CAUSERIE TOPOGRAPHIQUE

Quelques considérations sur les relèvements multiples

par Robert VINCENT

"Le travail... c'est pas que j'ai rien contre... mais c'est le temps qu'on perd !!!" aurait dit Marcel Pagnol, à moins que ce ne soit son entourage, mais on ne prête qu'aux riches ! (propos sauvés de l'oubli par l'acteur Jean-Pierre Darras à la télévision dans une récente émission "Bouillon de culture").

C'est sur cette facétieuse pensée que je vous convie aujourd'hui à réfléchir sur quelques considérations qui peuvent sûrement alléger, et en temps et en coût, certains travaux topographiques.

Dans l'exécution des canevas de détails nécessaires aux levers topographiques, où l'on cherche la rapidité et plus encore la souplesse, il arrive que la configuration la plus adéquate du canevas s'impose par un choix souvent très restreint des emplacements des stations, en raison du bâti, de la végétation ou du relief, voire des facilités d'accès.

Rapidité des opérations et facilité d'accès sont liées, et, parmi les procédés d'établissement d'un canevas de détail, le relèvement multiple répond souvent à ce double impératif en allégeant au maximum les opérations et, en particulier, en ne nécessitant pas de mesures de distance.

Le relèvement multiple peut se définir, à priori, comme étant un procédé permettant la détermination concomitante, en position planimétrique, de plusieurs points stationnés au théodolite, reliés entre eux par des visées internes, en général réciproques, et à partir desquelles sont observées des visées de relèvement, en nombre suffisant, sur des points connus en coordonnées, et ceci à l'exclusion de toutes mesures de distances.

Les visées internes, reliant entre elles les stations, peuvent donner au réseau différentes configurations. L'enchaînement des stations peut en effet former :

- un simple cheminement d'angle, c'est-à-dire un cheminement polygonal où seuls les angles au sommet sont mesurés, mais pas les longueurs des côtés
- un cheminement d'angle présentant un ou plusieurs embranchements
- un cheminement d'angle présentant une ou plusieurs boucles indépendantes (polygones fermés)
- un cheminement d'angle présentant une combinaison des cas précédents.

Les présents propos ont pour objet de préciser, en fonction de ces différentes configurations, le nombre de visées de relèvement nécessaires en raison du nombre de points stationnés.

Nous appelons
n le nombre de points stationnés
p le nombre de boucles (polygones fermés indépendants)
r le nombre nécessaire de visées de relèvement

Par exemple, pour un relèvement simple, qui exige au moins 3 visées de relèvement

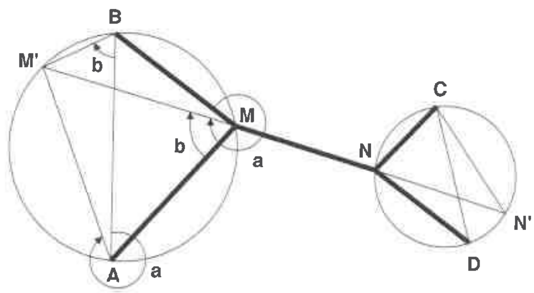
$n = 1 \qquad p = 0 \qquad r = 3$

1. Cheminement simple

Pour commencer, nous allons évoquer les cas les plus simples en rappelant tout d'abord que dans notre précédente causerie (1) nous avons revu la détermination d'un point fictif dans un relèvement. C'est une des clefs de la résolution, nous le verrons, des relèvements multiples.

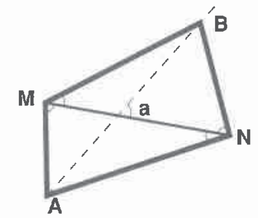
1.1 Relèvement double

Soit deux points stationnés M et N pouvant se viser entre eux et en lesquels deux visées de relèvement sur 2 points connus ont été observées :
En M visées sur A et B ainsi que sur N
En N visées sur C et D ainsi que sur M
La détermination des points fictifs M' et N' par intersection à partir de A et B pour M' et C et D pour N' permet de calculer le gisement M'N'



qui est aussi celui de MN. Les tours d'horizon en M et N se trouvent ainsi orientés et les calculs des coordonnées de M et de N se ramènent à des intersections à 3 visées.

Pour un relèvement double :
$n = 2 \qquad p = 0 \qquad r = 4$



Dans le cas du relèvement double particulier où en chacune des 2 stations M et N, les deux visées de relèvement ont été observées sur les mêmes deux points connus A et B, la résolution est plus directe par la formule dite des cotangentes (1) donnant l'angle "a" entre les droites AB et MN en fonction des 4 angles observés. Du gisement de AB on déduit alors le gisement de MN et les tours d'horizon en M et N se trouvent orientés.

1.2. Le relèvement triple

Soit trois points stationnés M, N, et P formant une polygonale, les visées réciproques MN et NP pouvant être observées mais pas MP. En ces 3 points des visées de relèvement sur 5 points connus A, B, C, D et E ont été observées :

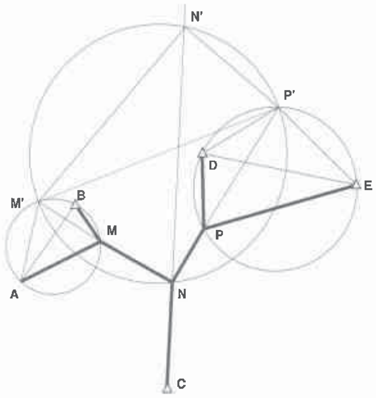
En M : visées sur A et B ainsi que sur N
En N : visées sur C ainsi que sur M et P
En P : visées sur D et E ainsi que sur N

En chaque station, les tours d'horizon comportent 3 visées.

1.2.1 Première résolution

La détermination des points de relèvement fictifs M' et P' par intersection à partir de A et B pour M' et D et E pour P' montre la solution : le point N sera déterminé par un relèvement sur les 3 points alors connus CM'P'.

Enfin, pour résoudre ce relèvement, il suffit de déterminer le point fictif N' sur le cercle NM'P' et sur la droite NC.

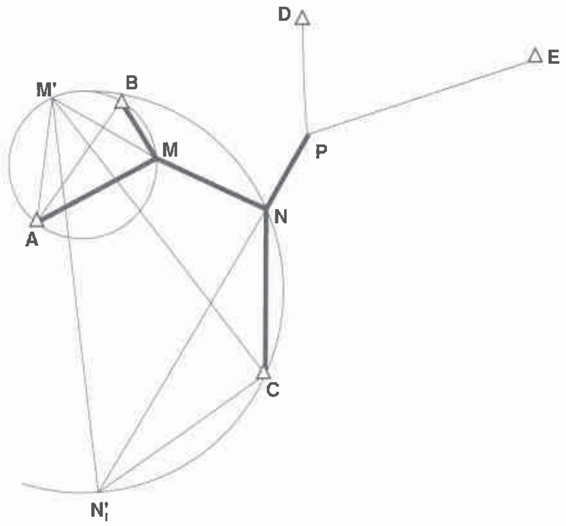


Ainsi le calcul du gisement N'C et par conséquent la connaissance du gisement de NC qui est le même, permet d'orienter le tour d'horizon en N et, par voie de conséquence, d'orienter les tours d'horizon en M et P grâce aux visées réciproques N-M et N-P.

Le calcul des coordonnées des points M, N et P se ramène donc encore à des intersections à 3 visées.

1.2.2 Deuxième résolution : Solution itérative

Détermination du point de relèvement fictif M' par intersection à partir de A et B comme pour la première résolution, puis détermination du point de relèvement fictif N'_i par intersection à partir de C et M'. Le point P se trouve alors relevé sur les 3 points D, E et N'_i.



On note que pour un tel relèvement triple :
$n = 3 \quad p = 0 \quad r = 5.$

1.3. Relèvement quadruple

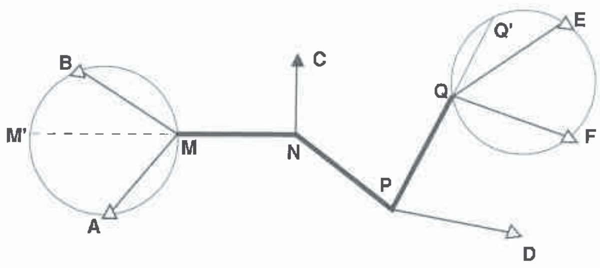
Soit 4 points stationnés M, N, P et Q formant une polygonale, les visées réciproques MN, NP, PQ pouvant être observées mais pas MP, MQ, NQ. En ces 4 points des visées de relèvement sur 6 points connus A, B, C, D, E et F ont été observées :

En M visées sur A et B ainsi que sur N
N visées sur C ainsi que sur M et P
P visées sur D ainsi que sur N et Q
Q visées sur E et F ainsi que sur P

En chaque station les tours d'horizon comportent 3 visées.

1.3.1 Première résolution

La résolution du système passe par la détermination des points fictifs M' et Q' par intersection à partir de A et B pour M' et de E et F pour Q'. Ensuite nous nous trouvons devant un relèvement double, les points N et P étant respectivement relevés sur M' et C et sur D et Q'.



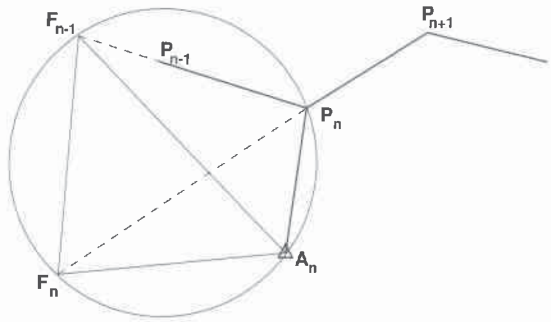
1.3.2 Deuxième résolution : Solution itérative

Même raisonnement que pour la solution itérative 1.2.2.
On note que pour un tel relèvement quadruple : n = 4 p = 0 r = 6, et on remarque que dans les exemples étudiés jusqu'à présent on a toujours : r = n + 2.

1.4 Cas général des cheminements simples de relèvements multiples

Après avoir compris l'usage de l'algorithme du point fictif de relèvement et son usage itératif, on peut envisager le cas général :

Par la solution itérative, chaque point stationné Pn est doté d'un point fictif de relèvement Fn, sur l'alignement Pn - Pn+1, et intersecté depuis le point fictif de relèvement précédent Fn-1 et le point connu An visé de Pn.



L'itération se poursuivra jusqu'au dernier point du cheminement où deux visées de relèvement auront été observées et qui se trouvera ainsi déterminé par une troisième visée de relèvement sur le dernier point fictif.

Par ce raisonnement on voit que le cheminement de relèvement simple comporte en chaque extrémité des stations à 2 visées de relèvement observées, les autres n'en ayant qu'une : d'où confirmation de la règle :

r = n + 2

Cette règle peut s'établir directement par le raisonnement suivant :

Pour résoudre un système de n points, comportant chacun 3 éléments inconnus - les 2 coordonnées X et Y et l'orientement G0 du tour d'horizon - il est nécessaire de disposer d'au moins 3n équations d'observation c'est-à-dire de 3n visées observées.

Or, entre les n points, il y a (n - 1) côtés de cheminement donc (2n - 2) visées internes réciproques.

Il faudra donc observer 3n - (2n - 2) soit n + 2 visées de relèvement.

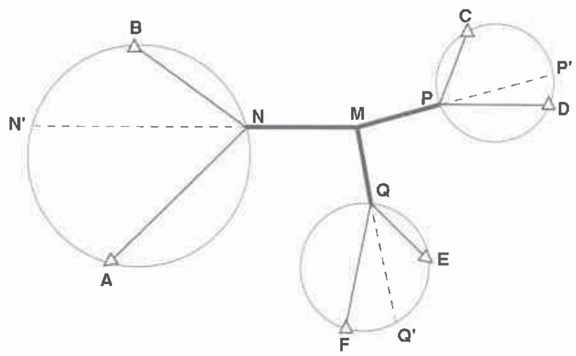
2. Cheminement d'angle de relevements multiples avec embranchements

Nous allons voir que les résolutions sont très semblables.

Commençons par le cas le plus simple.

2.1 Relevement quadruple en étoile à 3 branches

En un point de station M d'où on ne voit aucun point connu sur lequel on pourrait se relever, on vise 3 stations de relèvement N, P et Q qui ne se voient d'ailleurs pas entre elles, et où les tours d'horizon vont comprendre, outre la visée réciproque sur le point M, deux visées de relèvement respectivement sur A et B, sur C et D, et sur E et F.



En chaque station, 3 visées sont ainsi observées.

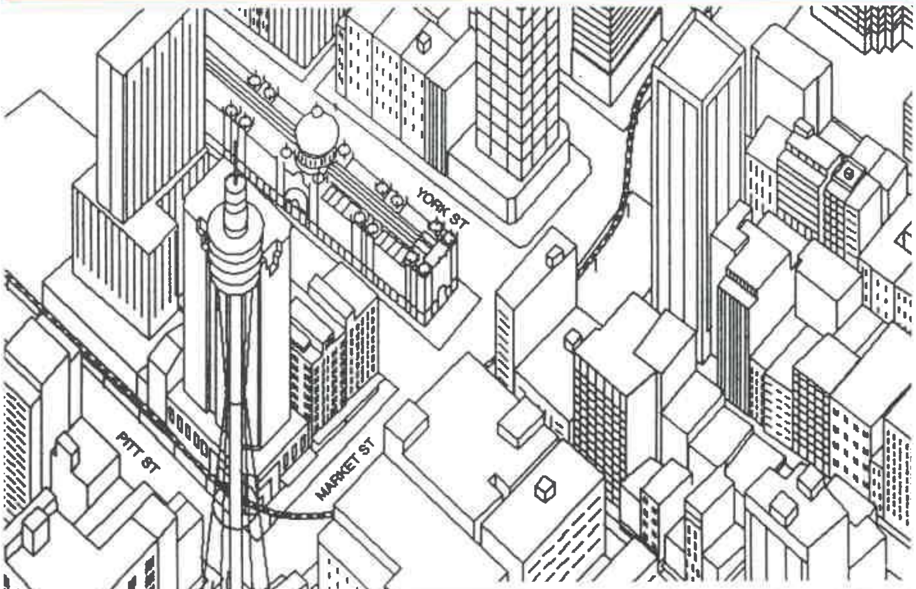
La détermination des 3 points fictifs de relèvement N', P' et Q' par intersection à partir respectivement de A et B, de C et D, et de E et F, ramène la figure à un relèvement du point M sur les 3 points N', P' et Q'.

Dans le présent cas : n = 4 p = 0 r = 6

La règle r = n + 2 est encore valable ici.

Du nouveau en photogrammétrie
L'acquisition de données en trois dimensions (3D) c'est facile avec le stéréorestituteur analytique MPS-2 (ADAM Technology)

TRANSPORTABLE – SIMPLE – FACILE D'EMPLOI



Il vous restituera tout, partout

Le MPS-2 vous restituera aussi votre investissement ; très rapidement.

Le MPS-2 met la photogrammétrie à la portée de tous par sa maniabilité, son faible encombrement, sa rapidité d'emploi, son faible coût.

Il est connectable sur un calculateur compatible PC pour la formation de l'image stéréoscopique obtenue très facilement et très rapidement, et pour le stockage des données obtenues sur disquette.

L'affichage au PC conduit l'opérateur pas à pas par des instructions, menus et messages-guide.

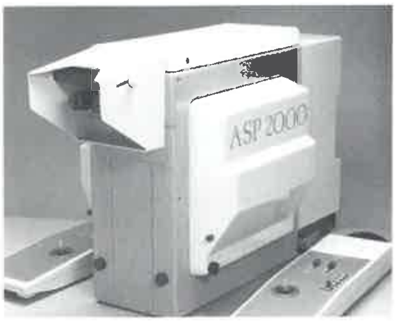
Le modèle étudié, restitué, peut être représenté à l'écran couleur du PC.

Le MPS-2 passe des clichés de 35 mm jusqu'à 70 mm. Il peut traiter des prises de vue aériennes et terrestres. Comme les autres produits de la gamme ADAM Technology, le MPS-2 permet d'entrer par un interface en temps réel, directement sur Autocad et sur microstation.
Le MPS-2 nécessite peu d'entrainement.

A partir de 280 000 F. Nous consulter

MANIABILITE – PERFORMANCE – SIMPLICITE

AUTRE MODELE
ASP 2000. Pour les clichés jusqu'au format aérien 230 × 230. Certains stéréorestituteurs analogiques peuvent être « transformés » en analytiques. Nous consulter.



DE NOMBREUSES APPLICATIONS :
- Levés cartographiques et mises à jour pour systèmes d'informations géographiques (SIG)
- Relevés d'archéologie, d'architecture, de monuments, de façaces.
- Mesures industrielles : Machines, pièces mécaniques, états d'avancement...
- Constats d'accident, relevés des lieux.
- Engineering : Etudes de maquettes et modèles, échantillons, tests, déformations.
- Etudes d'érosion, couverture végétale, zônes forestières, plantations.
- Occupation des sols, études agricoles.
- Biologie, images de microscopie électronique.
- Domaine médical : Restructuration de membres, visages...

MESURES & SYSTEMES
6, Rue des Jardins. 60500 CHANTILLY - FRANCE.
Tél. : 44 57 27 97. Fax : 44 57 46 58. Telex : MESYST 150153 F

A DECOUPER
et à retourner à MESURES & SYSTEMES
6, Rue des Jardins 60500 CHANTILLY
Sans engagement de ma part, veuillez m'adresser votre documentation concernant le stéréorestituteur
☐ MPS-2 ☐ ASP 2000

Nom ______
Adresse ______
______
Ville ______
Code postal ______ Tél. ______

2.2 Cas général des cheminements de relèvements multiples, avec embranchements

Les cheminements de relèvements multiples avec embranchements sont constitués de plusieurs branches.

Chaque branche élémentaire est un cheminement simple de relèvement multiple doté, en sa station extrême, de deux visées de relèvement. Les branches élémentaires sont attachées entre elles à un point de jonction qui, par hypothèse, est dépourvu de visée de relèvement.

2.2.1 Cas d'un seul embranchement

Dans le cas le plus simple, la configuration ne comporte qu'un embranchement en un seul point de jonction.

La résolution itérative de chacune des trois branches, à partir de leurs stations d'extrémité où ont été observées deux visées de relèvement, jusqu'au point de jonction, dotera celui-ci de 3 visées fictives de relèvement sur les derniers points fictifs de chacune des 3 branches. On voit ici que toute visée réelle de relèvement, observée au point de jonction, n'est pas nécessaire sinon superflue.

Le nombre r de visées de relèvement nécessaires pour chaque branche élémentaire de n stations est :

$r_1 = n_1 + 1$ $\qquad$ $r_2 = n_2 + 1$ $\qquad$ $r_3 = r_3 + 1$

Pour l'ensemble des 3 branches :

$r = r_1 + r_2 + r_3$
$n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$ (point de jonction)

Ainsi, comme pour les cheminements simples :
$r = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

d'où

$$\mathbf{r = n + 2}$$

2.2.2 Cas de plusieurs embranchements

S'il y a plusieurs embranchements, la même résolution itérative réduira, en chaque point de jonction, une branche élémentaire à une visée fictive de relèvement sur un point fictif.

On se trouvera alors en présence d'un cheminement progressivement de plus en plus dépouillé pour aboutir à un relèvement sur 3 points fictifs.

Le nombre de visées de relèvement observées nécessaires est toujours $r = n + 2$

3. Cheminements de relevements multiples formant une ou plusieurs boucles indépendantes

Appelons "boucle" un cheminement de relèvements multiples se refermant en un de ses sommets et formant ainsi un polygone fermé. La configuration la plus simple est évidemment trois stations en triangle.

3.1 Relèvement triple en triangle

Soit 3 points stationnés MN et P formant un triangle, les visées réciproques entre stations étant observées.

En ces trois points, quatre visées de relèvement sur 4 points connus A B C D ont été observées.

En M visées sur A et B ainsi que sur N et P
N visées sur C ainsi que sur M et P
P visées sur D ainsi que sur M et N

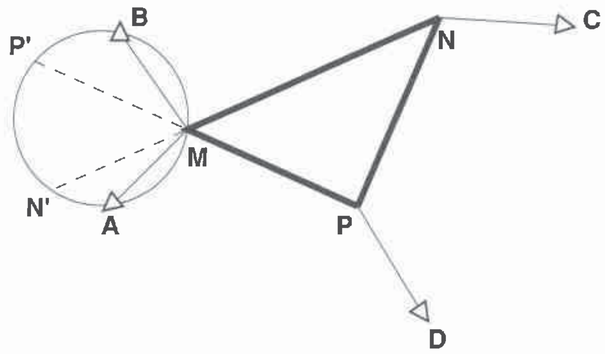
Notons que si les 6 visées internes ont été observées, l'une d'entre elles est redondante et peut à la rigueur manquer (on dit aussi angle conclu).

On note que pour ce relèvement triple en triangle : $n = 3$ $\quad$ $p = 1$ $\quad$ $r = 4$

Trois résolutions sont à notre disposition :

3.1.1. Première résolution

La détermination des points fictifs de relèvements N' et P' par intersection à partir de A et B montre la solution.



La figure se ramène à un relèvement double (cas 1.1) où les stations N et P sont relevées respectivement sur les points C et N', et sur D et P'

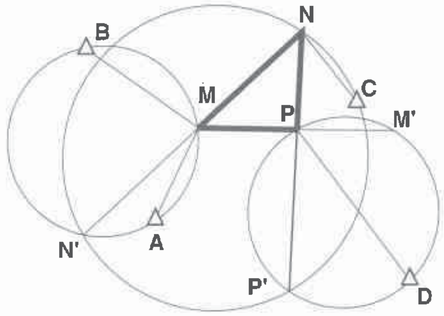
3.1.2 Deuxième résolution (solution itérative)

Tout comme dans un cheminement simple de relèvement on détermine successivement :

- le point fictif N' sur MN par intersection de A et B
- puis le point fictif P' sur NP par intersection de C et N'

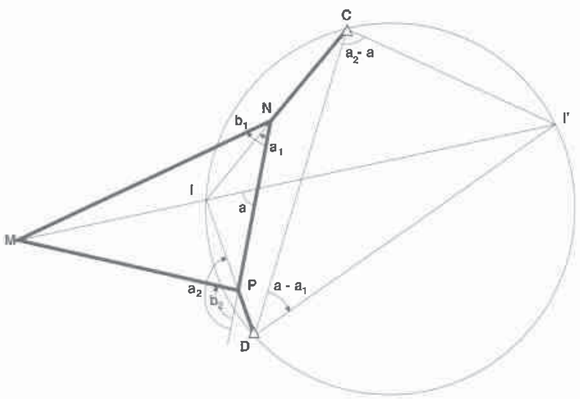
•enfin le point fictif M' sur PM par intersection de D et P'

Le point M se trouve ainsi relevé sur les trois points A B et M'.



3.1.3 Troisième résolution

Cette résolution est un peu plus complexe mais ouvre d'intéressantes possibilités.



On considère d'abord le point I, intersection des visées de relèvement NC et PD.

Dans le quadrilatère MNIP, les angles a1, b1, a2, b2 que font respectivement les quatre côtés NI, NM, PI, PM avec la diagonale NP, ont été observés et sont donc connus. Le quadrilatère est dit indéformable et l'angle "a" des deux diagonales que fait MI avec NP est calculable par la formule dite des Cotangentes (1)

$$\text{cotan } a = \frac{\text{cotan } a1 \times \text{cotan } b2 - \text{cotan } b1 \times \text{cotan } a2}{\text{cotan } a1 + \text{cotan } b2 - \text{cotan } b1 - \text{cotan } a2}$$

Le point I peut ainsi être assimilé à une station fictive de relèvement, visant les points connus C et D ainsi que le point M et recevant une visée de ce point M : la lecture fictive LMI de la station M sur le point I sera calculée grâce à l'angle "a", à 200 grades près :
$L_{MI} = L_{MN} + L_{NP} - L_{NN} + a$
ou aussi $L_{MI} = L_{MP} + L_{PN} - L_{PM} + a$

Les stations N et P d'une boucle triangulaire ayant chacune une visée de relèvement peuvent donc être remplacées par une station fictive unique I à deux visées de relèvement.
La résolution se poursuivra ensuite par la détermination habituelle du point fictif de relèvement I', sur la droite MI, par intersection à partir des points connus C et D.

On notera que jusqu'à ce stade de la résolution, les visées de relèvement MA et MB n'ont joué aucun rôle.

Le point M se trouve ainsi relevé sur les trois points AB et I'.

3.2 Relèvement multiple en polygonale fermée

Soit n points stationnés formant une polygonale fermée, les visées réciproques entre station étant observées.

En ces n points, n + 1 visées de relèvement ont été observées : 2 en un point, et une en tous les autres points.

Notons que si les 2n visées internes ont été observées, l'une d'entre elles est redondante et peut à la rigueur manquer.

La résolution est une extension itérative de la deuxième résolution 3.1.2 du relèvement triple en triangle.

En partant du point qui bénéficie de deux visées de relèvement où on détermine leur premier point fictif de relèvement, on déterminera de proche en proche les points fictifs successifs jusqu'à revenir à la station de départ qui se trouve ainsi dotée d'une troisième visée de relèvement sur le nième point fictif.

On note que pour cette configuration : p = 1 et r = n + 1. On remarque que par rapport à la configuration en cheminement simple où r = n + 2, la fermeture en boucle fait "économiser" une visée de relèvement.

Dans le cas général du relèvement multiple en polygonale fermée, le nombre de visées de relèvement nécessaires peut s'établir par un raisonnement analogue à celui utilisé ci-dessus dans le cas des cheminements simples (1.4).

Pour résoudre un système de n points, comportant chacun 3 éléments inconnus - les 2 coordonnées X et Y et l'orientement G0 du tour d'horizon - il est nécessaire de disposer d'au moins 3n équations d'observation, c'est-à-dire de 3n visées indépendantes observées.

Or, entre les n points de la polygonale fermée, il y a n côtés de cheminement donc 2n visées internes observées.

Il y a lieu toutefois de considérer qu'une visée peut être conclue (fermeture du polygone) d'où seulement 2n - 1 équations indépendantes.
Il faudra donc observer 3n - (2n - 1) soit n + 1 visées de relèvement.

On voit que le nombre de visées de relèvement nécessaires est inférieur d'une unité à ce qu'il aurait été en cheminement simple.

Bien entendu, chaque fermeture supplémentaire en boucle va permettre "d'économiser" une visée de relèvement.

Pour une configuration comportant p polygones fermés indépendants, il suffira d'observer :

n + 1 - (p - 1) soit n + 2 - p visées de relèvement

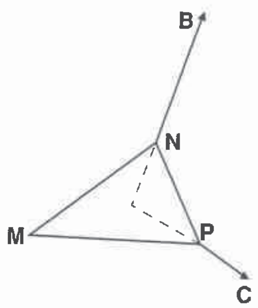
r = n + 2 - p

3.3 Configuration de relèvement présentant plusieurs boucles

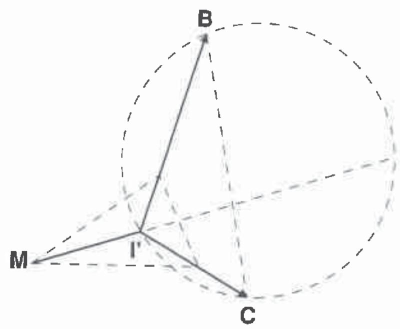
Nous avons mis en évidence - ci-dessus en 3.1.3. - que, dans une boucle triangulaire MNP, l'ensemble des deux stations N et P n'ayant chacune qu'une visée de relèvement respectivement sur B et sur C et que nous appellerons "doublet", équivaut à une station fictive unique I de relèvement à deux visées IB et IC et donc à une visée de relèvement unique émise du point M sur un point de relèvement fictif I' :

Les trois dispositions suivantes sont équivalentes :

a) doublet



b) station fictive de relèvement sur deux points

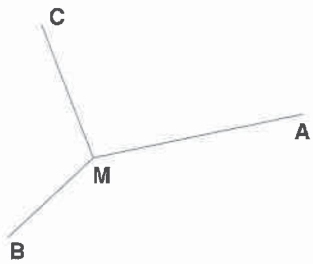


c) visée sur un point de relèvement fictif

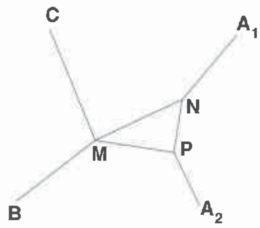
Réciproquement, dans toutes les configurations aperçues jusqu'à maintenant, là où en une station une visée était émise, on peut lui substituer un "doublet" constitué de deux visées sur 2 points de station supplémentaires où est émise en chacun d'eux une visée de relèvement sur un point connu.

Exemple : En partant du relèvement simple d'une station unique sur trois points connus, on peut remplacer une, deux, ou même les trois visées de relèvement par des doublets.

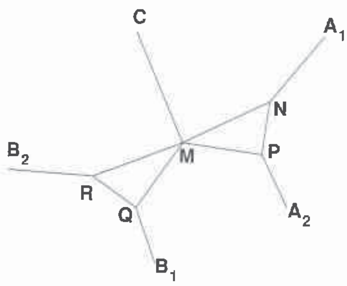
Relèvement simple sur 3 points
n = 1 p = 0 r = 3



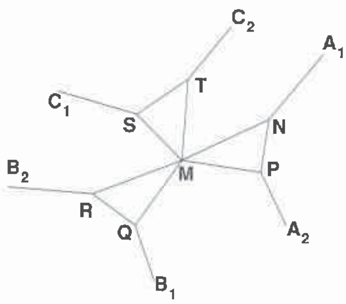
Relèvement triple sur 4 points (cas étudié en 3.1)
n = 3 p = 1 r = 4



Relèvement de 5 stations sur 5 points
n = 5 p = 2 r = 5



Relèvement de 7 stations sur 6 points (2)
n = 7 p = 3 r = 6

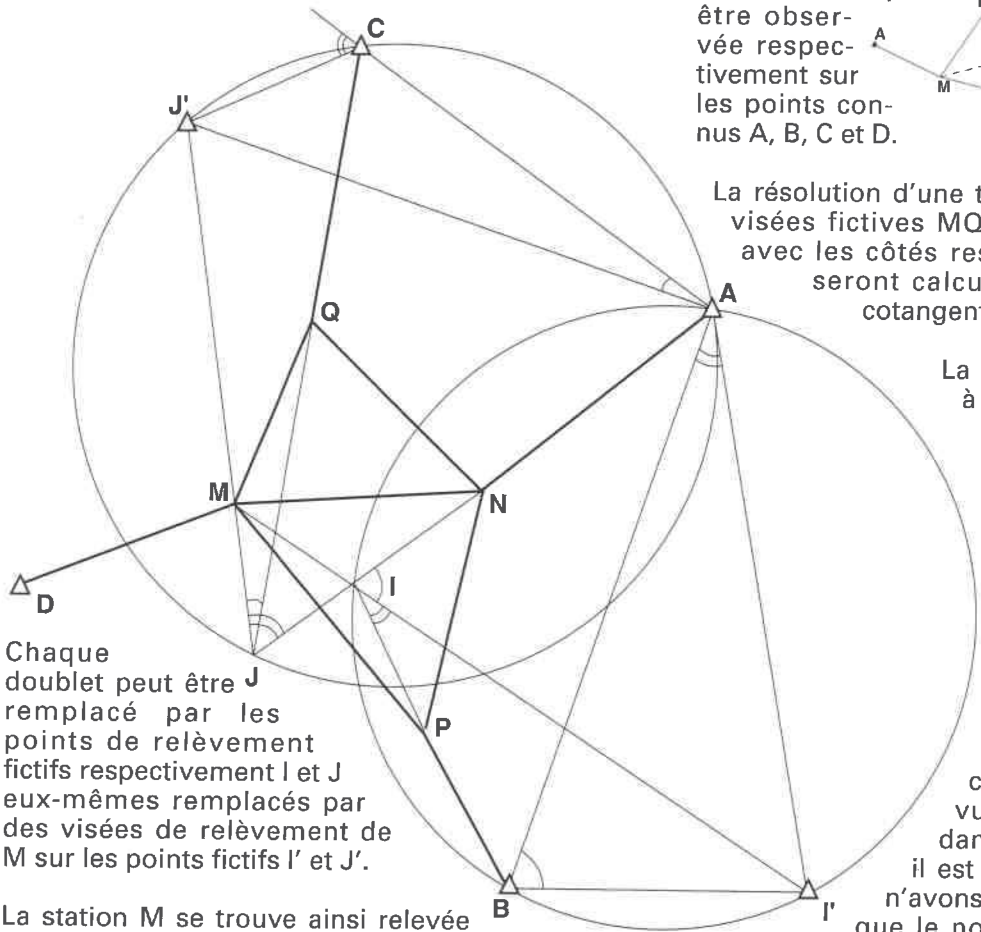


3.4. Relèvement de configurations indéformables

Une configuration indéformable est une figure définie à une similitude près (translation + rotation + mise à l'échelle).

La configuration indéformable la plus simple est formée de deux triangles accolés par un côté. C'est un quadrilatère indéformable MNPQ où en chaque sommet est émise une visée de relèvement.

On considère les 2 doublets
- MNP avec les visées de relèvement NA et PB
- MNQ avec les visées de relèvement NA et QC



Chaque doublet peut être remplacé par les points de relèvement fictifs respectivement I et J eux-mêmes remplacés par des visées de relèvement de M sur les points fictifs I' et J'.

La station M se trouve ainsi relevée sur les 3 points DI'J.

Cette configuration est la plus simple des chaînes de triangulation, formée de deux triangles accolés.

On peut généraliser cette résolution au cas de toute figure indéformable : chaîne de triangles juxtaposés.

Si p est le nombre de triangles (polygones indépendants) et n le nombre de sommets, il est facile de voir que :

$$\mathbf{p = n - 2}$$

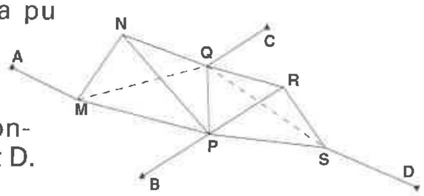
En portant cette valeur dans la relation générale

$$\mathbf{r = n + 2 - p}$$

on trouve
r = n + 2 - (n - 2)
d'où $\mathbf{r = 4}$

Le relèvement, et donc le rattachement, d'une figure indéformable, une triangulation locale par exemple, sur un réseau géodésique, nécessite donc toujours quatre visées de relèvement mais quatre seulement quelle que soit sa complexité, qui permettent de fixer les 4 degrés de liberté d'une similitude.

Exemple : Soit une chaîne de 4 triangles accolés donc à 6 sommets stationnés M, N, P, Q, R, S, où en 4 sommets M, P, Q, et S, une visée de relèvement a pu être observée respectivement sur les points connus A, B, C et D.



La résolution d'une telle figure passe par les visées fictives MQ et QS dont les angles avec les côtés respectivement NP et PR seront calculés par la formule des cotangentes.

La configuration se ramène à la résolution du quadrilatère indéformable MPQS doté, en chacun de ses sommets, d'une visée de relèvement.

Tout ceci peut sembler un peu théorique au premier abord, et nombre de lecteurs trouveront quelque peu téméraire de n'envisager ici que des configurations dépourvues de visées surabondantes. C'est certain, mais il est bien entendu que nous n'avons étudié dans chaquecas que le nombre nécessaire donc minimum de visées de relèvement. Il est toujours loisible, si les lieux s'y prêtent, d'observer des visées de relèvement supplémentaires. Mais alors, dans nombre de cas, la configuration pourra se décomposer en figures élémentaires plus restreintes. En espérant que vous n'aurez eu rien contre ce travail de réflexion et qu'il ne vous aura pas fait perdre trop de temps.

Bibliographie : Théorie et Pratique des relèvements multiples par l'Ingénieur Géographe P. Richarme (Publications techniques de l'Institut Géographique National Paris - 1956)

(1) XYZ n° 50 de janvier 1992. Défense et illustration de la cotangente : formule 4. ; (2) Cette configuation a fait l'objet du problème 3/91 posé dans XYZ n° 49 d'octobre 1991.