Claude Million

à propos du calcul du point approché GPS et de la correction d'aberration

INTRODUCTION

On a proposé une méthode de calcul, très simple, du point approché de GPS [1]. Toutefois, il semble que cette modeste démarche n'ait pas été bien comprise, et qu'on soit arrivé, sur ce sujet, comme les carabiniers, c'est-à-dire avec un léger retard... En effet, une méthode de calcul assez semblable, mais plus ambitieuse, avait été proposée par BANCROFT il y a douze ou treize ans [2], il semble qu'elle faisait suite à une autre publication, française celle-là [3]. Compte tenu de la quantité de ce qui se publie dans le monde, un tel oubli qui aurait été inexcusable il y a cinquante ans, est devenu véniel aujourd'hui, surtout lorsqu'on a omis de rechercher l'antériorité en cause dans un journal d'ingénieurs électriciens, ou dans les publications d'un laboratoire hors de cette spécialité, cela n'empêche pas qu'on doive le signaler, ce qui est le premier motif de ce « codicille » en forme d'« addendum ».

LE POINT APPROCHÉ

La nécessité de disposer d'un point GPS approché tient à ce qu'il faut connaître approximativement la position du point calculé pour :

1. Estimer, à l'aide des messages des satellites, les corrections de réfraction ionosphériques et troposphériques des pseudo-distances dont l'argument principal de calcul est la distance zénithale dZ qu'on apprécie à partir des positions approchées du récepteur et des satellites.

2. Calculer les corrections de « référentiel tournant » sur la position des satellites ; en effet, le système de référence est attaché à la terre, il n'est donc pas inertiel (D'où, entre autres, les effets centrifuges et la « force de Coriolis »). Cette correction est baptisée ECF (Earth Centered Frame) ou ECEF (Earth Centered Earth Fixed) dans les publications américaines. (Ce qui n'éclaire pas énormément le sujet !). Pour calculer cette correction il faut connaître la distance entre chaque satellite et le récepteur, donc leur position... Voir *figure 1*.

Par conséquent, on avait pensé qu'il n'y avait aucun inconvénient à ce que le résultat du calcul ne soit pas tout à fait rigoureux, puisque de toute manière **il fallait le recommencer** avec des relations linéarisées cette fois, après avoir calculé ces deux corrections.

En effet, cette correction se calcule habituellement de la manière suivante :

$$\Delta X = X_{satellite} - X_{récepteur} + rY, \quad \Delta Y = Y_{satellite} - Y_{récepteur} + rX.$$

etc pour Z, On calcule la rotation de la position du satellite pour une unité de temps, rX, et rY :

$$rX = X_{satellite} \cdot \frac{\delta\Omega}{\delta t} \cdot \frac{d}{c}, \quad rY = Y_{satellite} \cdot \frac{\delta\Omega}{\delta t} \cdot \frac{d}{c}$$

Avec $\frac{\delta\Omega}{\delta t}$ vitesse de rotation de la terre, constante de WGS84 et c vitesse de la lumière, constante universelle, enfin d distance entre le satellite et le récepteur.

Une autre formule m'a été donnée par Peter H DANA du Department of Geography de l'Université du Texas à Austin qui corrige directement la distance d par la formule suivante : $\frac{\delta\Omega}{\delta t} \cdot \frac{1}{c} \cdot \left(Y_{récepteur} \cdot X_{satellite} - X_{récepteur} \cdot Y_{satellite}\right)$.

Quelle que soit la formule utilisée, il faudrait connaître la position du récepteur, même approchée, c'était le seul objectif de [1], et recalculer la position vraie du récepteur.

Apparemment, d'autres auteurs [2], [4], n'appliquent pas cette correction parce qu'ils n'ont en vue que des résultats orientés vers la navigation, laquelle ne requiert

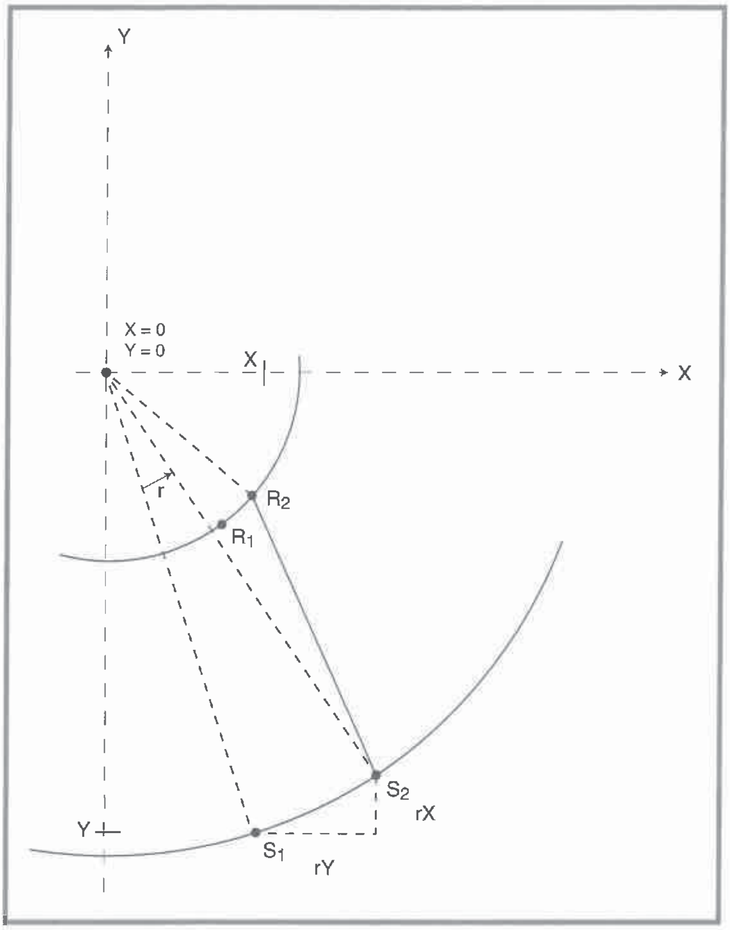

Fig. 1 - Au départ du signal le satellite est en S1 et le récepteur en R1, pendant le parcours de l'onde, le référentiel tourne de r radians. À l'arrivée du signal, le satellite est en S2 et le récepteur en R2. Cette dernière position du récepteur est celle qu'on cherche à déterminer, la distance R2 S1 est celle qu'on cherche à déterminer.

que peu de précision. Ils sont fondés dans cette démarche parce que la pseudo-distance est actuellement altérée volontairement par l'accès sélectif (SA), dans ce cas, évidement, à quoi bon calculer des corrections pour obtenir des résultats qui seront faux de toutes les façons. Est-ce bien vrai ?

Les vertus des méthodes de différences

Lorsqu'on recherche, non plus la position absolue d'un point, mais les dimensions d'un vecteur, ce qui est le cas dans la pratique courante des topographes et des géodésiens, les choses se présentent différemment. En effet, si les différences premières éliminent **imparfaitement** les corrections de réfraction si le vecteur est long, les différences secondes éliminent **parfaitement** les biais d'horloge. S'il est suffisamment court (8 km pas plus) ces corrections seront parfaites au point qu'on puisse estimer les ambiguïtés entières avec un récepteur monofréquence. Les récepteurs bifréquences éliminent les erreurs de réfraction ionospériques par un autre moyen, en effet l'ionosphère est dispersive, les mesures permettent à elles seules, par leurs différences de les estimer avec précision. Les erreurs de réfraction troposphériques sont **considérées** comme correctement « modélisées », c'est-à-dire que la formule qu'on applique est suffisamment sûre pour obtenir un résultat correct.

Il semble évident, quoique personne ne l'ait dit à propos de la correction de « référentiel tournant » (Sauf peut être [5]), que les différences premières en annulent une grande partie si le vecteur est court, elles laissent subsister l'erreur due à la rotation du référentiel pendant les différences de parcours des satellites au récepteur, on fait comme si les différences secondes annulaient ces différences : Est-ce bien exact ? Encore une fois on peut répondre positivement pour les vecteurs courts, mais pour tous les vecteurs, ce n'est pas aussi sûr ! (On donnera, en annexe, la relation des différences secondes qu'on préconise, son examen sera propre à convaincre le lecteur). Voir également la *figure 2*.

La raison en est, peut être, que les équations d'observation en doubles différences utilisent d'autres mesures que les pseudo-distances : c'est-à-dire les phases. Or, les signaux de code n'arrivent pas exactement au même instant, la preuve en est que la mesure de pseudo-distance n'est que l'heure d'arrivée du signal en temps récepteur, elles sont toutes différentes, il suffit pour s'en convaincre de lire un relevé. La **mesure** des phases se fait au moment de l'arrivée du signal.

La correction de « Référenciel tournant »

Dans la profession le calcul d'un point isolé « tout seul » est de plus en plus rare, en raison des imprécisions introduites par l'accès sélectif (SA) ; toutefois, ce calcul reste nécessaire pour obtenir des valeurs suffisamment exactes à introduire dans les calculs ultérieurs en doubles-différences pour obtenir les composantes d'un vecteur (*Annexe*).

La correction dite de « référentiel tournant » est tout à fait semblable à celle de l'**aberration en astronomie**, elle tient compte du mouvement de la terre pendant le temps de propagation du signal. Comme le référentiel, en l'oc-

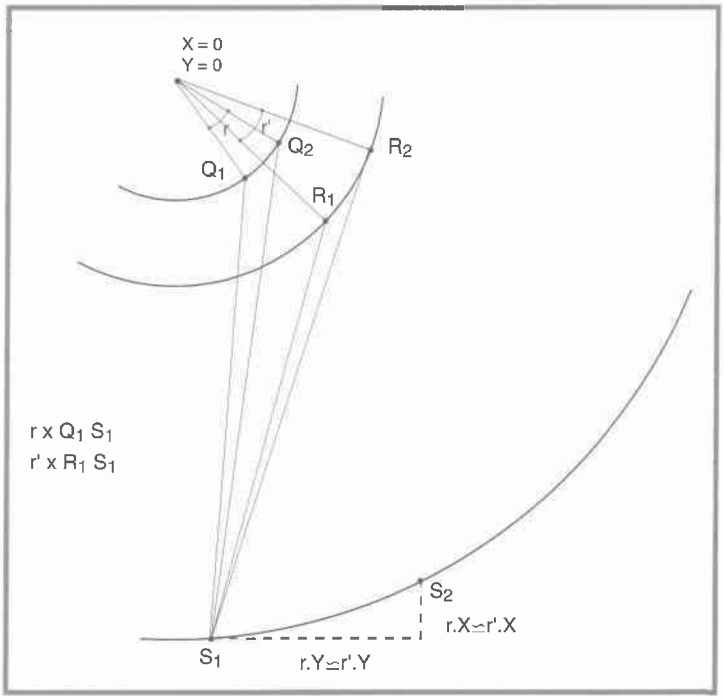

Fig. 2 - Les différences de coordonnées sont proportionnelles aux distances des récepteurs R et Q au satellite S sur lequel est faite la différence, si ces distances sont semblables, la différence s'annule car le temps de rotation est proportionnel à la distance que parcourt le signal vers les deux points de réception. En toute rigueur, cette différence est faible mais non nulle. C'est au moment où l'on fait les différences secondes que ce différentiel de rotation s'annule.

currence la terre, tourne pendant que le signal se déplace, il faut modifier les positions des satellites au moment de l'émission du signal de la rotation du référentiel, mais dans le sens inverse de son mouvement : La terre tourne en direction de l'est, les satellites seront déplacés vers l'ouest en proportion directe de leurs distances au récepteur. Les temps de parcours sont compris de 66 ms pour un satellite au zénith, à 84 ms (milliseconde) pour un satellite sur l'horizon. Omettre cette correction revient, à la longitude et à la latitude de la France, à introduire une erreur d'apparence accidentelle, d'écart-type égal à 2,75 mètres, mais ce qui est beaucoup plus grave une erreur systématique de 1" à 1,26" en longitude, sous nos latitudes cela représente de 22 à 27,5 mètres.

Les corrections ionosphériques

On peut, également, estimer les erreurs introduites en négligeant les corrections ionosphériques.

Disons, d'abord, que le rapport entre la correction ionosphérique au zénith et à 5° au-dessus de l'horizon, est de 3,2. Si on s'en tient aux valeurs mesurées au-dessus des États-Unis pendant la semaine GPS n° 951, le maximum, pour la correction au zénith, est de 7,29 mètres, avec un pic de fréquence à 1,51 mètre [6]. C'est, évidemment, beaucoup plus grave que de négliger la correction de « référentiel tournant », mais cela reste dans la limite des erreurs introduites volontairement par l'accès sélectif (SA) qui pour les erreurs d'horloge, qui se reportent sur les pseudo-distances, atteignent 41,59 mètres au maximum, avec un pic de fréquence vers 10 mètres. En revanche, les erreurs sur les positions des satellites diffusées, bien qu'assez élevées, restent dans des limites normales, soit un maximum de valeurs vers 10 mètres de vecteur d'erreur.

Conclusions

Si les logiciels de navigation paraissent fondés, en matière de précision, (encore que ce soit très limite) de négliger les corrections d'ionosphère et de « référentiel tournant », on ne voit pas, en pratique, pourquoi ils le font. En effet, le temps de calcul n'est plus un problème, faire un calcul exact, après avoir fait celui du point approché, et calculé les corrections de réfraction et de référentiel tournant, ne prend que peu de temps avec les ordinateurs modernes, l'économie réalisée est négligeable et fera perdre, aux utilisateurs, l'effet d'aubaine que serait la fin de l'accès sélectif.

Dans cette optique, pour rester cohérents, si on fait, en final, un calcul exact de compensation, le mode de calcul du point approché n'est pas un problème important, en itérant à partir du centre de la terre, comme le fait Y. EGELS, on obtient un aussi bon résultat qu'avec la relation qu'on a donné sans y attacher une importance qu'elle n'a pas ; celle de BANCROFT est intéressante pour ses artifices mathématiques, en pratique elle n'a pas plus d'intérêt que la nôtre, d'autant que pour s'assurer que l'un des deux points trouvés par le calcul est le bon, il fait appel, comme on l'a fait, à un cinquième satellite ! (*E-mail :* **Claude.Million@Wanadoo.fr** – *Site Internet :* **http://perso.wanadoo.fr/claude.million**).

Références

[1] **C. MILLION**, Calcul d'un point GPS approché. XYZ n° 68, 3e trimestre 1996, pp. 99-101.

[2] **S. BANCROFT**, AnAlgebric Solution of the GPS pseudorange equations IEEE transactions Aerosp. Electr. Syst. AES-21 (nov. 1985), pp. 56-59.

[3] **P.E. POMMELET**, Comparaisons et Optimisation d'Algorithmes pour le calcul du point GPS, Laboratoire de Recherches Balistique et Aérodynamiques Vernon.

[4] **Y. ROBIN-JOUAN**, Le positionnement astronomique par la méthode du plan des sommets, XYZ n° 75, 2e trimestre 1998, pp. 71-74.

[5] **G. STRANG, K. BORRE**, Linear Algebra, Geodesy, and GPS Wellesley Cambridge Press Ed 1997.

[6] **A. HANSEN**, The NSTB : A Stepping Stone in WAAS in GPS World : juin 1998.

[7] **C. MILLION**, Un traitement des mesures GPS monofréquence pour la trajectographie, XYZ n° 71, 2e trimestre 1997, pp. 69-72.

Annexe

L'influence des erreurs de positions diffusées des satellites sur le résultat du calcul du vecteur.

On renvoie à la référence [7] ci-dessus dans laquelle on a établi des relations de simples différences pour calculer le vecteur cherché. On a, en effet :

$\lambda.\varphi_r^s(t) = \rho_r^s(t) + \lambda.N_r^s + c.\Delta\delta_r^s(t) - \mathrm{ion} + \mathrm{tropo}$, avec $\lambda, \varphi, \rho, \delta$, respectivement la longueur d'onde reçue, la mesure de phase, la distance géométrique en mètres, et l'écart entre l'horloge du satellite et celle du récepteur, les indices hauts s indiquent le satellite et les indices bas r le récepteur, le temps (t) mis entre parenthèses indique l'époque de la mesure. Ion et tropo indiquent, respectivement, les corrections ionosphériques et troposphériques supposées calculées à l'aide des messages du satellite, dans ce qui suit, on suppose que ces corrections sont faites, mais on reviendra sur ce sujet. Si, pour simplifier l'écriture on fait les affectations suivantes :

$\lambda.\varphi \leftarrow R, \lambda.N \leftarrow N, c.\Delta.\delta(t) \leftarrow B_r^s$ avec R mesure de phase exprimée en mètres, N ambiguïté exprimée aussi en mètres, et B biais d'horloge exprimé de la même manière on a : $R = \rho + N_r^s + B_r^s, \rho = R - N_r^s, \rho = R - B^s - B_r$, on peut écrire la relation de calcul qui mène aux équations d'observation des moindres carrés :

$\rho^2 = (X^s - X_r)^2 + (Y^s - Y_r)^2 + (Z^s - Z_r)^2$, si les observations sont faites aux deux termes d'une base A-B, on a sur un des deux termes A, par exemple :

$\rho_A^2 = (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 + (Z - Z_A)^2$, et la même chose avec l'indice B pour l'autre terme, le satellite observé est le même aux deux termes de la base c'est pourquoi on ne met pas d'indice haut. On pose, pour plus de compréhension en fin d'exposé : $X_M = \frac{X_A + X_B}{2}, X_A = X_M - \frac{\Delta X}{2}, X_B = X_M + \frac{\Delta X}{2}$.

•••/•••