Le calcul d'un azimut astronomique en topographie

par R. d'Hollander ingénieur général géographe

1. Introduction

Le but de cet article est d'informer les ingénieurs et techniciens topographes, ayant terminé leur formation depuis une douzaine d'années, des conditions nouvelles qui sont intervenues en matière d'éphémérides astronomiques, permettant de résoudre les deux problèmes essentiels de l'orientation astronomique : l'azimut par la distance zénithale (généralement sur le Soleil) et l'azimut par l'heure (généralement sur la polaire).

Un article de M. Levallois paru en 1980 dans le n°5 de XYZ intitulé «Les publications du Bureau des Longitudes» précisait la teneur nouvelle de «l'Annuaire du Bureau des longitudes» et de la «Connaissance des temps».

L'ancien annuaire du Bureau des Longitudes fut à partir de 1977 scindé en deux parties distinctes :

■ Un volume intitulé «Ephémérides astronomiques pour l'année X», qui nous intéresse plus spécialement.

■ Un Tome d'une encyclopédie scientifique de l'Univers.

Les «Ephémérides astronomiques» comportent en particulier des tables du Soleil pour tous les jours de l'année. Le temps sidéral Greenwich à 0h TU y est donné à la seconde près, ce qui est suffisant pour les besoins de la Topographie, l'ascension droite du Soleil à la seconde de temps près, mais les déclinaisons du Soleil seulement à la minute sexagésimale près, ce qui entraîne une difficulté sur laquelle nous reviendrons ci-après. La table donne aussi le temps de passage du Soleil au méridien de Paris au dixième de minute près, alors qu'il serait préférable que ce temps soit donné à la seconde de temps près.

Quant à la «Connaissance des temps» elle a subi une modification radicale, caractérisée surtout par une réduction importante du volume de l'ouvrage, avec un format agrandi. Au lieu de donner comme l'ancienne «Connaissance des temps» : l'ascension droite au centième de seconde de temps près, la déclinaison à la dixième de seconde sexagésimale près, le temps sidéral Greenwich au millième de seconde près, ceci pour tous les jours de l'année à 0 h UT, la nouvelle «Connaissance des Temps» présente des tableaux de coefficients pour la représentation de toute une série de coordonnées célestes relatives au Soleil, à la Lune, aux planètes, par des développements en polynômes de Tchebychev.

En outre l'ancienne Connaissance des temps donnait, en ce qui concerne l'orientation à la polaire, une série de tables :
• table I pour un terme dit a,
• table II pour un terme dit b ;
l'angle horaire de la polaire s'obtenait par :
H = temps civil local + a + b, puis une série de tableaux à double entrée permettait d'interpoler l'azimut de la polaire pour un angle horaire donné et une latitude donnée.

Aucun calcul astronomique n'était nécessaire, car il suffisait de procéder par interpolation linéaire, les intervalles tabulaires étant suffisamment petits.

Il faut ajouter en outre qu'un fascicule intitulé : «Tables du Soleil et tables numériques diverses - Extrait de la Connaissance des Temps pour l'année X» était publié chaque année par Gauthier-Villars sous le timbre «Institut géographique national». Ce fascicule qui n'est plus publié et dont l'épaisseur était réduite, dispensait notamment les géomètres et topographes de se procurer la «Connaissance des temps» complète.

La manière d'utiliser les Tables de ce fascicule était décrite dans une notice permanente intitulée : «Notice sur l'emploi des tables du Soleil et tables numériques diverses extraites de la Connaissance des temps, publiée à l'intention des topographes, géomètres, explorateurs et artilleurs pour la détermination astronomique des azimuts et des gisements». Cette notice éditée par l'I.G.N est devenue caduque par suite des modifications intervenues dans la Connaissance des Temps.

C'était sur la base de ces deux documents : Notice permanente, Extrait de la Connaissance des temps, qu'était dispensé jusqu'à 1980 environ l'enseignement de l'orientation astronomique en topographie.

La nouvellle «Connaissance des Temps» a contenu pendant un certain nombre d'années une table d'Ephémérides : ascension droite, déclinaison de la polaire, très précise, pour le passage supérieur de cet astre au méridien international pour tous les jours de l'année ; cette table a été ensuite transférée dans les «Ephémérides astronomiques», ce qui a constitué une modification très bénéfique pour les usagers, notamment pour les géomètres et les topographes.

Nous allons examiner les conditions d'utilisation des nouveaux documents pour résoudre le problème de l'azimut par mesure de la distance zénithale : chapitre 2 ci-après, puis le problème de l'azimut par l'heure sur la polaire : chapitre 3.

2. Problème de l'azimut par mesure de la distance zénithale du Soleil

Pour fixer les idées, considérons sur la sphère céleste une position S du Soleil pour un jour donné et à un instant donné t de l'après midi. En raison de l'inclinaison donnée sur la figure 1 à l'axe des pôles (Nord à gauche) le point S, situé à l'Ouest, se trouve en avant du plan de figure, qui est celui du méridien du lieu contenant l'axe des pôles PP' et la verticale 0Z du lieu.

Nous savons grâce aux éphémérides calculer la déclinaison du Soleil à l'instant t le jour J ; nous supposons que nous connaissons la latitude du lieu, mesurée sur une bonne carte topographique. A la suite d'une série d'observations, sur lesquelles nous reviendrons à la fin de ce chapitre, nous avons obtenu la distance zénithale brute relative au centre du Soleil, la lecture azimutale sur le centre du Soleil et sur un repère terrestre R. Après correction de la réfraction atmosphérique et de la parallaxe du Soleil nous obtenons la distance zénithale du centre du Soleil, ramenée au centre de la Terre et qui servira dans les calculs : soit z cette distance zénithale $z = \overset{\frown}{ZS}$.

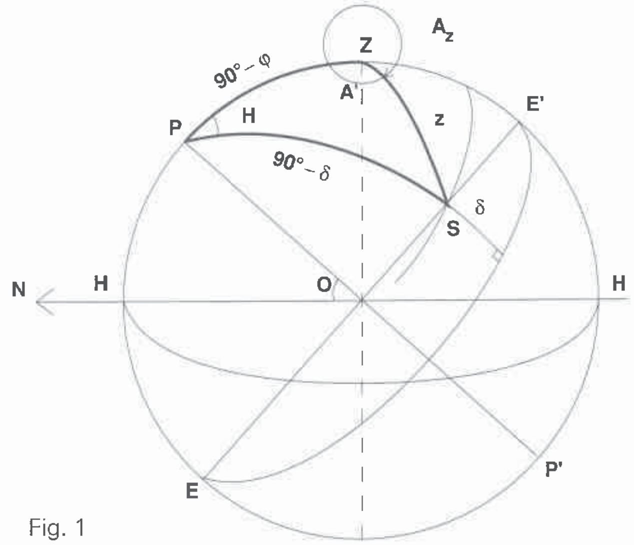


Fig. 1

Rappelons que la latitude est la hauteur du pôle au dessus de l'horizon, donc $\overset{\frown}{PZ} = 90° - \varphi$. La déclinaison δ étant comptée à partir de l'équateur, on a : arc $\overset{\frown}{PS} = 90° - \delta$.

Le triangle de position PZS a donc ses trois côtés connus. Il s'agit de calculer l'angle A' en Z, que fait le vertical du Soleil avec le méridien ; nous en déduirons l'azimut à partir du Nord :

$$Az = 400 \text{ gr} - A'$$

Pour calculer A' il suffit d'appliquer la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

avec $a = \overset{\frown}{PS} = 90° - \delta$, $b = \overset{\frown}{PZ} = 90° - \varphi$, $c = z$

en remplaçant $\cos(90° - \varphi)$ et $\cos(90° - \delta)$ par $\sin \varphi$ et $\sin \delta$, on a :

(1) $\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos A'$

(2) $\cos A' = \dfrac{\sin \delta - \sin \varphi \cos z}{\cos \varphi \sin z}$

2.1 Influence d'une erreur d δ de la déclinaison sur l'angle A'

Supposons la distance zénithale z connue avec une grande précision, de sorte que $dz = 0$. Différentions la formule (1) par rapport à δ et à A'

$\cos \delta \, d\delta = 0 - \cos \varphi \sin z \sin A' \, dA'$

D'après la relation des sinus appliquée au triangle de position :

$\dfrac{\sin(\pi/2 - \delta)}{\sin A'} = \dfrac{\sin z}{\sin H}$, on a :

$$\sin z \sin A' = \cos \delta \sin H,$$

de sorte que la formule différentielle devient :

$\cos \delta \, d\delta = -\cos \varphi \cos \delta \sin H \, dA'$, d'où :

(3) $\dfrac{dA'}{d\delta} = -\dfrac{1}{\cos \varphi \sin H}$

Nous allons montrer que si on prend la déclinaison dans la table des éphémérides, on commet sur la valeur de A' une erreur caractérisée par une incertitude $|\Delta A_1|$ dépassant nettement le centigrade. Or il y a d'autres causes δ d'erreur : erreur d'observation sur z donnant l'incertitude $|\Delta A_2|$, erreur sur la connaissance de la réfraction entraînant l'incertitude $|\Delta A_3|$. L'incertitude $|\Delta A_1|$ due à δ cumulée avec les deux autres incertitudes $|\Delta A_2|$ et $|\Delta A_3|$ donne un résultat nettement trop imprécis. Si nous nous plaçons dans le cas de la topométrie de moyenne précision, caractérisée par une incertitude relative de l'ordre de 10^{-4}, il nous faut une incertitude totale :

$|\Delta A| = |\Delta A_1| + |\Delta A_2| + |\Delta A_3|$

inférieure à 1cgr soit $1{,}57 \times 10^{-4}$ radians et pour réaliser une telle condition, nous prendrons :

$|\Delta_1| \leq 1/2$ cgr.

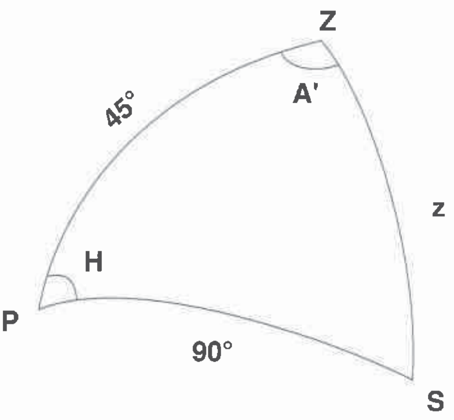


Fig. 2

Pour fixer les idées prenons le cas d'un triangle de position facile à résoudre : $\varphi = 45°$, $\delta = 0$ (observation à l'un des équinoxes), $z = 70°$, d'où: $\widehat{PZ} = 90° - \varphi = 45°$, $\widehat{PS} = 90° - \delta = 90°$, $\widehat{ZS} = 70°$.

On obtient A' par la formule (2), qui devient :

$\cos A' = -\tan \varphi \cot z = -0,363970234$,

$A' = 111°3442229 = 123,71580$ gr.

La table des Ephémérides astronomiques donne δ à la minute sexagésimale près : on commet donc une erreur d'arrondissement :
$|\Delta\delta|$ valant au plus : $|\Delta\delta| = 1/2' = 1°/120$
soit : $|\Delta\delta| = 0°,0083333$

Pour appliquer la formule différentielle (3) calculons H par :

$$\frac{\sin H}{\sin z} = \frac{\sin A'}{\sin 90°}$$

On trouve : $\sin H = \sin z \sin A' = 0,867525668$ ($H = 60°,172367$).
La formule (3) devient :

$$\text{(3) bis } |\Delta A_1| = \frac{\Delta\delta}{\cos \varphi \sin H}$$

$|\Delta A_1| = 0,°01358$ ou en gr : $0,01358 \times 10/9$

$|\Delta A_1| = 0,015094$ gr $= 1,509$ cgr.

Ainsi dans ce cas l'utilisation de la table des déclinaisons du Soleil des «Ephémérides astronomiques» introduit dès le départ une incertitude sur l'azimut triple du maximum que nous nous étions fixés. Or H = 4 h paraît être l'angle horaire le plus élevé compatible avec une précision suffisante sur l'angle de réfraction. Nous savons que la distance zénithale correspondante est z = 70°, angle limite d'utilisation de la formule de Laplace. Pour z > 70° le calcul de l'angle de réfraction devient compliqué et la précision du résultat obtenu aléatoire. Pour z = 70°, soit h = 20° dans les conditions normales : 760 mn de mercure de pression, et 0° de température l'angle de réfraction vaut environ 5 cgr.

Supposons maintenant H = 2 h = 30° ; en résolvant le triangle de position de la figure 2, on a :
$\cos z = \cos 45° \cos 90° + \sin 45° \sin 90° \cos 30°$

$$\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,61237$$

$z = 52°,24$ d'où : $h = 37°,76$

Dans les conditions normales, l'angle de réfraction vaut 2,4 cgr. Cet angle peut être calculé dans de bonnes conditions, donc avec une certaine précision ; mais l'erreur :

$$|\Delta A_1| = \frac{\Delta\delta}{\cos \varphi \times \sin H}$$

devient avec $\varphi = 45°$ et $H = 30°$:

$$|\Delta A_1| = \frac{0,008333}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}} = 0°0235 = 0,026 \text{ gr}$$

soit $|\Delta A_1| = 2,6$ cgr, erreur tout à fait prohibitive dès lors qu'on s'impose $|\Delta A_1| < 0,5$ cgr. Retenons de l'étude qui précède que pour la méthode de l'azimut par la distance zénithale du Soleil :

1°) il faut choisir l'instant de l'observation le matin ou l'après-midi de façon que :
$2 \text{ h} < |H| < 4 \text{ h}$.

2°) Comme l'utilisation de la table des déclinaisons du Soleil des «Ephémérides astronomiques» entraîne des erreurs prohibitives sur l'azimut, pouvant atteindre $|\Delta A_1| = 1,5$ cgr pour $H \approx 4$ h et $|\Delta A_1| = 2,6$ cgr pour H = 2 h, il faut calculer la déclinaison du Soleil au moyen des développements en polynômes de Tchebychev de la «Connaissance des temps»

2.2 Exemple numérique d'azimut par la distance zénithale du Soleil

Nous donnons ci-après un exemple permettant de connaître les conditions d'utilisation de la nouvelle «Connaissance des temps» pour le calcul de la déclinaison du Soleil.

On a observé le Soleil le 24 septembre 1990 à 16 h 07 m UT en un point Q de latitude :

(4) $\varphi = 48,7155$ gr ou bien

(4) bis $\varphi = 43,°84395$

et de longitude : $\lambda = 3,8510$ gr $= 3°,4659$ Ouest du méridien de Paris, soit $\lambda = 0h,23106$ Ouest du méridien de Paris.

Ce point Q se trouve dans la zone Lambert III, pour laquelle la latitude du parallèle origine de la projection est : $\varphi_o = 49,0000$ gr.

La température est de 24°, la pression atmosphérique de 760 mm de mercure.

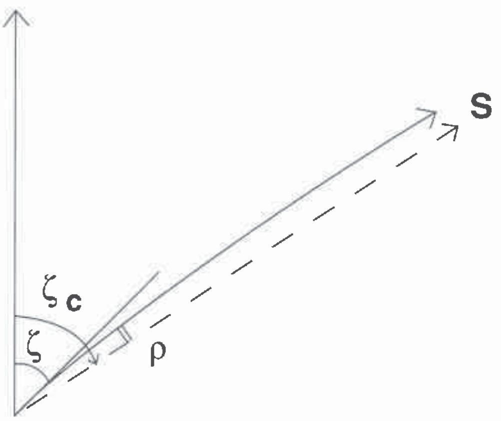


Fig. 3

Après réduction des diverses observations qui seront détaillées en 2,25, on a dans une première série de mesures obtenu les résultats ci-après :

Lecture zénithale sur le centre du Soleil :
ζ = 78,8382 gr,

Lecture azimutale sur le centre du Soleil :
Is = 370,3230 gr,

Lecture azimutale sur le repère R :
I_R = 10,0075 gr.

Le sens des graduations du théodolite utilisé est celui qui correspond au sens de rotation des aiguilles d'une montre.

On demande de calculer l'azimut Az_s du Soleil à l'instant de l'observation, puis l'azimut Az_{QR} de la direction QR, enfin le gisement de cette direction.

2.21 Calculs préléminaires

a) Calcul de la distance zénithale réduite

Il s'agit d'abord de corriger la distance zénithale brute ζ, résultant des observations, de la réfraction, puis de la ramener à ce qu'elle serait au centre de la Terre en la corrigeant de la parallaxe.

La Connaissance des temps donne la formule de Laplace, qui en fonction de la température, de la pression atmosphérique et de la distance zénithale brute permet de calculer l'angle de réfraction, curieusement désigné par R. Puisque ζ est obtenu en grades et plutôt que de faire un calcul relativement long en degrés, il nous paraît préférable d'utiliser la formule suivante qui donne directement l'angle ρ en grades :

$$\rho^{(gr)} = 0{,}01854 \times \frac{P}{760} \times \frac{273{,}15}{273{,}15 + t} \,\mathrm{tg}\,\zeta - 0{,}000021\,\mathrm{tg}^3\zeta$$

où P est la pression atmosphérique exprimée en mm de mercure et t la température en degrés Celsius.

Dans notre exemple P = 760 mm et t = 24°, d'où :

$$\rho^{(gr)} = 0{,}01854 \times 1 \times \frac{273{,}15}{297{,}15} \tan 78{,}8382 \text{ gr} - 0{,}000021 \tan^3 78{,}8382 \text{ gr}$$

$\rho^{(gr)} = 0{,}01854 \times 2{,}6628 - 0{,}0005$
$\rho = 0{,}0489$ gr

La figure 3 ci-contre rappelle que la distance zénithale corrigée de la réfraction est :

$\zeta c = \zeta + \rho$

$\zeta c = 78{,}8382 + 0{,}0493 = 78{,}8875$ gr.

La parallaxe horizontale équatoriale π_0 est donnée dans les «Ephémérides astronomiques» de 8 en 8 jours.

Le 24 septembre 1990 elle vaut : π_0 = 8"76, soit $\pi_0 = 8{,}76 \times 3{,}086 = 27{,}03$ dmgr.

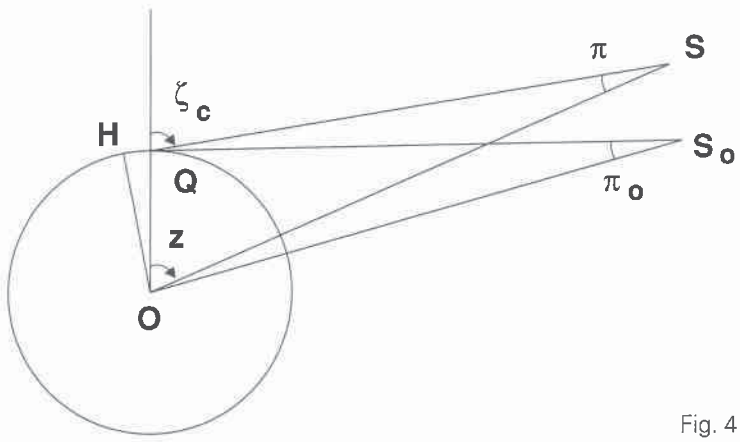


Fig. 4

Elle correspond à la position S_0 du Soleil sur la figure 4. Pour la position S de distance zénithale ζc, la parallaxe est π. En admettant que OS =OS_0, on a :

$$\sin \pi_0 = \frac{OQ}{OS_0} \quad \text{et} \quad \sin \pi = \frac{OH}{OS} = \frac{OQ}{OS_0} \sin \zeta c$$

Comme ces angles sont très petits, on peut écrire :

$$\pi \approx \pi_0 \sin \zeta c$$

Dans le cas de l'exemple numérique :
$\pi \approx 27{,}03$ dmgr x sin 78,8871 gr, soit :

$$\pi = 25{,}6 \text{ dmgr.}$$

Comme la variation de la parallaxe équatoriale du Soleil est faible au cours de l'année, on peut se contenter de prendre une parallaxe moyenne : 8"792,

soit $\frac{8{,}792}{3600} = 0°{,}00242 = 0{,}0027$ gr,

de sorte que $\pi^{(gr)} = 0{,}0027 \times \sin \zeta c$.

On trouve : π = 0,00255 gr, soit π = 25,5 dmgr. Nous prendrons la valeur arrondie : π = 0,0026 gr.

La figure 4 montre que : (6) $z = \zeta_c - \pi$

$z^{(gr)}$ = 78,8871 - 0,0026

(6) bis z = 78,8845 gr ou

(6) ter z = 70°,99605

b) Calcul de la déclinaison du Soleil

Pour la raison indiquée plus haut nous calculerons la déclinaison du Soleil en nous servant de la «Connaissance des temps», dont la table 5 donne un extrait pour 1990 du 0 septembre 0h au 3 octobre 0h.

Mais l'argument de cette table et des autres tables de cette publication n'est pas le temps UT, comme dans les «Ephémérides astronomiques». L'argument est ce qu'on appelle le temps des Ephémérides T_E basé sur le temps atomique international : TAI. Ainsi le 0 septembre 0 h ne correspond pas à 0 h UT. Au 1er janvier 1990 on a relation :

T_E = TAI + 32 s, 184 = UT + 57s,184,

autrement dit pour entrer dans les tables de la «Connaissance des temps», il faut majorer UT, soit 16 h 07 m = 16 h, 11666667 de 57s,184, soit:

$$\frac{57{,}184}{3600} = 0\text{ h},01588444.$$

D'où T_E = 16 h,11666667 + 0h,01588444

T_E = 16 h,13255111

L'instant T_0 est le 0 septembre 0h, de sorte que pour l'instant: T_E = 16 h 13255111 la quantité $T_E - T_0$, exprimée en jours est :

$$T_E - T_0 = 24 + \frac{16{,}13255111}{24} = 24{,}672189629 \text{ Jours}$$

Pour utiliser les polynômes de Tchebychev, il est nécessaire de ramener la variable à une valeur comprise entre -1 et +1 : il faut procéder au changement de variable :

$$x = -1 + \frac{2\,(T_E - T_0)}{DT} = -1 + \frac{2 \times 24{,}672189629}{33}$$

x = 0,49528422

Deux développements de Tchebychev sont possibles, l'un utilisant les polynômes de Tchebychev proprement dits, l'autre utilisant l'angle θ = arc cos x et le développement en puissances de cosinus d'angles multiples de θ :
$\delta = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots a_9 \cos 9\theta$.

C'est ce développement que nous conseillons, les coefficients a_0 a_1 a_2...a_9 sont tabulés dans la colonne déclinaison en face de 0 1 2...9, indices de a_0 a_1 a_2 ...a_9. Avec une calculatrice scientifique, même non programmable, on peut obtenir simplement les valeurs de cos 2 θ, cos 3 θ... cos 9 θ. Il suffit de mettre la valeur θ en mémoire ; de vérifier qu'on obtient bien : x = cos θ et de multiplier aussitôt ce terme par a_1 ; on sort ensuite θ de la mémoire et on le multiplie par 2, on calcule cos 2 θ que l'on multiplie aussitôt par a_2 et ainsi de suite,....

Il y a intérêt à placer les résultats de ces diverses multiplications dans deux colonnes, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, comme dans le tableau de calcul, situé sous l'extrait de la table 5. Pour x = 0,49528422 on trouve :

θ = arc cos x = 60°,31150613

Table 5. Soleil 1990. DT = 33 jours
Ascension droite, déclinaison, temps de passage au méridien international

Du 0 septembre 0H au 3 octobre 0H

	Asc. Droite	Déclinaison	T Passage	
	10,603 218 1	8,813 490	12,008 948 3	
0	11,593 703 4	2,576 224	11,915 252 9	0
1	0,989 275 3	- 6,312 672	- 0,094 905 8	1
2	- 0,000 223 1	- 0,057 875	- 0,000 224 7	2
3	0,000 963 4	0,017 891	0,000 962 6	3
4	- 0,000 013 9	0,000 260	- 0,000 014 5	4
5	0,000 012 4	- 0,000 119	0,000 012 7	5
6	- 0,000 001 0	0,000 008	0,000 002 0	6
7	- 0,000 001 6	0,000 013	- 0,000 002 1	7
8	0,000 001 8	- 0,000 011	0,000 000 3	8
9	- 0,000 000 4	0,000 003	0,000 000 3	9

				+	-
1	1	a0	2,576224	2,57224	
cos θ	0,49528422	a1	- 6,312672		3,126566828
cos 2θ	- 0,509387082	a2	-0,057875	0,029480777	
cos 3θ	- 0,999866988	a3	- 0,017891		0,017888620
cos 4θ	- 0,481049599	a4	0,000260		0,000125073
cos 5θ	0,523354436	a5	- 0,000119		0,000062279
cos 6θ	0,999467987	a6	0,000008	0,000007996	
cos 7θ	0,466687008	a7	0,000013	0,000006067	
cos 8θ	- 0,537182565	a8	- 0,000011	0,000005909	
cos 9θ	- 0,998803104	a9	0,000003		0,000002300
				2,605724749	3,144645100
				- 3,144645100	
			(7)	δc = - 0°,538920351	

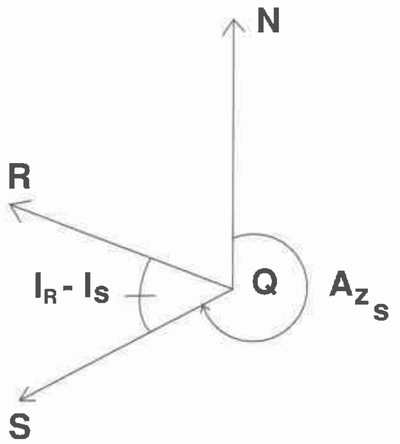


Fig. 6

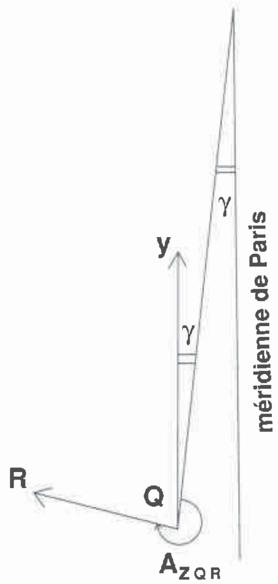


Fig. 7

Pour la bonne compréhension des calculs nous avons répété les coefficients a_0, a_1, a_2, a_q mais ce n'est pas indispensable.

2.22 *Calcul de l'azimut du Soleil par résolution du triangle de position*

Il suffit d'appliquer la formule (2) :

$$\cos A' = \frac{\sin \delta c - \sin \varphi \cos z}{\cos \varphi \sin z}$$

Il y a intérêt à exprimer tous les angles dans le même système d'unité, en degrés par exemple ; une fois obtenu cos A', on calculera A' à la fois en degrés et en grades.

D'après (4) bis : $\varphi = 43°,84395$,
D'après (6) bis : $z = 70°,99605$,
D'après (7) bis : $\delta c = 0°,538920351$

$$\cos A' = \frac{-0{,}009405796 - 0{,}225565511}{0{,}681919314}$$

$\cos A' = -0{,}344573474$
d'où : (8) $A' = 110°,1557612$
ou (8) bis $A' = 122{,}39529$ gr.

Rappelons que l'observation a lieu l'après-midi. On voit sur la figure 1 que :

$Az_s = 400$ gr $- A'$, d'où :
(9) $Az_s = 277{,}60471$ gr.

Pour le repère R on a : $I_R - I_S = 410{,}0075 - 370{,}3230$,
$I_R - I_S = 39{,}6845$ gr.

On en déduit : $Az_{QR} = Az_s + (I_r - I_s)$ (fig 6)
(10) $Az_{QR} = 317{,}28921$ gr.

Table 8 Soleil - septembre 1990

Jour			Date Julienne à 12 h UT	Temps sidéral de Greenwich à 0 h UT			Position du Soleil à 0 h UT					A Paris (UT)					
du mois	de la semaine	de l'année					Ascension droite			Déclinaison		Lever		Passage au méridien		Coucher	
				h	m	s	h	m	s	°	'	h	m	h	m	h	m
18	M	261	8153	23	46	37	11	41	1	2	3	5	32	11	44,9	17	57
19	Me	262	8154	23	50	34	11	44	36	1	40	5	34	11	44,5	17	54
20	J	263	8155	23	54	30	11	48	11	1	17	5	35	11	44,2	17	52
21	V	264	8156	23	58	27	11	51	47	0	53	5	37	11	43,8	17	50
22	S	265	8157	0	2	24	11	55	22	0	30	5	38	11	43,5	17	48
23	D	266	8158	0	6	20	11	58	58	+ 0	7	5	39	11	43,1	17	46
24	L	267	8159	0	10	17	12	2	33	- 0	17	5	41	11	42,8	17	44
25	M	268	8160	0	14	13	12	6	9	0	40	5	42	11	42,4	17	42
26	Me	269	8161	0	18	10	12	9	45	1	3	5	44	11	42,1	17	40
27	J	270	8162	0	22	6	12	13	21	1	27	5	45	11	41,7	17	37

2.23 Calcul du gisement de la direction QR

Pour le point Q situé à l'ouest du méridien de Paris et à $\lambda = 3{,}8510$ gr de celui-ci, la convergence des méridiens vaut :

$\gamma = \lambda \sin \varphi_o = 3{,}8510 \times \sin 49{,}00 \text{ gr} = 2{,}67996$ gr.

d'où le gisement de QR (voir fig. 7)

$$G_{QR} = Az_{QR} + \gamma$$

$$(11)\ G_{QR} = 319{,}96917 \text{ gr.}$$

2.24 Vérification du résultat obtenu. Discussion

Il est tout naturel de vérifier l'ordre de grandeur du résultat obtenu pour δ par la «Connaissance des temps», que nous avons appelé δc, avec la valeur qu'on obtient à partir des «Ephémérides astronomiques»,dont nous donnons ci-dessus l'extrait utile : (table 8).

Le 24 septembre à 0 h UT la déclinaison du Soleil est - 0°17' ; le 25 septembre, malgré l'absence du signe - (ce qui constitue un piège qu'il serait facile d'éviter en répétant partout le signe –) , la déclinaison du Soleil est -0°40', d'où une variation journalière de -23'.

Pour 16 h 07 m UT = 16 h 116667, la déclinaison du Soleil d'après les Ephémérides (indice E) est :
$\delta_E = -0°17' - 0°23' \times 16{,}116667/24 = -0°32'4$
$\delta_E = -0°{,}5400$, alors que par la «Connaissance des temps», nous avons obtenu : $\delta c = -0°{,}538920$. La différence n'est que de 0°,00108, soit 0',065. On a bien 0'065 < 0'5, qui est l'erreur maximale d'arrondissement de la table des déclinaisons des «Ephémérides astronomiques». Il y a donc cohérence des deux résultats obtenus, mais c'est la valeur δc la plus précise qu'il convient de conserver. Le hasard fait que nous sommes ici dans un cas très favorable, où l'erreur qui résulte de l'utilisation de la table des déclinaisons de la polaire des «Ephémérides astronomiques» est particulièrement faible, mais celle-ci aurait pu atteindre : 0',5, avec les mêmes données de départ, pour une autre année par exemple. Il nous faut donc raisonner comme en 2.1 en prenant :
$|\Delta\delta| = 0',5$
Reprenons la formule (3) bis

$$(3)\text{ bis } |\Delta A_1| = \frac{\Delta\delta}{\cos\varphi \sin H}$$

Nous pouvons obtenir H de deux façons :

a) par le calcul en résolvant le triangle de position PZS (fig 1) par la relation des sinus :

$$\frac{\sin H}{\sin z} = \frac{\sin A'}{\sin(90° - \delta)} \text{ , avec :}$$

(6) bis $z = 70°{,}99605$
(7) $\delta = -0°{,}538920$
(8) $A' = 110°{,}1557612$

$$\sin H = \frac{\sin z \times \sin A'}{\cos\delta} = \frac{0{,}887593333}{0{,}99995576}$$

$\sin H = 0{,}88763260$, d'où :
(12) $H = 62°{,}5772514$ ou
(12)bis $H = 4$ h, 171816757 = 4 h 10m,31

b) à partir de l'heure d'observation 16 h 07 m UT. La table 8 nous indique que le 24 septembre le Soleil passe au méridien de Paris à 11 h 42 m 8 ; Dans l'énoncé nous avons précisé la différence de longitude entre le méridien de Paris et le lieu Q, soit 0h,23106 ouest de Paris. Le Soleil passe donc au méridien de Q : 0 h,23106 =13m,86 plus tard, soit à 11 h 42 m 8 + 13 m,86 = 11h56 m,66 (voir fig 9).

L'angle horaire du Soleil est donc :
H' =16 h 07 m - 11 h 56,m 66 = 4 h 10m,34.

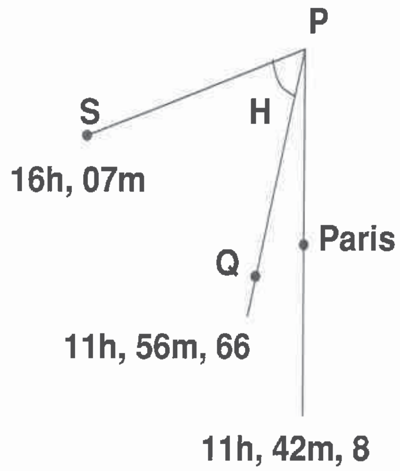


Fig. 8

La différence avec le résultat obtenu à partir de la résolution du triangle de position est H' - H = 3/100 de minute de temps, qui provient de deux causes d'erreur : l'une sur H, quantité qui a été calculée à partir d'une valeur z observée avec une certaine erreur, l'autre sur H' provenant du fait que le temps de passage au méridien de Paris est donnée avec une incertitude maximale d'arrondissement de 1/20 de minute de temps. Mais le faible écart H' - H montre la cohérence des résultats et constitue une vérification indirecte de la valeur A', qui a servi à calculer H.

Dans la formule (3) bis : $|\Delta\delta| = 0',5 = 0{,}5 \times 1{,}852$
$|\Delta\delta| = 0{,}926$ cgr. D'autre part :
$\varphi = 43°{,}84395$ et $H = 62°{,}57725$.
On obtient :

$$(13)\ |\Delta A_1| = \frac{|\Delta\delta|}{0{,}64019}$$

Avec $|\Delta\delta| = 0{,}926$ cgr : $|\Delta A_1| = 1{,}446$ cgr, voisin de 1,5 cgr, que nous avions obtenu en 2.1 avec des valeurs rondes voisines de celles de l'exemple numérique considéré. On a donc par suite de l'imprécision de la table des déclinaisons, une erreur environ 3 fois plus grande que celle que nous nous étions fixés : $|\Delta A_1| < 0{,}5$ cgr.

Nous avons vu d'autre part en 2,1 que si on prend H = 2 h, on a ΔA_1 = 2,6 cgr. Dans l'état actuel des «Ephémérides astronomiques» il ne faut donc pas calculer la déclinaison du Soleil en utilisant la table de cette publication. Or si celle-ci donnait les déclinaisons au dixième de minute sexagésimale les erreurs de 1,5 cgr et 2,6 cgr ci-dessus, prohibitives, deviendraient respectivement :
1,5 mgr et 2,6 mgr. Il ne serait plus nécessaire de recourir à la «Connaissance des temps» pour le seul calcul de la déclinaison.

2.25 Utilisation des tables de L'I.G.N

La relative difficulté d'utilisation de la «Connaissance des temps», publication conçue à l'usage des astronomes et des spécialistes, a amené l'I.G.N à mettre au point un logiciel, qui utilisant aussi les développements en polynômes de Tchebychev permet d'obtenir des «Tables du Soleil» donnant pour tous les jours de l'année et pour : 0h UT, 6h UT, 12 h UT, 18h UT :

a) la quantité désignée par : $E_1 = H - TC$, où H est l'angle horaire du Soleil et TC le temps civil local égal à : $TC = UT \pm \lambda$ en désignant par λ la longitude Est ou Ouest du lieu par rapport au méridien international.

b) d'autre part, la déclinaison δ du Soleil exprimée en degrés décimaux.
Pour E_1 et δ on peut interpoler linéairement.
Voici l'extrait de cette table pour le 24 septembre 1990 :

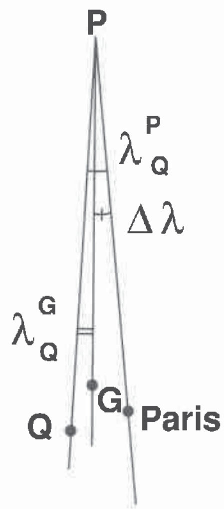


Fig. 9

Greenwich. Or dans l'énoncé la longitude de Q par rapport à Paris est : λ^P_Q= 3°,4659

La différence de longitude entre Paris et Greenwich est : $\Delta\lambda$ = 2°,3372292.

Il en résulte que la longitude de Q par rapport à Greenwich est : $\lambda^G_Q = \lambda^P_Q - \Delta\lambda$

λ^G_Q = 3°,4659 - 2°,3372292

(14) λ^G_Q = 1°,1286708, ouest de Greenwich

ou bien :

(14) bis λ^G_Q = 0 h 07524472, ouest de Greenwich,

d'où :

T_C = 16 h 11666667 - 0 h 07524472

T_C = 16 h 04142195

Il en résulte que : $H_Q = T_c + E_1$

	0hUT		6hUT		12hUT		18hUT	
	E_1	δ	E_1	δ	E_1	δ	E_1	δ
24 sept.	12h,12868	- 0°,2773	12h,13013	- 0°,3743	12h,13158	- 0°,4721	12h,13303	-0°,5695

Pour obtenir δ il suffit d'interpoler entre les valeurs δ 12 h et δ18 h pour l'heure UT :
16 h 07 m = 16 h,1166667, d'où :

$$\delta = - 0°,4721 + \frac{(- 0°5695 - 0°,4721) \times (16 h, 116667 - 12 h)}{6}$$

$$\delta = - 0°,4721 - \frac{0,0974 \times 4,116667}{6} = - 0°,4721 - 0,06683$$

$$\delta = - 0°,53893,$$

valeur que l'on peut comparer avec :
δ_e = – 0°,53892 chiffre arrondi à la 5e décimale, issu de notre calcul à partir des polynômes de Tchebychev.

Pour avoir H il faut d'abord calculer le temps civil local en Q en tenant compte de la différence de longitude du lieu considéré par rapport à

La quantité E_1 est à interpoler entre les valeurs données par la table pour 12 h et 18 h.

$$E_1 = 12,13158 + \frac{(12,13303 - 12,13158) \times 4,1166667}{6}$$

E_1 = 12,13158 + 0,000995 = 12 h,132575, d'où :

H_Q = 16 h,04142195 + 12 h,132575 = 28 h,173997

H_Q = 4 h,173997 = 4 h 10 m 44,

alors qu'en 2.24 b nous avions obtenu :

H' = 4 h 10 m 34.

L'écart est de 1/10 de minute de temps ; mais H' a été obtenu à partir du temps de passage du Soleil au méridien de Paris des «Ephémérides astronomiques», temps donné à la dixième de minute de temps près. H_Q est donc plus précis.

Remarquons que le calcul de H n'est pas nécessaire pour résoudre le problème de l'azimut par la distance zénithale du Soleil. Nous l'avons fait à titre de vérification et à titre d'exemple, si on voulait résoudre le problème d'un azimut au Soleil par l'heure.

Le calcul de δ par la table IGN est particulièrement simple, comparé à la méthode que nous avons utilisée avec les développements en polynômes de Tchebychev de la «Connaissance des temps», où l'argument est le temps des Ephémérides, ce qui introduit une complication supplémentaire. Par contre dans les tables IGN l'argument est le temps universel UT.

Nous verrons aussi la simplicité d'utilisation des tables de l'IGN de la polaire dans le chapitre suivant, consacré au problème de l'azimut par l'heure sur la polaire.

2.26 Précision avec laquelle il suffit de connaître l'instant de l'observation

La mesure de l'instant de l'observation sert uniquement à interpoler la valeur de la déclinaison dans les tables.

La table 8 montre qu'entre le 24 et le 25 septembre la variation de déclinaison est de 23' pour 24 h, soit 23/24 = 0'958 par heure, soit : 0'016 par minute de temps, ce qui donne :
0'016 x 1,852 = 0,0296 cgr ou 2,96 dmgr par minute de temps.

Reprenons la relation (13) : $|\Delta A_1| = \dfrac{|\Delta\delta|}{0,64019}$
et imposons nous la condition :

$|\Delta A_1| < 0,5$ cgr.

Il en résulte que $|\Delta\delta| < 0,5 \times 0,64019$, soit : $|\Delta\delta| < 0,32$ cgr ou encore : $|\Delta\delta| < 32$ dmgr.

Compte tenu d'une variation de 2,96 dmgr par minute de temps, il faut que l'incertitude $|\Delta t|$ sur le temps soit telle que :
$|\Delta t| < 32/2,96$, soit
$|\Delta t| < 10,8$ minutes de temps.
Cette condition permet de justifier le processus opératoire ci-après :

2.27 Les observations sur le terrain

Première série d'observations. On suppose qu'on dispose d'un dispositif approprié permettant de viser le centre du Soleil. On opére successivement cercle à gauche et cercle à droite.

Cercle à gauche (CG). On effectue 3 pointés CG sur le centre de Soleil en distance zénithale et en azimut. On note l'heure du premier pointé :
16 h 04 m. On vise le repère R en azimut : $l^g{}_R$.

Cercle à droite (CD). Aussitôt après on effectue 3 pointés CD sur le centre du Soleil en distance zénithale et en azimut. On note l'heure du dernier pointé : 16 h 10 m. On vise le repère R en azimut : $l^d{}_R$.

Si lg et ld sont les moyennes des lectures azimutales CG et CD, on calcule :

$$ls = \frac{lg + ld}{2} = 370,3230 \text{ gr.}$$

Si zg et zd sont les moyennes de lectures zénithales CG et CD on calcule :

$$z = \frac{zg + zd}{2} = 78,8382 \text{ gr.}$$

On effectue la moyenne $\dfrac{l^g{}_R + l^d{}_R}{2} = 10,0075$ gr et
la moyenne des temps observés :

$$\frac{16 \text{ h } 04 \text{ m} + 16 \text{ h } 10 \text{ m}}{2} = 16 \text{ h } 07 \text{ m}$$

Toutes les valeurs numériques ci-dessus ont servi dans l'exemple numérique précédent, qui concerne donc la première série d'observations, pour laquelle : $Az_{1\,QR} = 317,2892$ gr. On procède à une 2ème série d'observations analogues à la première et on obient :

$$Az_{2QR} = 317,2910 \text{ gr.}$$

On adopte la moyenne : $Az_{QR} = \dfrac{Az_{1QR} + Az_{2QR}}{2}$,

(15) $Az_{QR} = 317,2901$ gr.

3. Problème de l'azimut par la mesure précise de l'heure

Visons un astre quelconque dont nous connaissons par les éphémérides l'ascension droite α et la déclinaison δ. On mesure avec un chronomètre ou une montre-chronomètre, dont on con-

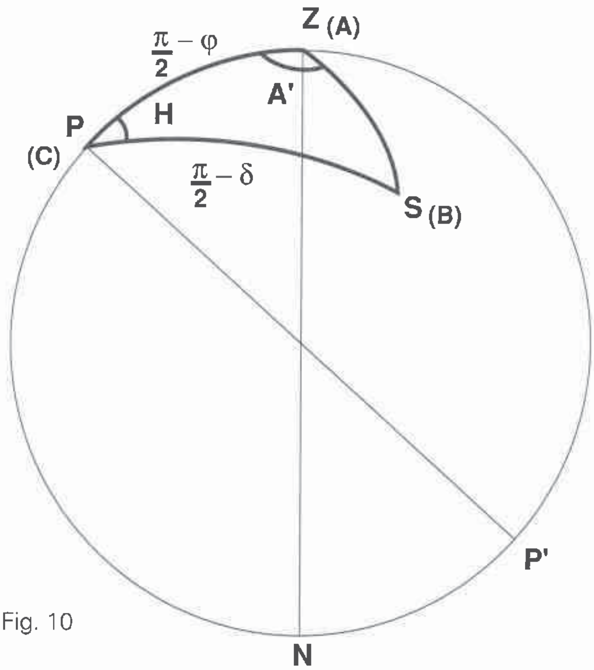


Fig. 10

naît bien «l'état», à un jour J, l'instant précis UT, où on effectue sur l'astre un pointé en azimut seulement. On suppose connues la latitude et la longitude du lieu d'observation Q par rapport au méridien international. Pour calculer l'azimut de l'astre il faut dans un premier temps calculer son angle horaire H à l'instant UT de l'observation.

Calcul de l'angle horaire dans le cas général

Grâce aux tables du Soleil : soit à celles de la «Connaissance des temps» où l'on obtient une grande précision, soit à celles des «Ephémérides astronomiques», on transforme le temps UT en temps sidéral de Greenwich : T_G. Compte tenu de la différence de longitude entre Q et le méridien international, on obtient le temps sidéral local : T_L. D'après la relation fondamentale de l'astronomie : $T_L = H + \alpha$, on en déduit l'angle horaire cherché :

$$H = T_L - \alpha$$

Cas du Soleil.

Il est inutile alors de passer par l'intermédiaire du temps sidéral. On peut utiliser la «Connaissance des Temps» et calculer le temps de passage au méridien international T_i le jour J donné grâce aux coefficients des polynômes de Tchebychev, donnés dans la colonne «T passage» (voir 3° colonne de l'extrait Table 5). Compte tenu de la différence de longitude entre le méridien international et le point Q, on en déduit le temps de passage au méridien de Q : T_Q. La différence entre l'instant UT du pointé sur l'étoile et l'instant de passage T_Q donne l'angle H cherché : $H = UT - T_Q$. On obtient H avec une grande précision.

On peut aussi considérer la longitude de Q par rapport au méridien de Paris comme nous l'avons fait en 2.14, ainsi que le temps de passage du Soleil, le jour J, au méridien de Paris, tel qu'il figure dans les «Ephémérides astronomiques» (voir table 8) : soit T_P cet instant ; compte tenu de la différence de longitude entre Q et le méridien de Paris, on en déduit le temps de passage au méridien de Q : T'_Q peu différent de T_Q, mais moins précis, puisque la table ne donne que les temps de passage au méridien qu'au dixième de minute près. On obtient donc : $H = UT - T'_Q$ avec une précision insuffisante.

Cas de la polaire.

L'éphéméride de la polaire, qui est maintenant dans les «Ephémérides astronomiques» (voir extrait table 13), donne l'ascension droite et la déclinaison de la polaire, au jour J, non pas à 0 h UT, mais pour le passage supérieur de la polaire au méridien international, donc lorsque son angle horaire H est nul. D'après la relation fondamentale de l'astronomie : $T = H + \alpha$, on a donc : $T_0 = \alpha$; il y a identité dans la table entre les valeurs de l'ascension droite de la polaire et le temps sidéral de Greenwich T_0 lorsque la polaire passe au méridien supérieur. Il faut dans un premier temps, comme dans le cas général ci-dessus, passer du temps UT de l'observation au temps sidéral de Greenwich T_G. La différence $\Delta T = T_G - T_0$ donne donc la différence de temps sidéral entre le passage supérieur de la polaire et l'instant de l'observation. Elle nous servira à calculer l'angle horaire de la polaire à l'instant de l'observation, à Greenwich, par la relation (18) ci-après.

Calcul de l'azimut.

La figure 10 relative à un astre quelconque ne convient pas dans le cas de la polaire, car il est important de suggérer que celle-ci, qui sera désignée par U (α Ursae Minoris), est très proche du pôle. On aura intérêt à utiliser la projection stéréographique, où les arcs de grand cercle PU et PZ passant par le pôle sont représentés par des droites et où l'arc de grand cercle UZ qui ne passe par le pôle est représenté par un arc de cercle. Il convient aussi de distinguer le cas où la polaire est à l'Ouest : fig 11 ; son angle horaire est alors compris entre 0 et 180°, et le cas où la polaire est à l'Est : fig 12 ; son angle horaire est alors compris entre180° et 360° *(1)*. Dans le cas de la polaire à l'Ouest l'angle en Z : A' du triangle de position permet le calcul de l'azimut Az par :
Az = 400 gr - A'.

Dans le cas de la polaire à l'Est, l'angle en Z donne directement l'azimut cherché.

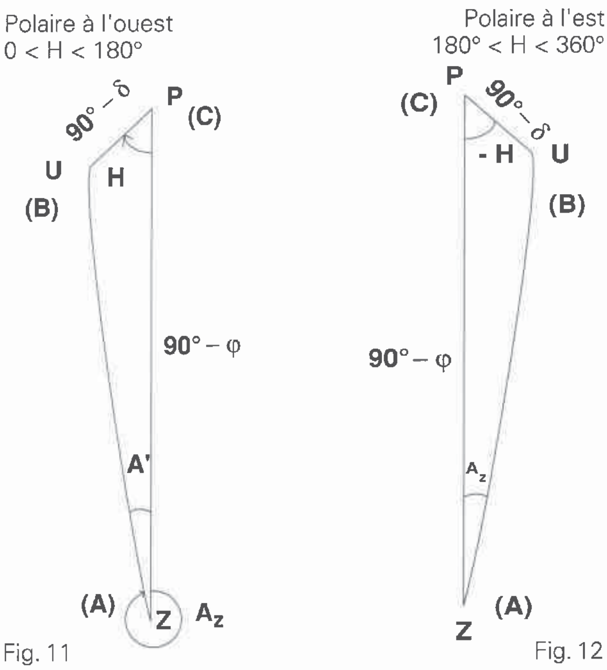


Fig. 11 Fig. 12

(1) Lors de l'observation de la polaire on peut savoir si celle-ci est à l'Est ou à l'Ouest en observant la position de la constellation Cassiopée. Celle-ci et l'étoile polaire sont toujours du même côté du pôle.

Les trois éléments connus :

$$PU = 90° - \delta,$$
$$P = \pm H,$$
$$PZ = 90° - \varphi$$

consécutifs étant adjacents avec l'élément à déterminer : l'angle en Z, il faut appliquer la formule dite en cotangente :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

On place respectivement A en Z, B en U, C en P, d'où :
pour la polaire à l'Ouest :
(16) $\tan \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos H + \sin H \cot A'$,

pour la polaire à l'Est :
(17) $\tan \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos (-H) - \sin H \cot Az$, d'où :

pour la polaire à l'Ouest : $0 < H < 180°$:
(16) bis $\cot A' = \dfrac{\tan \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos H}{\sin H}$

pour la polaire à l'Est : $180° < H < 360°$:
(17) bis $\cot Az = \dfrac{\sin \varphi \cos H - \tan \delta \cos \varphi}{\sin H}$

3.1 Exemple numérique

Soit un lieu Q de latitude $\varphi = 43°,84395$ et de longitude 3°,4659 Ouest du méridien de Paris, lui même situé à $\Delta\lambda = 2,°337229166$ à l'Est du méridien international. Le point Q appartient à la zone Lambert III du système de projection Lambert, pour lequel $\varphi_0 = 49,0000$ gr. En Q on observe la polaire le 20 septembre 1990 à 21 h 30 m 00 s UT. La visée azimutale sur la polaire est : $l_u = 49,8638$ gr; sur le repère R on lit : $l_R = 365,9879$ gr. On demande de calculer l'azimut, puis le gisement de la direction QR.

3.11 Calcul de l'angle horaire H

La table du Soleil des «Ephémérides astronomiques» (extrait table 8) nous permet de calculer le temps sidéral Greenwich TG pour UT = 21 h 50 à partir de la valeur du 20 septembre à 0 h UT : = 23 h, 9083333 temps sidéral de Greenwich. Or on sait que : mesure en temps sidéral = mesure en temps moyen x 1,0027379.

Donc à 21 h,5 de temps moyen correspondent : 21,5 x 1,0027379 = 21 h, 558865 de temps sidéral. On a donc le temps sidéral Greenwich de l'observation :
T_G = 23 h, 9083333 + 21 h, 558865 = 45 h,4671983,
soit : T_G = 21 h,4671983.

On trouvera en bas de page en table 13 un extrait de l'éphéméride de la polaire pour le passage supérieur de celle-ci au méridien international. La table 13 bis est la transformation de la précédente en heures décimales et degrés décimaux.

L'instant de l'observation est séparé de $T_0(20)$ par : $\Delta T = T_G - T_0(20)$.

$$\Delta T = 21\text{ h},4671983 - 2\text{ h},38411111$$
$$\Delta T = 19\text{ h},0830872$$

L'angle horaire de la polaire a augmenté de 24 h en ΔT_0 = 24 h, 00033611 ; pendant l'intervalle de temps ΔT, l'angle horaire de la polaire est passé de la valeur 0 à la valeur :
(18) $H_G = \dfrac{\Delta T \times 24}{\Delta T_0}$, soit :

(18) bis $H_G = \dfrac{19,0830872 \times 24}{24,00033611}$
H_G = 19 h,0828199 = 286°,2422993

Telle est en (18) bis la valeur de l'angle horaire de la polaire à Greenwich (indice G) à l'instant de l'observation.

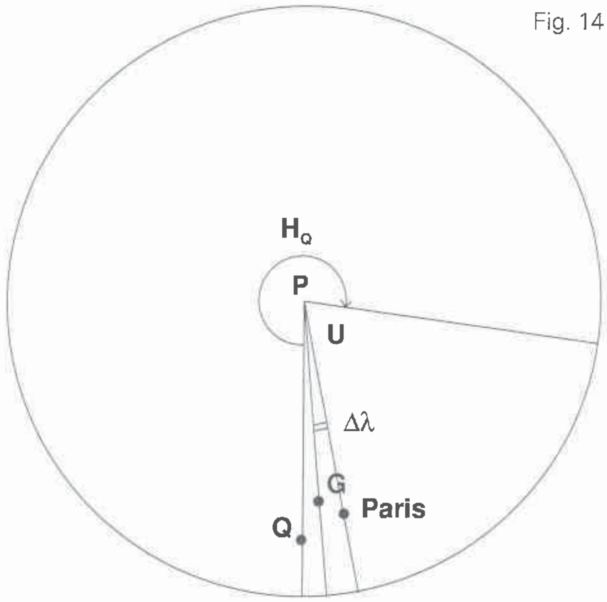


Fig. 14

Mais il nous faut calculer l'angle horaire de la polaire en Q. La fig 14 représente une projection stéréographique polaire de la sphère céleste, où Q, G, Paris désignent les zéniths de Q, de Greenwich et de Paris. Pour calculer la longitude de Q par rapport à Greenwich il faut procéder comme en 2.15.

Table 13

20 sept 1990	$T_0(20) = \alpha$ = 2 h 22 m 62 s 80	δ = 89°,13'18",02
21 sept 1991	$T_0(21) = \alpha$ = 2 h 22 m 64 s,01	δ = 89° 13'18",28

Table 13 bis

20 sept 1990	$T_0(20) = \alpha$ = 2 h,38411111	δ = 89°,2216722
21 sept 1990	$T_0(21) = \alpha$ = 2 h,38444722	δ = 89°,2217444
	ΔT_0 = 24 h, 00033611	$\Delta\delta$ = 0,0000722

$\lambda^G_Q = \lambda^P_Q - \Delta\lambda$

$\lambda^G_Q = 3°,4659 - 2°,337229166$, d'où :

(14) $\lambda^G_Q = 1°,1286708$ ouest Greenwich,

(14) bis $\lambda^G_Q = 0$ h 07524472 ouest Greenwich, de sorte que l'angle horaire de la polaire en Q s'obtient par (voir fig 14) :
$H_Q = H_G - \lambda^G_Q = 286°,2422993 - 1°,1286708$

(19) $H_Q = 285°,1136285$

Comme H_Q est compris entre 180° et 360° la polaire se trouve à l'Est, cas de la fig 12.

3.12 Calcul de la déclinaison δ

On a de même :

$$\delta = 89°2216722 + \frac{0,0000722 \times 19,0830872}{24,00033611}$$

$$(20)\ \delta = 89°2217296$$

3.13 Utilisation des tables de la polaire I.G.N

On simplifie sensiblement les calculs en utilisant les tables de la polaire de l'IGN qui donnent essentiellement pour chaque jour, à 0 h UT l'angle horaire Greenwich H_G de la polaire et sa déclinaison δ. La table donne en outre la variation d H_G de l'angle horaire par heure UT et la variation dδ de δ, par heure UT aussi.

Voir l'extrait de la table pour la nuit du 20 au 21 septembre :

3.14 Calcul de l'azimut de la polaire

La polaire étant à l'Est, il convient d'utiliser la formule (11) bis

$$(11)\ \text{bis}\ \cot Az = \frac{\sin\varphi \cos H_Q - \tan\delta \cos\varphi}{\sin H_Q}$$

Nous prendrons les valeurs obtenues en 3.11 et 3.12 :
$\varphi = 43°,84395$

$H_Q = 285°,1136285$

$\delta = 89°,2217296$, d'où

$$\cot Az = \frac{0,180609662 - 53,09316853}{-0,965410639} = 54,80834448$$

$$\tan Az = 0,018245396$$

$$(21) Az = 1,161409 \text{ gr} \approx 1,1614 \text{ gr}$$

$l_R - lu = 365,9879 - 49,8638 = 316,1241$ gr

$Az_{QR} = Az + (l_R - lu)$, voir fig. 15

(22) $Az_{QR} = 317, 2855$ gr.

Rappelons que par la distance zénithale du Soleil, nous avions obtenu pour la moyenne des deux séries d'observation :
(15) $Az_{QR} = 317,2901$ gr.

Comme en 2.13 la convergence des méridiens est :
$\gamma : \lambda^P_Q \sin\varphi_0 = 3°,4659 \times \sin 49,0000$ gr ou

$\gamma = 3,8510$ gr $\times$ 0,6959128

$\gamma = 2,67996$ gr

20 sept	0 h UT H_G = 21 h,52443	d H_G = 1h,002724 par heure UT	δ = 89°,22173	dδ = 30° x 10^{-7} par heure UT
21 sept	0 h UT H_G = 21 h 58980	dH_G = 1 h 002723 par heure UT	δ = 89°,22180	dδ = 31° x 10^{-7} par heure UT

En fait la 2ème ligne du 21 septembre n'est pas indispensable ; elle permet toutefois de vérifier par interpolation les résultats obtenus en utilisant les dH_G et dδ.

a) L'angle horaire de la polaire à Greenwich à 21 h 30 m est donc :

H_G = 21 h,52443 + 1,002724 x 21,5

H_G = 21 h,52443 + 21 h, 558566 = 43 h,082996

H_G = 19 h, 082996 au lieu de 19 h, 082820 par la formule (18) bis.

b) La déclinaison s'obtient par :

$\delta = 89°22173 + 30 \times 10^{-7} \times 21,5$

$\delta = 89°,22173 + 6,45 \times 10^{-5}$

δ = 89°,221795 au lieu de 89°,22173 à partir de la table des «Ephémérides astronomiques» relative à la polaire.

Fig. 15

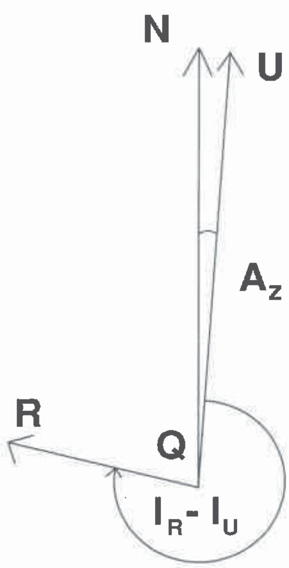
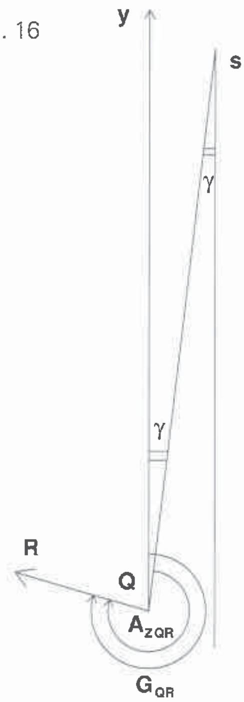


Fig. 16



Le gisement de la direction QR est donc (voir fig16) :
$G_{QR} = \gamma + Az_{QR} = 2,67996 \text{ gr} + 317,2855 \text{ gr}$

(23) $G_{QR} = 319,96546$ gr.

3.2 Précision de l'azimut à la polaire

Différentions la formule (17)par rapport à H et à Az ; on obtient :

$$0 = - \sin\varphi \sin H\, dH - \cos H \cot Az\, dH + \sin H \frac{dAz}{\sin^2 Az}$$

$$\frac{\sin H}{\sin^2 Az}\, d\,Az = (\sin\varphi \sin H + \cos H \cot Az)\, dH$$

(24) $dAz/dH = \sin\varphi \sin^2 Az + \cot H \cos Az \sin Az$.

Supposons qu'avec une bonne montre à chronomètre, dont on a déterminé «l'état» en écoutant l'horloge parlante, on ait déterminé l'instant du pointé sur la polaire avec une incertitude de 2 secondes ; comme la table des «Ephémérides astronomiques» donne le temps sidéral Greenwich à la seconde, l'erreur d'arrondissement de cette table est au maximum de 1/2 seconde ; supposons enfin que la longitude soit connue avec une incertitude de 1/2 seconde de temps.

L'incertitude totale sur H est :
$|\Delta H| = 2 + 1/2 + 1/2 = 3$ secondes, soit $3 \times 15 = 45''$ ou encore $|\Delta H| = 45 \times 3,086 = 139$ dmgr.

En remplaçant les différentielles par des incertitudes dans la formule (24), en faisant :
$\varphi = 43,°84395 = 48,7155$ gr.

$Az = 1,1614$ gr,
$H_Q = 285°,11363 = 316,7929$ gr
et $|\Delta H| = 139$ dmgr, on obtient :
$|\Delta Az|^{dmgr} = 139\,(2,305 \times 10^{-4} - 4,925 \times 10^{-3})$, soit :
(25) $|\Delta Az| = 0,65$ dmgr.

On a donc une excellente précision, mais celle-ci est dûe au fait que la polaire ne se trouve pas loin de sa digression maximale orientale, pour laquelle l'angle à l'astre vaut 90° et l'angle horaire est voisin de 270°. Or H_Q= 285°,11363 n'est pas très éloigné de 270°. Dans ces conditions l'azimut varie peu en fonction de l'angle horaire.

On sait qu'à la digression maximale même, lorsque la polaire est en Um (angle à l'astre égal à 90°), elle décrit pendant plusieurs minutes le fil vertical du réticule : voir figures 17 et 18. Il en serait tout autrement si la polaire se trouvait au voisinage du méridien. Dans ce cas le calcul montre que pour une erreur sur H de 3 secondes de temps, l'erreur sur l'azimut est de 2,65 dmgr à la latitude 43,°84, donc quatre fois plus grande que dans l'exemple traité.

3.3 Polaire à sa digression maximale (ici digression orientale)

Si on le peut, la meilleure solution est de choisir pour l'observation l'instant où la polaire est à sa digression maximale et où elle parcourt pendant quelques minutes le fil vertical du réticule du théodolite : on peut alors calculer l'angle horaire Hm correspondant à cet instant. Dans le triangle de position rectangle en Um on a :
$\overset{\frown}{ZP} = 90° - \varphi$, $\overset{\frown}{PUm} = 90° - \delta m$, en désignant par δm la valeur de la déclinaison à l'instant de la digression maximale ; l'angle en P, égal à -Hm s'obtient par la règle de Néper :

$\cos(-Hm) = \cot(90° - \varphi) \tan(90° - \delta m)$, ou :

(26) $\cos(-Hm) = \tan\varphi \cot\delta m$

Supposons que nous voulions viser la polaire à sa digression maximale orientale dans la nuit du 20 au 21 septembre. D'après la table 13 bis la valeur de la déclinaison au passage de la polaire au méridien supérieur de Greenwich est le 20 septembre : $\delta_{20} = 89°,2216722$ et la variation de déclinaison en environ 24 h est 0°,0000722. On aura une précision suffisante en écrivant :

P.S. = passage supérieur

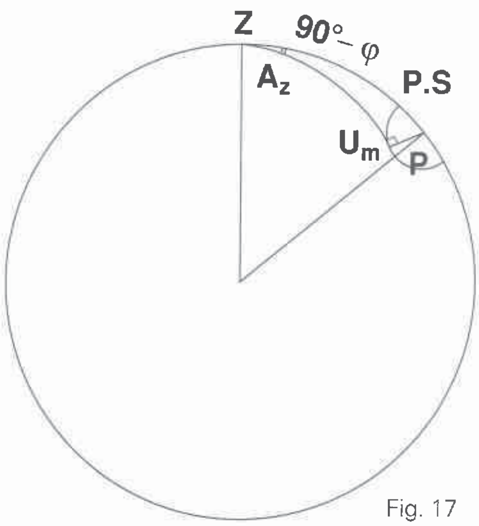


Fig. 17

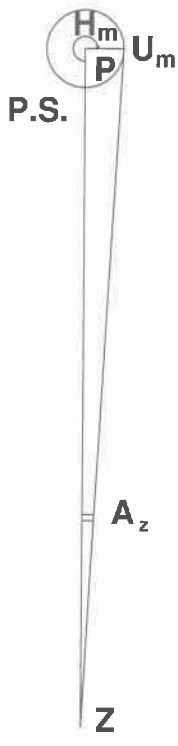


Fig. 18

$\delta m = \delta_{20} + 3/4\ (\delta_{21} - \delta_{20}) = 89°,221672 + 3/4 \times 7 \times 10^{-5°}$, soit $\delta m = 89°,221724$.

Avec $\varphi = 43°,84395$ et $\delta m = 89°221726$, la formule (26) donne :
cos (-Hm) = 0,0130468 d'où :
- Hm = 89°,25245, et :
(27) Hm = 270°,74755

On en déduit l'angle horaire de la polaire à Greenwich lors de la digression maximale :

$H^G{}_m = H_m + \lambda^G{}_Q = 270°,74755 + 1°,12867$

$H^G{}_m = 271°,87622 = 18$ h, 12508133

Le temps sidéral Greenwich correspondant est donc à la digression maximale :

$$T_G = H^G{}_m + \alpha m$$

où αm est la valeur de l'ascension droite à la digression maximale ; comme pour la déclinaison on aura une précison suffisante en écrivant :

$\alpha m = \alpha_{20} + 3/4\ (\alpha_{21} - \alpha_{20})$, où α_{20} et α_{21} sont données par la table (13) bis. On obtient :

$\alpha m = 2$ h,3841111 + 3/4 x 0,00033611 = 2h,38436318

on a donc : T_G = 18 h,12508133 +2 h,38436318
T_G = 20 h,50944451 ou 44 h,50944451

Or le 20 septembre à 23 h 54 m 30 s, soit : 23 h, 90833333 temps sidéral Greenwich, il est d'après la table 8 : 0 h UT. L'instant de la digression maximale a donc lieu à :
44 h, 50944451 - 23 h,90833333,
soit : 20 h, 60111118 après 0 h UT, mais ces 20 h,60111118 de temps sidéral correspondent à :

20,60111118 x 0,9972696 = 20 h, 5448619 de temps UT.
L'instant de la digression maximale est donc :

20 h,5448619 = 20 h 32 m 42 s UT.

Cette heure convient puisque d'après la table 8 le coucher du Soleil le 20 septembre à Paris est à : 17 h 52 m ; l'heure du coucher du Soleil en Q est proche de celle de Paris.

Pour calculer l'azimut de la polaire à sa digression maximale orientale il y a deux solutions :

a) utiliser la formule (17) bis, où φ : 43°,84395 et $\delta = \delta m = 89°,221726$

$$\cot Az = \frac{0{,}00903750 - 53{,}0931958}{-0{,}99991489} = 53{,}088677,$$

d'où tan Az = 0,018836408 et :

(28) Az_1 = 1,19902 gr.

b) résoudre directement le triangle sphérique rectangle ZPUm par la relation de Néper :

$\sin (90° - \delta) = \sin Az. \sin (90° - \varphi)$, d'où :

$$\sin Az = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = \frac{0{,}013583}{0{,}7212291} = 0{,}01883313, \text{ qui}$$

donne :
(29) Az_2 = 1,19902 gr, identique à Az_1 (relation 28)

Autres cas favorables

Si on ne peut observer la polaire à l'une de ses digressions maximales, il faut choisir l'instant de l'observation de manière que la polaire soit suffisamment éloignée du méridien. On pourra prendre :

30° < H < 150° lorsque la polaire est à l'Ouest,

210° < H < 330° lorsque la polaire est à l'Est.

Ainsi la méthode de l'azimut à la polaire par l'heure, même sans matériel de réception de signaux horaires, avec seulement une bonne montre-chronomètre, dont on a déterminé «l'état», permet d'obtenir une erreur de l'ordre du décimilligrade seulement : ΔAz = 0,65 dmgr dans le cas de l'exemple numérique 3.1 résultat (25).

La seule contrainte de l'azimut à la polaire par l'heure est le fait qu'il faut éclairer le repère R d'une part et qu'il faut disposer d'un système d'éclairage du théodolite d'autre part.

Remarquons que nous avons obtenu une grande précision en nous servant de tables toutes contenues dans les «Ephémérides astronomiques», alors que paradoxalement pour résoudre le problème de moyenne précision par la distance zénithale du Soleil et pour obtenir une erreur de l'ordre du centigrade, donc environ 100 fois plus élevée que celle de l'azimut à la polaire, il nous faut dans l'état actuel des «Ephémérides astronomiques» recourir à la «Connaissance des temps».

4 - Azimut par l'heure au Soleil

Nous nous contenterons d'en exposer le principe.

Soit UT le temps d'observation du Soleil déterminé comme pour la polaire avec le maximum de précision. On effectue sur le Soleil une lecture azimutale Ls et sur un repère terrestre R la lecture azimutale L_R.

Comme on l'a fait en 3.11 on calcule le temps sidéral Greenwich T_G correspondant à l'heure UT ; on en déduit le temps sidéral local. Si on est en un lieu Q on a :
$T_Q = T_G \pm \lambda_Q$, λ_Q étant la longitude de Q par rapport au méridien international.

On interpole ensuite la valeur de l'ascension droite du Soleil α pour l'instant de l'observation dans les tables du Soleil des «Ephémérides astronomiques» - voir un modèle de ces tables en T8.

On en déduit : $H_Q = T_Q - \alpha$, d'après la relation fondamentale : $T = H + \alpha$. Selon que le Soleil est à l'ouest (après-midi) ou à l'Est (matin) on applique l'une des formules (16) bis ou (17) bis pour calculer son Azimut, d'où on déduit celui du repère.

Quel est l'instant favorable d'observation ?

Reprenons la formule (24) :

$$\frac{dA_z}{dH} = \sin \varphi \sin^2 Az + \cot H \cos Az \sin Az.$$

Le 2ème terme du 2ème membre incite à viser le Soleil de telle façon que cot H soit aussi faible que possible, donc que H soit aussi grand que possible. On pense alors à viser le Soleil près de son lever ou de son coucher. Mais alors le 1er terme du 2ème membre de la formule (24) peut atteindre une valeur importante puisque Az croit avec H. On évitera donc à la fois de viser le Soleil près de son passage au méridien, et de le viser près de son lever ou de son coucher.

5 - Conclusion.

Nous avons vu que pour l'azimut à la polaire les différentes tables des «Ephémérides astronomiques» permettent de résoudre le problème avec toute la précision souhaitable alors qu'il n'en est pas de même pour le problème de l'azimut par la distance zénithale du Soleil.

La maquette du présent article a été présentée au Bureau des Longitudes, auquel nous avons demandé si la table des déclinaisons des «Ephémérides astronomiques» ne pourrait pas être éditée avec une décimale de plus, c'est-à-dire au dixième de minute sexagésimale. Les «Ephémérides astronomiques de 1991» étant déjà très avancées au point de vue réalisation, ce ne sera pas possible pour l'année prochaine, mais le Bureau des Longitudes envisage de donner une suite favorable à notre demande pour 1992. A partir de cette année-là, il suffira donc de disposer des seules «Ephémérides astronomiques» pour résoudre les deux problèmes de l'azimut par la distance zénithale du Soleil et de l'azimut par l'heure à la polaire. La résolution du deuxième problème s'effectuera selon le processus indiqué au chapitre 3 ci-dessus. Pour la résolution du problème de l'azimut par la distance zénithale du Soleil, traitée au chapitre 2, il deviendra inutile de calculer la déclinaison par les développements en polynômes de Tchebychev de la «Connaissance des Temps» ; il suffira de procéder comme nous l'avons fait en 2.24 en utilisant la table des déclinaisons du Soleil, qui comportera une décimale de plus, opération que nous avons faite pour vérifier simplement le résultat obtenu à partir des développements en polynômes de Tchebychev.

Nous avons fait remarquer la simplicité d'utilisation des tables du Soleil et de tables de la polaire établies par l'I.G.N, mais destinées aux besoins internes de cet établissement. Il serait souhaitable que ces tables puissent être mises à la disposition des usagers, notamment des géomètres et des topographes. Cela pose un certain nombre de problèmes, en particulier de copyright ; la question est à l'étude.