Le Comité de Rédaction d'XYZ est heureux de publier l'article ci-dessous d'un professionnel et enseignant de la topographie qui fait des propositions constructives pour améliorer les errements actuels en matière d'enseignement de réduction des longueurs à l'ellipsoïde de référence.

Note du Comité de Rédaction d'XYZ

A propos de la réduction des distances à l'ellipsoïde de référence

par Paul COURBON
Ingénieur des Travaux Géographiques de l'Etat - Géomètre expert
Professeur à l'Institut d'Enseignement Technique de la Grande Tourrache - Toulon

Suite à l'article "Réduction des longueurs", écrit par l'Ingénieur Général Géographe d'Hollander dans la revue *XYZ* n°30 (1987), je suis amené à critiquer ce qui est enseigné à ce sujet dans les écoles de géomètres ; en ce qui me concerne, je remets en cause les formules que nous inculquons aux élèves que nous préparons au Brevet Technique de topographie, et qui ont été inculquées à de nombreux géomètres experts.

L'altitude moyenne dans la réduction des distances

Pourquoi avoir pris une altitude moyenne ? Comme nous le verrons plus loin, dans une première approximation très suffisante jusqu'à 4 ou 5 km, cela ne s'imposait pas ; je dirai même que cela est illogique au regard de notre procédé de calcul.

En fait, les théoriciens ont pris une altitude moyenne parcequ'ils ne voulaient pas privilégier une extrémité de la longueur mesurée par rapport à l'autre. Or, dans les calculs que nous faisons, nous prenons un *site non réciproque :* celui de A sur B ou encore de B sur A, ce qui est en contradiction avec le souci des théoriciens.

Il faut noter que la formule rigoureuse employée en géodésie tient compte des hauteurs au-dessus de l'ellipsoïde des deux extrémités de la visée, mais elle ne fait pas intervenir directement l'altitude moyenne.

$$D_o = D_p \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\Delta H}{D_p}\right)^2}{\left(1+\frac{H_A}{R}\right)\left(1+\frac{H_B}{R}\right)}} \qquad (1)$$

D_p est la distance AB suivant la pente, H_A et H_B sont les hauteurs au-dessus de l'ellipsoïde de référence, assimilables en topométrie aux altitudes Z_A et Z_B ; $\Delta H = H_B - H_A$; R est le rayon de courbure moyen dans la direction considérée ; D_o est la distance réduite à l'ellipsoïde de référence. On remarquera que cette formule nous permet de passer directement de D_p à D_o, sans passer par D_h.

Si nous voulons employer une formule plu simple ou plus pédagogique, tout en employan une altitude moyenne, il faut prendre certaine précautions de réciprocité. Ce sont ces précautions qui ont été oubliées dans ce qui est inculqu dans la filière d'enseignement des géomètres e qui font que la formulation :

$$\begin{cases} D_h = D_p \cdot \cos i \\ D_o = D_h\left(1-\frac{H_m}{H_m+R}\right) \cong D_h\left(1-\frac{H_m}{R}\right) \end{cases} \qquad (2)$$

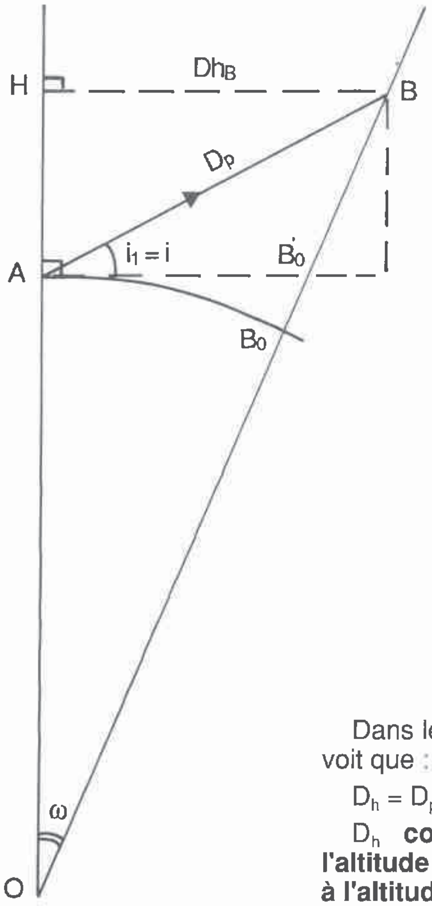
est incorrecte

avec $H_m = \frac{H_A + H_B}{2}$

L'erreur introduite par cette formulation est dan certains cas bien supérieure à la précision des appareils actuels. Dans une polygonation de précision *en terrain accidenté,* elle crée des erreurs systématiques non négligeables, quand on dépasse des cotes de 600 m. Monsieur d'Hollander nous le montre dans son article où deux tableaux font apparaître les erreurs commises ; encore ces tableaux sont-ils limités à des sites de 6,50 gr qui peuvent être dépassés en Provence ou dans les massifs montagneux français. On dépasse ainsi 14 cm d'erreur pour une visée de 4.600 m, avec un site de 6,50 gr. On retrouve aussi cette erreur dans mon tableau de calcul, joint ci-après, quand on compare la D_o obtenue avec la formule (1) et avec la formule (2) (dernière colonne).

Redémonstration d'une formule approchée

Dans la démonstration qui suit, seule la sphéricité a été prise en compte ; j'ai occulté la réfraction en traçant des visées droites plus commodes pour la démonstration et le calcul. Il en résulte une erreur minime, de l'ordre du cm pour une visée de 3 km avec un site de 6,50 gr et inférieure à 3 cm pour une visée de 4,6 km avec le même site, ce qui est d'autant plus satisfaisant pour une *formule approchée* que cette erreur est inférieure à la précision de mesure de telles longueurs.



Dans le sens AB, on voit que :

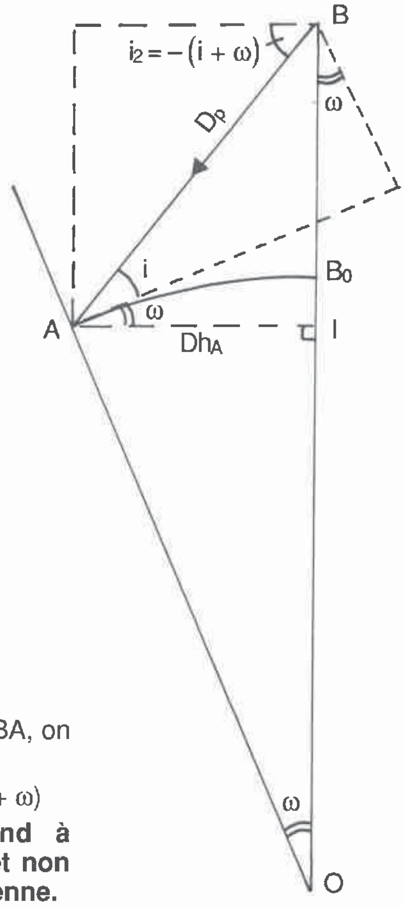
$D_h = D_p.\cos i$

D_h correspond à l'altitude de B et non à l'altitude moyenne.

Dans le sens BA, on voit que :

$D_h = D_p.\cos (i + \omega)$

D_h correspond à l'altitude de A et non à l'altitude moyenne.



Si on considère la visée dans le sens AB, l'angle d'inclinaison vaut : i = 6,50 gr.

Avec D_p = 4600m, nous avons :

Dh_B = 4600.cos6,50gr = <u>4576.04 m</u>

Supposons $H_A = 0$

Nous obtenons : D_p.sin i + NA = 470,26 m

La distance réduite à l'ellipsoïde est rigoureusement $D_o = AB_o = R\omega$, mais

$$AB'_0 = R.\mathrm{tg}\omega = R\left(\omega + \frac{\omega^3}{3}\right) \text{ ; donc } D_0 \cong AB'_0 \text{ [1]}$$

$$D_0 \cong Dh_B\left(1 - \frac{H_B}{R}\right) \qquad (3)$$

Avec R = 6369 km, D_o = 4575,706 m

(1) terme négligé : $R\frac{\omega^3}{3}$. Si D_0 = 5 km, ω = 5 cgr = $5 \times \frac{\pi}{2} \times 10^{-4}$

Pour R = 6367 km = $\frac{20000 \text{ km}}{\pi}$,

on a : $R\frac{\omega^3}{3} = 1{,}02 \times 10^{-6}$ km $= 1{,}02 \times 10^{-3}$ m,

de l'ordre du mm, donc tout à fait négligeable.

Si on considère la visée dans le sens BA, en prenant l'angle homologue i de la figure de gauche, l'angle d'inclinaison en B est :

$i_2 = -(6{,}50 + 0{,}046) = -6{,}546$ gr

Avec D_p = 4600 m

Dh_A = 4600.cos6,546gr = <u>4575.705 m</u>

Comme précédemment, $D_o = AB_o = R\omega$.

Mais,

$$AI = Dh_A = R.\sin\omega = R\left(\omega - \frac{\omega^3}{6}\right)$$

Nous voyons que $Dh_A \cong D_o$ [2]

Avec R = 6369 km, D_o = 4575,706 m

(2) terme négligé : $R\frac{\omega^3}{6}$. Si D_0 = 5 km, ω = 5 cgr

on trouve une erreur de l'ordre du demi mm.

On voit ici qu'il n'est pas indispensable de faire intervenir l'altitude moyenne

$H_m = \frac{H_A + H_B}{2}$ ($\frac{H_B}{2}$ dans ce cas particulier).

Si, par raison de symétrie, nous voulons faire intervenir l'altitude moyenne entre A et B, ce n'est ni $D_h = D_p.\cos i$, ni $D_h = D_p.\cos (i + \omega)$ qu'il faut prendre en considération, mais comme l'a démontré M. d'Hollander :

$$\left.\begin{aligned} Dh_m &= D_p.\cos\left(i + \frac{\omega}{2}\right) \\ \text{et } D_0 &= Dh_m\left(1 - \frac{H_m}{2}\right) \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Le tableau ci-dessous permet de comparer les résultats obtenus pour quatre valeurs de D_p : 1000 m, 2000 m, 3000 m, 4600 m de 5 manières différentes :

— 2 procédés rigoureux tenant compte de la réfraction,

— 2 procédés moins rigoureux qui tiennent compte de la sphéricité, mais négligent la réfraction,

— le cinquième procédé étant celui en usage dans l'enseignement du brevet technique et qui est employé par de nombreux géomètres ; dans cet exemple, il est insuffisant à partir de 2 km et peut l'être pour des distances bien inférieures quand on a des pentes plus fortes.

Tableau comparatif des calculs de D_o

Pour simplifier les calculs, nous avons pris $H_A = 0$. On a donc $H_B = D_p.\sin i + n.a.\left(n.a^{(m)} = \dfrac{D^{2\,(km)}}{15}\right)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D_p angle d'inclinaison	H_A	H_B en m	D_o par formule (1) géodésie en m(1)	D_o par formule de M. d'Hollander en m(2)	D'_o par formule (3) en m(3)	Δ(6) cm	D'_o par formules (4) en m(4)	Δ(6)	D'_o par formules (2) en m(5)	Δ(6)
D_p = 1000,00 m i = 6,50 gr	0	101,99	994,778	994,778	994,776	– 0,2	994,776	– 0,2	994,784	+ 0,6
D_p = 2000,00 m i = 6,50 gr	0	204,12	1989,525	1989,525	1989,521	– 0,4	1989,520	– 0,5	1889,552	+ 2,7
D_p = 3000,00 m i = 6,50 gr	0	306,37	2984,244	2984,244	2984,233	– 1,1	2984,233	– 1,1	2984,305	+ 6,1
D_p = 4600,00 m i = 6,50 gr	0	470,26	4575,730	4575,730	4575,706	– 2,4	4575,705	– 2,5	4575,875	+ 14,5

(1) le calcul de D_o dans la colonne 4 est fait par la formule de la géodésie : $D_o = \sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{\Delta H}{D_p}\right)^2}{\left(1+\dfrac{H_A}{R}\right)\left(1+\dfrac{H_B}{R}\right)}}$; R = 6369 km

(2) le calcul de D_o dans la colonne 5 est fait par la formule $Dh_m = D_p.\cos\left(i' + \dfrac{\omega}{2}\right)$

i' est l'angle d'inclinaison corrigé de la réfraction, ω l'angle des verticales en A et B.

D_o s'obtient à partir de Dh_m en faisant intervenir $H_m = \dfrac{H_A + H_B}{2}$

(3) le calcul de D_o dans la colonne 5 correspond à celui que j'ai fait ci-dessus : $Dh_B = Dp.\cos i$, $D_o \cong Dh_B\left(1 - \dfrac{H_B}{R}\right)$;
H_B est l'altitude du point visé.

(4) le calcul de D_o dans la colonne 8 est effectué au moyen des formules (4) : $Dh_m = D_p.\cos\left(i + \dfrac{\omega}{2}\right)$, $D_o \cong Dh_m\left(1 - \dfrac{H_m}{2}\right)$.

(5) le calcul de D_o dans la colonne 10 est fait selon les errements actuels et les formules enseignées aux géomètres (formule (2) ci-dessus) qui ne présentent plus de rigueur suffisante au-delà de 2 km, compte tenu de la précision des instruments modernes.

(6) les Δ correspondent aux différences exprimées en cm entre les résultats obtenus par les formules simplifiées :
D'_o est la valeur exacte. D_o : $\Delta D = D'_o - D_o$.

Propositions pour les programmes d'enseignement

1) Soit, nous enseignons que pour réduire les distances au niveau zéro, il faut prendre *l'altitude du point visé.* Dans notre exemple, si on prend la visée A sur B, (i = 6,50 gr), il faut prendre l'altitude de B ; si nous avions pris la visée de B sur A (i = 6,546 gr), il aurait fallu prendre l'altitude de A.

2) Soit, nous enseignons comme précédemment qu'il faut prendre l'altitude moyenne, mais alors il faut écrire :

$$D_h = D_p.\cos\left(i + \frac{\omega}{2}\right)$$

et non $D_h = D_p.\cos i$, dès que la distance dépasse 600 m. L'angle ω est facile à calculer : 1 cgr par km de distance.

3) De toutes manières, même si on ne la démontre pas aux élèves qui préparent le brevet technique, on peut enseigner la formule (1) employée en géodésie, facile à programmer et qui ne pose aucun problème d'application avec les calculatrices électroniques. De la même manière que l'on fait appliquer les formules de tolérance de 1980 sans les avoir démontrées !

Tableau I

i (gr) / Dp (m)	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400
0,5	– 0,02	– 0,03	– 0,04	–0,06	– 0,07	– 0,09	– 0,11	– 0,14	– 0,16	– 0,19	– 0,22
1,0	– 0,04	– 0,06	– 0,08	– 0,11	– 0,14	– 0,18	– 0,23	– 0,27	– 0,33	– 0,38	–0,44
1,5	– 0,05	– 0,09	– 0,12	– 0,17	– 0,22	– 0,28	– 0,34	– 0,41	– 0,49	– 0,58	– 0,67
2,0	– 0,07	– 0,11	– 0,16	– 0,22	– 0,29	– 0,37	– 0,45	– 0,55	– 0,65	– 0,77	– 0,89
2,5	– 0,09	– 0,14	– 0,20	– 0,28	– 0,36	– 0,46	– 0,57	– 0,69	– 0,82	– 0,96	– 1,11
3,0	– 0,11	– 0,17	– 0,24	– 0,33	– 0,44	– 0,58	– 0,68	– 0,82	– 0,91	– 1,15	– 1,33
3,5	– 0,13	– 0,20	– 0,29	– 0,39	– 0,51	– 0,64	– 0,79	– 0,96	– 1,14	– 1,34	– 1,55
4,0	– 0,14	– 0,23	– 0,33	– 0,44	– 0,58	– 0,73	– 0,91	– 1,10	– 1,30	– 1,53	– 1,77
4,5	– 0,16	– 0,25	– 0,37	– 0,50	– 0,65	– 0,82	– 1,02	– 1,23	– 1,47	– 1,72	– 2,00
5,0	– 0,18	– 0,28	– 0,41	– 0,55	– 0,72	– 0,92	– 1,13	– 1,36	– 1,63	– 1,91	– 2,21
5,5	– 0,20	– 0,31	– 0,45	– 0,61	– 0,79	– 1,01	– 1,24	– 1,50	– 1,79	– 2,10	– 2,43
6,0	– 0,22	– 0,34	– 0,49	– 0,66	– 0,87	– 1,10	– 1,35	– 1,64	– 1,95	– 2,29	– 2,65
6,5	– 0,23	– 0,37	– 0,53	– 0,72	– 0,94	– 1,19	– 1,47	– 1,77	– 2,11	– 2,48	– 2,87

Le trait épais en escalier sépare les zones du tableau pour lesquelles, lorsqu'on prend la formule approchée $(Dh_A)app$ = Dpcosi, l'erreur commise est inférieure à 0,5 cm, de celle pour laquelle l'erreur commise est supérieure ou égale à 0,5 cm.

Tableau II donnant les corrections en cm à apporter à la valeur approchée $Dh_{(AB)}$ = Dpcosi lorsqu'on veut obtenir la distance rigoureuse réduite à l'horizon du point I d'altitude moyenne entre A et B

i (gr) / Dp (m)	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600
0,50	– 0,1	– 0,1	– 0,2	– 0,2	– 0,3	– 0,3	– 0,35	– 0,4	– 0,5	– 0,5	– 0,6	– 0,7	– 0,7	– 0,8	– 0,9	– 1,0	– 1,1
1,00	– 0,2	– 0,3	– 0,4	– 0,4	– 0,5	– 0,6	– 0,7	– 0,8	– 0,9	– 1,1	– 1,2	– 1,3	– 1,5	– 1,7	– 1,8	– 2,0	– 2,2
1,50	– 0,3	– 0,4	– 0,5	– 0,6	– 0,8	– 0,9	– 1,0	– 1,2	– 1,4	– 1,6	– 1,8	–2,0	– 2,2	– 2,5	–2,7	– 3,0	– 3,3
2,00	– 0,4	– 0,5	– 0,7	– 0,8	– 1,0	– 1,2	– 1,4	– 1,6	– 1,9	– 2,1	– 2,4	– 2,7	– 3,0	– 3,3	– 3,7	– 4,0	– 4,4
2,50	– 0,5	– 0,7	– 0,8	– 1,0	– 1,3	– 1,5	– 1,7	– 2,0	– 2,3	– 2,6	– 3,0	– 3,4	– 3,7	– 4,1	– 4,6	– 5,0	– 5,5
3,00	– 0,6	– 0,8	– 1,0	– 1,2	– 1,5	– 1,8	– 2,1	– 2,4	– 2,8	– 3,2	– 3,6	– 4,0	– 4,5	– 5,0	– 5,5	– 6,0	– 6,6
3,50	– 0,7	– 0,9	– 1,2	– 1,4	– 1,7	– 2,1	– 2,4	– 2,8	– 3,3	– 3,7	– 4,2	– 4,7	– 5,2	– 5,8	– 6,4	– 7,0	– 7,7
4,00	– 0,8	– 1,1	– 1,3	– 1,6	– 2,0	– 2,4	– 2,8	– 3,2	– 3,7	– 4,2	– 4,8	– 5,4	– 6,0	– 6,6	– 7,3	– 8,0	– 8,7
4,50	– 0,9	– 1,2	– 1,5	– 1,9	– 2,2	– 2,7	– 3,1	– 3,6	– 4,2	– 4,7	– 5,4	– 6,0	– 6,7	– 7,4	– 8,2	– 9,0	– 9,8
5,00	– 1,0	– 1,3	– 1,7	– 2,1	– 2,5	– 3,0	– 3,5	– 4,0	– 4,6	– 5,3	– 6,0	– 6,7	– 7,5	– 8,3	– 9,1	– 10,0	– 10,9
5,50	– 1,1	– 1,5	– 1,8	– 2,2	– 2,7	– 3,3	– 3,8	– 4,5	– 5,1	– 5,8	– 6,6	– 7,3	– 8,2	– 9,1	– 10,0	– 11,0	– 12,0
6,00	– 1,2	– 1,6	– 2,0	– 2,5	– 3,0	– 3,6	– 4,2	– 4,8	– 5,6	– 6,3	– 7,1	– 8,0	– 8,9	– 9,9	– 10,9	– 12,0	– 13,1
6,50	– 1,3	– 1,7	– 2,2	– 2,7	– 3,2	– 3,9	– 4,5	– 5,2	– 6,0	– 6,8	– 7,7	– 8,7	– 9,7	– 10,7	– 11,8	– 12,9	– 14,2