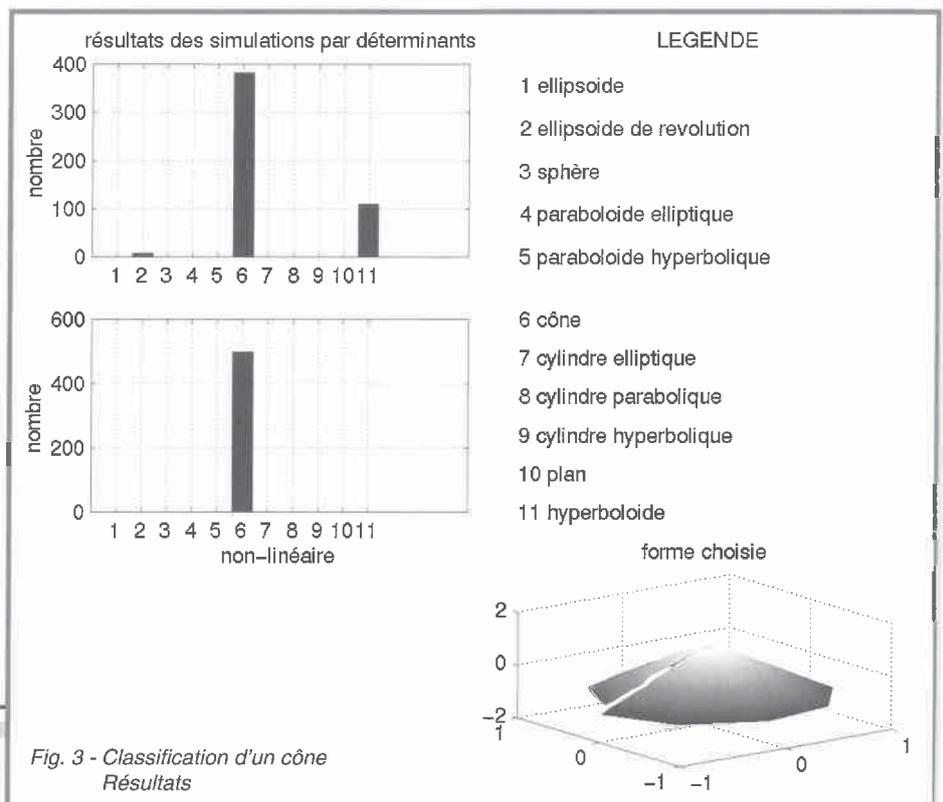


Fig. 3 - Classification d'un cône
Résultats

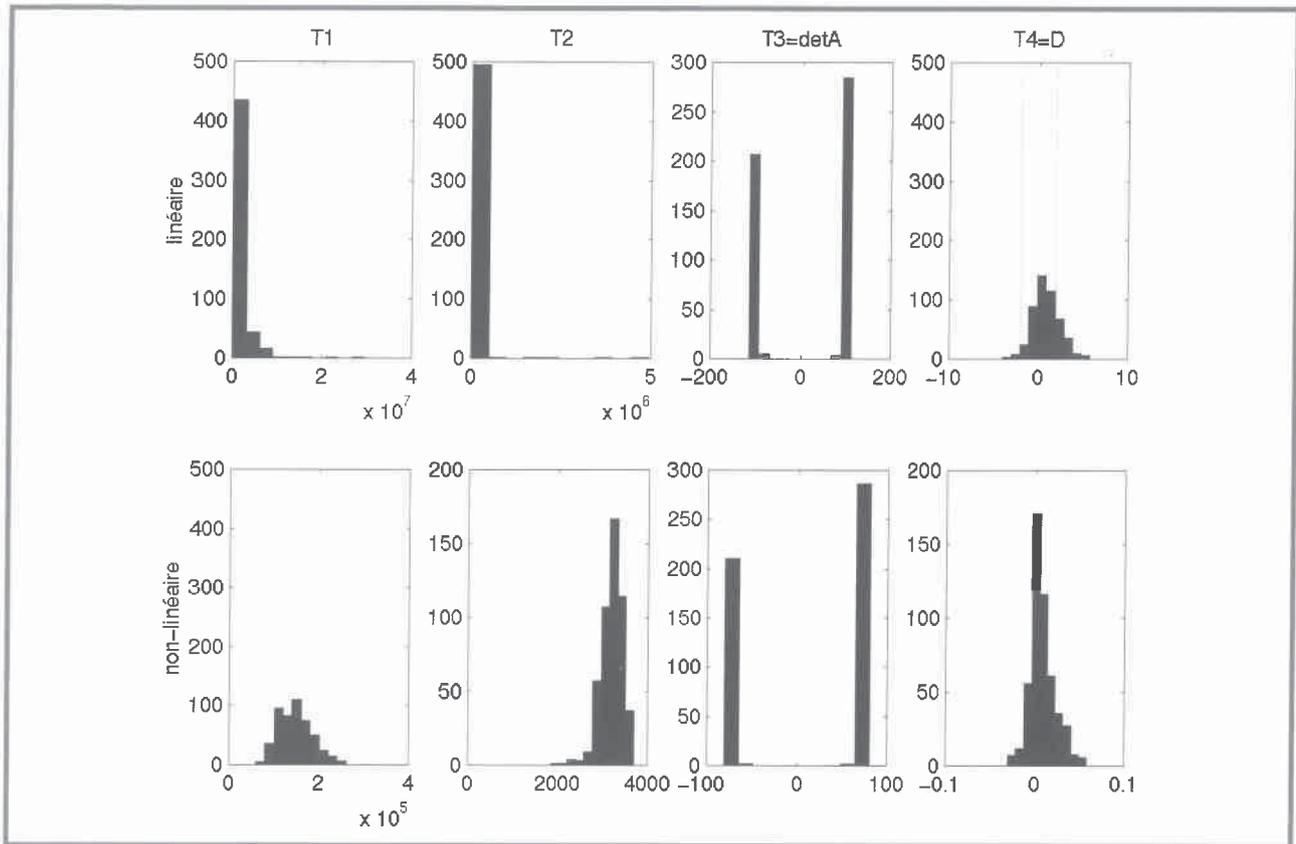


Fig. 4 - Classification d'un cône - Répartition des variables de décision

Cependant, dans le cas non-linéaire, 90% des cas sont classifiés en plan. Les 10% restants sont identifiés comme étant des paraboloides elliptiques et des cylindres elliptiques.

En utilisant les informations issues des figures 6 et 2, on constate que toutes les variables de décision T_i jouent un rôle important. Dans le cas non-linéaire, les T_i sont toujours plus petites que dans le cas linéaire. Ceci est lié au fait que le développement de Taylor amené à l'ordre deux (dans la détermination de la $MVCC_{pp}$) mène à des variances plus grandes. Les différentes hypothèses nulles ont été refusées plus tard et une forme plus simple a été sollicitée. Dans notre cas concret, à cause du phénomène décrit ci-dessus, moins de variables de décision tombent dans les régions critiques des tests, d'où les résultats obtenus.

Par contre dans le cas linéaire, la variable de décision T_1 qui tombe dans la région critique nous amène à continuer les tests avec T_2 . Lors de ce test, l'acceptation de l'hypothèse nulle identifie la forme quadratique comme étant un cylindre. La répartition de la variable de décision T_3 qui ne dépasse que de peu sa région critique, explique l'existence d'une deuxième grande classe (les paraboloides). Finalement la classification en cônes est liée à la répartition de T_4 .

CONCLUSION

Nous avons montré que les déterminants peuvent très bien être introduits au niveau de la classification des formes quadratiques. Comparée à la démarche par valeurs propres, cette solution est d'une plus grande simplicité conceptuelle (Schön, 1999). Un développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux dans la détermination de la MVC mène à des variables de décision plus petites, car

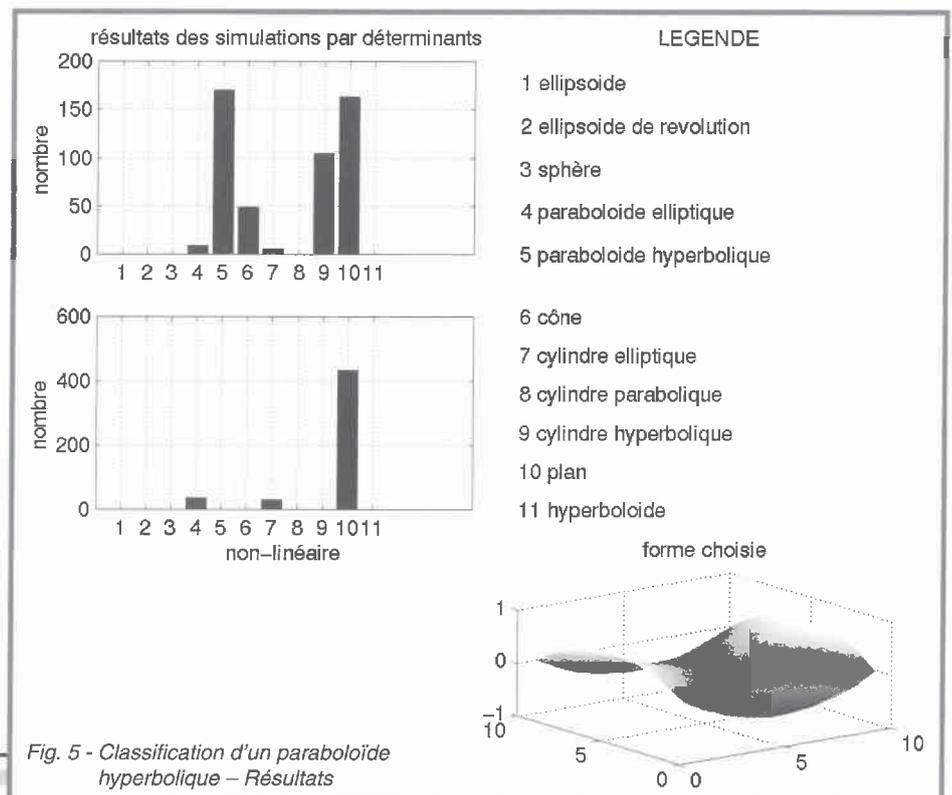
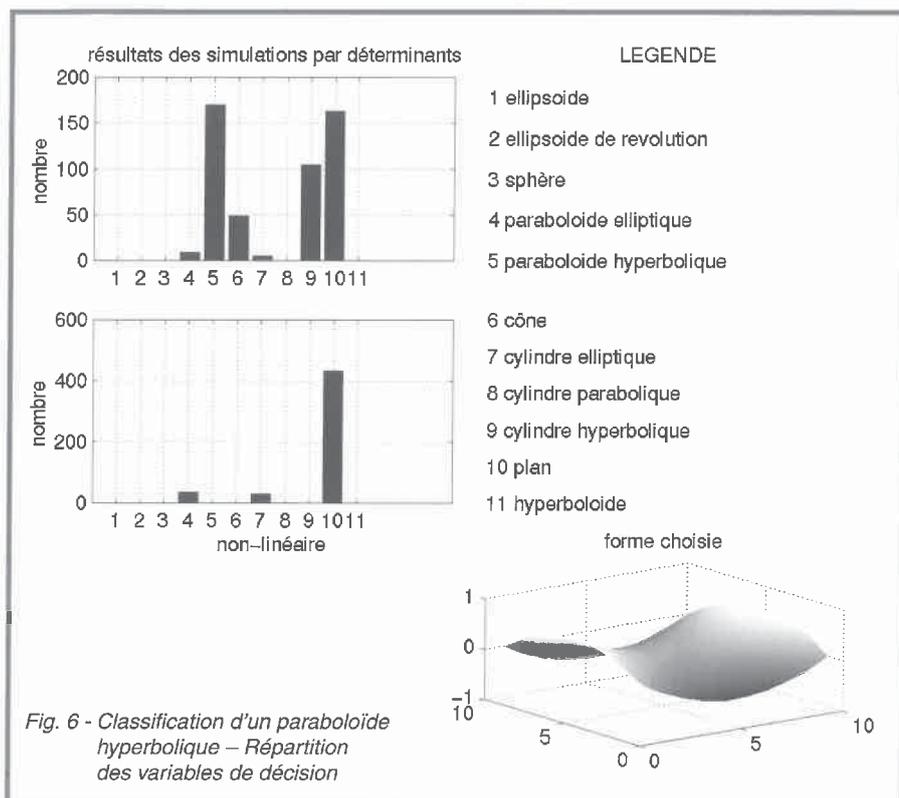


Fig. 5 - Classification d'un paraboloides hyperbolique - Résultats



les variances sont plus grandes que dans le cas linéaire. Ceci entraîne un comportement plus « conservateur » ce qui veut dire que l'hypothèse nulle est refusée plus tard. Le choix se fera donc en faveur d'une forme plus simple. Ce phénomène était déjà remarqué par Xu, Grafarend (1996) dans le contexte d'analyse de déformations. Cette caractéristique peut être très utile, lorsqu'il s'agit de cas limites entre deux formes.

Pour conclure, il faut constater que la configuration des mesures joue un rôle important dans la qualité de la classification et nécessite d'être approfondie. De même il serait souhaitable d'introduire des estimateurs robustes pour une détection de « bosses » dépassant une forme quadratique.

Cet article est issu d'un travail d'études mené par Steffen Schön.

BIBLIOGRAPHIE

- **Bock, H.** (1998) : Statistische Beurteilung der Identifikation quadratischer Formen in Ebene und Raum, travail de fin d'études à l'institut de géodésie de l'Université de Karlsruhe, non publié.
- **Bock, H., Kutterer, H.** (1998) : Identifikation ebener quadratischer Formen mit statistischen Methoden dans : Freuden W. (Ed) : Progress in Geodetic Science at Geodetic Week 98, p.217-224, Proceedings de la semaine géodésique 1998 à Kaiserslautern, Shaker, Aix-la-Chapelle.
- **Drixler E.** (1993) : Analyse der Lage und Form von Objekten im Raum DGK série C, No.409, Munich.
- **Grafarend E., Schaffrin B.** (1993) : Ausgleichsrechnung in Linearen Modellen BI Wissenschaftsverlag, Mannheim
- **Kutterer, H., Schön, S.** (1999) : Statistische Analyse quadratischer Formen - der Determinantenansatz Allgemeine Vermessungsnachrichten, en cour de parution.
- **Schön, S.** (1999) : Statistische Methoden zur Identifikation quadratischer Formen im Rahmen von Industrievermessungen, travail d'étude, à l'institut de géodésie de l'Université de Karlsruhe, non publié.
- **Schwarz, W., Ed.** (1995) : Vermessungsverfahren im Maschinen und Anlagenbau. Deutscher Verein für Vermessungswesen, n° 13, Wittwer, Stuttgart.
- **Xu, P., Grafarend, E.** (1996) : Probability distribution of eigenspectra and eigendirections of an twodimensional, symmetric rank two random tensor, Journal of Geodesy 70, p. 419-430.

Steffen Schön et Dr.-Ing. Hansjörg Kutterer – Geodätisches Institut der Universität Karlsruhe – Englerstraße 7
D- 76 128 Karlsruhe – Kutterer@gik.uni-karlsruhe.de

REPertoire DES ANNONCEURS - N° 80

LEICA	2° couv.
SETAM	3° couv.
TOPO CENTER	4° couv.
AEROSCAN	29
AZIMUT	89
CARL ZEISS	100
DIAPRINT	56
DIEUTEGARD	75
ECOLE CHEZ SOI	45
GEOMEDIA	4
ENSG	41

GEOPIXEL	48
GRETA	92
LA BOYERE	92
MAURY-INFORMATIQUE	85
NIKON-SERCEL	1
PC VISION	2
PENTAX	99
PIX-EDIT	83
SPECTRA PRECISION	69
SUZUKI	89
TOPOCOM	83
TRIMBLE	6