Le nombre d'or et la divine proportion

■ Raymond D'HOLLANDER

Le nombre d'or des mathématiciens, utilisé dès l'Antiquité, suscite encore de nos jours des recherches par suite de son caractère divinatoire et métaphysique que nous n'aborderons pas ; nous nous limiterons à la géométrie du nombre d'or, car on peut découvrir par des tracés géométriques, les différentes particularités de ce nombre.

■ mots clés
Nombre d'or, divine proportion, moyenne et extrême raison, rectangle d'or, pentagone, décagone, Fibonacci, Mesures anciennes.

Le nombre d'or

Le nombre d'or résulte du rapport de deux quantités a et b telles que :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \qquad (1)$$

formulation donnée déjà par Vitruve, architecte romain du 1er siècle avant J.C.
Posons a/b = n.
On obtient $n = 1 + 1/n$ et $n^2 - n - 1 = 0$, équation du second degré dans laquelle le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$.
L'équation a deux racines : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Le nombre d'or est celui qui est égal à la racine positive. Nous le désignerons par n : $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$ (2)

Retenons les relations corollaires :
$n - 1 = 1/n$ et $1 + n = n^2$

Le rectangle d'or

On appelle rectangle d'or, le rectangle qui est tel que le rapport de sa longueur à sa largeur soit égal au nombre d'or.

■ Première construction du rectangle d'or (figure 1)

Considérons le carré ABCD de côté a que l'on prendra pour unité. Soit I le milieu de CD. Joignons IB et traçons l'arc de cercle de centre I et de rayon IB. Ce cercle coupe le prolongement de CD en F. Soit E le sommet du rectangle dont les trois autres sommets sont A, C et F. Nous allons montrer que le rectangle AECF est un rectangle d'or :
Évaluons le rapport $\frac{CF}{AC} = \frac{CI + IF}{a}$

$$IF = IB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \text{ d'où}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{a} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{1}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

Le rapport de la longueur du rectangle à sa largeur est le nombre d'or. Le rectangle AECF est bien un rectangle d'or. Montrons que le rectangle BEDF est aussi un rectangle d'or. En effet, ses côtés BD et DF sont tels que ;

$$\frac{BD}{DF} = \frac{a}{IF-ID} = \frac{a}{IB-ID} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ soit } \frac{BD}{DF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (4)$$

Ainsi, la construction de la figure 1, permet d'obtenir les 2 rectangles d'or AECF et BEDF.

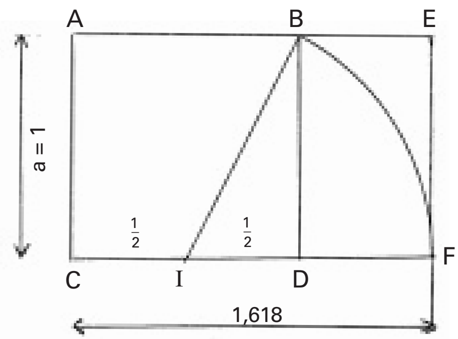

figure 1

Partage d'un segment en moyenne et extrême raison ; divine proportion.
Des relations (3) et (4), on déduit :

$$\frac{CF}{AC} = \frac{BD}{DF} \qquad (5)$$

Dans cette relation, remplaçons AC par CD qui lui est égal, et BD par CD qui lui est aussi égal. On obtient :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CD}{DF} \text{ ou } \frac{CD}{DF} = \frac{CF}{CD} \text{ du type } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

qui correspond à la définition initiale. La relation

$$\frac{CD}{CF} = \frac{DF}{CD} \qquad (6)$$

s'exprime par :
Le point D divise le segment de droite CF en moyenne et extrême raison.

Propriété du nombre d'or :
Vérifions que : $n - 1 = 1/n$, c'est-à-dire :

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ou que } \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

On a bien $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$

Vérifions aussi que : $1 + n = n^2$, c'est-à-dire :

$$1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \text{ ou que}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

On retrouve donc bien les 2 relations de l'introduction :
$n - 1 = 1/n$ et $1 + n = n^2$
Le nombre d'or a donc les particularités suivantes :
- En soustrayant 1 au nombre d'or, on obtient son inverse,
- En ajoutant 1 au nombre d'or, on obtient son carré.

Dimensions des deux rectangles d'or :
Supposons que la largeur du premier rectangle d'or soit AC = BD = 1. On a montré (voir relation 3) que sa longueur CF était telle que :

$$\frac{CF}{AC} = n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ soit } CF = n = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$$

Pour le deuxième rectangle d'or, la longueur est BD = a = 1. On a montré que ■■■

sa largeur DF était telle que :
$\frac{BD}{DF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (relation 4), donc

$DF = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618...$

nombre qu'on peut obtenir aussi par :
DF = CF - CD = 1,618... - 1 = 0,618...

Deuxième construction du rectangle d'or (figure 2)

Construisons à gauche de la figure 2 le triangle rectangle familier de côtés : BC = 3, CA = 4, l'hypoténuse étant AB = 5. Traçons l'arc de cercle de centre B et de rayon BA. Il coupe BC prolongé en I, d'où :
BI = BA = 5 , donc CI = BI - BC = 5 - 3 = 2.
Joignons IA et traçons le cercle de centre I et de rayon IA coupant BC prolongé en F. Construisons le point E, quatrième sommet du rectangle ayant pour autres sommets A, C et F, et montrons que le rectangle AECF est un rectangle d'or.
Évaluons le rayon IA du cercle qui a permis de construire F sur BC :
$IA = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
donc $IF = IA = 2\sqrt{5}$
Il en résulte que : $CF = 2 + 2\sqrt{5} = 2(1+\sqrt{5})$
Or AC = 4. Le rapport
$\frac{CF}{CA} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est le nombre d'or

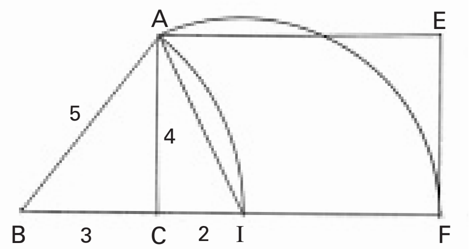

figure 2

Le rectangle AECF est bien un rectangle d'or.

Pentagone régulier

Première construction du pentagone régulier (figure 3)

Considérons la direction xy et sur celle-ci, le segment CF sur lequel nous considérons le point D divisant CF en moyenne et extrême raison :
On a donc $\frac{CD}{DF} = \frac{CF}{CD}$
Si CD = 1, on sait que $DF = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618...$

et que $CF = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$

Traçons les cercles de centre C et de rayons CD et CF ; soit I le point du cercle de rayon CF situé sur la perpendiculaire en C à xy : $CI = CF = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Considérons la médiatrice de IC passant par le milieu M de IC. Cette médiatrice coupe le cercle de centre C et de rayon CD en 2 points L et L'. On a donc : IL = CL = 1 et $IM = CI/2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Il résulte que l'angle $\alpha = \widehat{MLI}$ est tel que

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 0{,}809...$

Or sin 54° = 0,809...
Retenons $\sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (7)

Montrons que l'angle $\widehat{ILC}$ est celui du pentagone régulier. En effet, la somme des angles du pentagone est
$(5 - 2)\,\pi = 3 \times 180° = 540°$
Or $\widehat{ILC} = 2 \times 54° = 108°$ est bien le cinquième de 540° Joignons CL' rencontrant le cercle de centre C et de rayon CF en J. Montrons que IJ = 1 est un côté du pentagone régulier. L' partage le segment CJ en moyenne et extrême raison, donc :
$CL' = 1$; $L'J = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $CJ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$

Comme l'angle $\widehat{ICJ} = 36°$, on a :
IJ = 2 CJ sin 18°
On vérifie que IJ = 2 x 1,618... x 0,309... = 1
D'autre part $\widehat{LIJ} = \widehat{LIC} + \widehat{CIJ} = 36° + 72° = 108°$. Donc IJ est un côté du pentagone régulier. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de J sur LL' prolongé. Construisons le symétrique K de J par rapport à H et montrons que JK = 1. Pour cela, montrons que HJ = 1/2

$HJ = L'J \sin 54° = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} =$

$\frac{5-1}{8} = \frac{1}{2}$ c.q.f.d.

Le point K est symétrique de L par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{ICJ}$ de sorte qu'il se trouve sur le cercle de centre C et de rayon CI = 1 , d'où KC = 1. La figure CLIJK obtenue est bien un pentagone régulier.

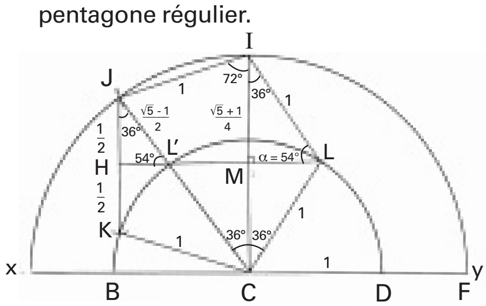

figure 3

Deuxième construction du pentagone régulier (figure 4)

Considérons le segment AB sur lequel I partage ce segment en moyenne et extrême raison.
Si IA = 1 , $IB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618...$

Considérons le cercle de centre I et de rayon IA = IC qui rencontre la perpendiculaire en I à AB, aux points D et M. Ce cercle est le cercle circonscrit au pentagone régulier comme on le verra ci-après.
Joignons DB. On a :

$DB^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} =$

$1 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 3 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 3 - n$

où n est le nombre d'or : 3 - n = 3 - 1,618... = 1,382... Ainsi $DB = \sqrt{3-n}$ (8)
ou DB = 1,1756...
Montrons que DB a pour longueur celle du côté GD du pentagone régulier
GD = 2 sin 36° = 1,1756...
On a donc bien : DB = GD, côté du pentagone régulier. On obtient un premier point du pentagone en traçant un cercle de centre D et de rayon DB, coupant le cercle de centre I et de rayon IA en F. Le côté DF est un côté du pentagone régulier.
Montrons que $\widehat{IDF} = 54°$, moitié de l'angle du pentagone régulier, égal à 108°
Comme $\widehat{DIF} = 360° / 5 = 72°$, $\widehat{BIF} = 18°$.

L'angle au centre $\widehat{FIM} = 90° + 18° = 108°$.

Il en résulte que l'angle inscrit $\widehat{IDF}$, qui intercepte le même arc $\widehat{MF}$, vaut la moitié de l'angle au centre correspondant : $\widehat{IDF} = 108° / 2 = 54°$.
Dès lors, il suffit de construire le point G, symétrique de F par rapport à DM, pour obtenir un troisième point du pentagone ; le côté GD est le deuxième côté du pentagone.
Traçons l'élément de cercle de centre G et de rayon GD qui rencontre en H le cercle de centre I et de rayon IA. H est le quatrième point du pentagone. Le cinquième point J peut se construire de même en considérant un arc de cercle de centre F et de rayon, coupant le cercle en J, symétrique de H par rapport à DM.
On retiendra qu'en fonction du nombre d'or n, le côté du pentagone régulier vaut :
$S_5 = DB = DF$, d'où : $S_5 = \sqrt{3-n}$ (9)
Si on veut exprimer la longueur du côté du pentagone régulier en fonction du rayon R du cercle circonscrit R = ID, on

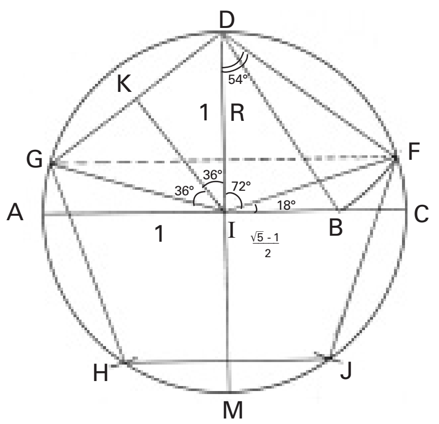

figure 4

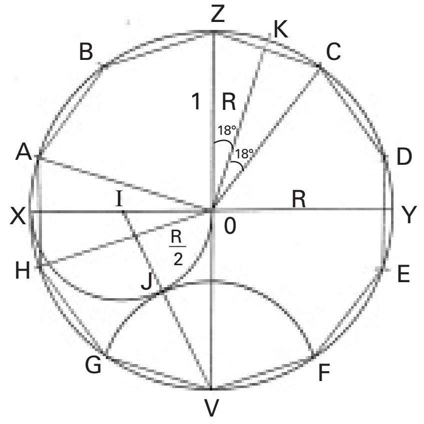

figure 5

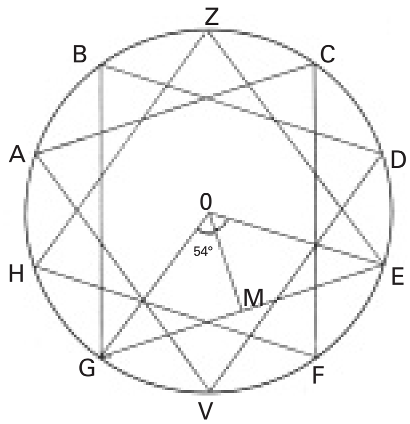

figure 6

écrit que :

$S_5 = GD = 2R \sin 36°$ (10)

$S_5 = 1{,}1756...\ R$ (11)

On pourra se reporter à notre ouvrage "Sciences géographiques dans l'Antiquité", pages 232 et 233, pour voir comment Euclide, vers 320 avant J.C., a résolu le problème de la division d'un segment en moyenne et extrême raison, comment il a résolu géométriquement une des premières équations du second degré de l'Antiquité. Nous y montrons aussi qu'on peut exprimer la valeur du côté du pentagone régulier S_5 par :

$S_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (12)

Le calcul de cette quantité donne aussi :

$S_5 = 1{,}1756...\ R$

Apothème du pentagone régulier

Restons à la figure 4 et considérons le point K milieu de GD. IK est l'apothème du pentagone régulier. Son expression est : $IK = R \cos 36° = 0{,}809...\ R = 1{,}618\ R / 2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{R}{2}$

Si on fait R = 1, l'apothème du pentagone régulier est égale à la moitié du nombre d'or : $IK = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{R}{2}$ (13)

Décagone régulier

On peut construire un décagone régulier à partir d'un pentagone régulier en intercalant 5 points nouveaux aux milieux des arcs du pentagone régulier, mais la construction ci-après nous permet d'effectuer la construction directe d'un décagone régulier.

■ Construction directe du décagone régulier : (figure 5)

Considérons le diamètre XY d'un cercle de centre 0 et de rayon R. La médiatrice de XY rencontre le cercle aux points Z et V. Considérons le milieu I de XO ; IO = R/2. Joignons IV. On a :

$$IV = \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = R\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Traçons le cercle de centre I et de rayon IO = R/2 qui rencontre IV en J. On a :

$$VJ = IV - IJ = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

soit VJ = R x 0,618

Montrons qu'il s'agit de la longueur du côté du décagone régulier. Supposons construit ce décagone ABZCDEFVGH. Dans le triangle ZOC, l'angle au centre vaut 360° / 10 = 36° ; traçons sa bissectrice OK. Il est clair que le côté du décagone régulier : $ZC = 2\ ZK = 2\ R \sin 18° = R \times 0{,}618 = R(\sqrt{5}-1)/2$

$VJ = R(\sqrt{5}-1)/2$ est donc bien la longueur du côté du décagone régulier. On aura les 2 premiers points F et G du décagone en traçant le cercle de centre V et de rayon VJ et en prenant ses intersections avec le cercle de diamètre XY. Les points F et G étant construits, il n'y a aucune difficulté pour construire les autres points du décagone. Par exemple E s'obtient à partir de F en traçant un arc de cercle de centre F et de rayon $FV = VJ = R(\sqrt{5}-1)/2$ et ainsi de suite, on obtient les autres points DCZBAH.

Retenons que $S_{10} = R(\sqrt{5}-1)/2$ (14)

où S_{10} est le côté du décagone régulier.

ou $S_{10} = R\ (n - 1) = R / n$, n étant le nombre d'or.

Décagone étoilé (figure 6)

La figure 6 représente le décagone étoilé où chaque côté joint deux points du décagone régulier séparés par 3 arcs d'amplitude 36°. Considérons le côté GE et son milieu M.

$\widehat{GOE} = 3 \times 36°$ et $\widehat{GOM} = \widehat{GOE}/2$, soit $\widehat{GOM} = 54°$

On a donc $S'_{10} = GE = 2\ R \sin 54° = 1{,}618\ R$

$S'_{10} = R(\sqrt{5}+1)/2$ (15)

La longueur S'_{10} du côté du décagone étoilé s'exprime donc simplement en fonction du nombre d'or n par $S'_{10} = R\,n$

On remarque que le quotient $S'_{10} / S_{10} = n / n - 1$, où n est le nombre d'or.

Comme $n - 1 = 1 / n$, on a aussi :

$S'_{10} / S_{10} = n^2$ (16)

Faisons le produit :

$S_{10} \times S'_{10} = R\,n \times R / n = R^2$ (17)

Faisons la différence :

$S'_{10} - S_{10} = R\,n - R\,(n - 1) = R$ (18)

Dans notre ouvrage "Sciences géographiques dans l'Antiquité", nous avons montré directement les relations (17) et (18) qui nous ont permis de calculer S_{10} et S'_{10}, ce problème étant celui du calcul de deux quantités S_{10} et S'_{10} dont on connaît le produit et la différence.

Pentagone étoilé (figure 7)

La figure 7 représente un pentagone étoilé obtenu en joignant des points du décagone régulier séparés par quatre arcs d'angle au centre 360°/10 soit 36°.

On a donc $\widehat{AOD} = 4 \times 36° = 144°$

et si N est le milieu de AD ; $\widehat{AON} = 72°$

$AD = 2\ AN = 2\ R \sin 72°$

$S'_5 = 2\ R \sin 72°$ (19)

expression où S'_5 désigne la longueur du côté du pentagone étoilé.

On a aussi $S'_5 = 1{,}9021\ R$

Dans notre ouvrage "Sciences géographiques dans l'Antiquité", nous avons montré que :

$S'_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (20)

Si nous comparons S_5 et S'_5 donnés par les relations (12) et (20), on obtient ■■■

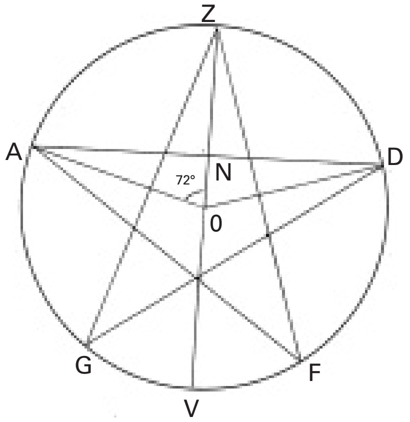

figure 7

$$\frac{S'_5}{S_5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

En multipliant haut et bas par $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, on obtient :

$$\frac{S'_5}{S_5} = \frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{100-20}}$$

$$= \frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$S'_5 / S_5 = (\sqrt{5}+1)/2 \qquad (21)$$

D'après la relation (21), le rapport du côté du pentagone étoilé à celui du pentagone régulier, est égal au nombre d'or.

Suite de Fibonacci

En 1202, Fibonacci étudie la suite ordonnée des nombres telle qu'un terme quelconque de la suite soit égal à la somme des deux termes précédents.
En commençant par 1 et 1, on a :
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 ...
Fibonacci a montré que lorsque les termes deviennent très grands, le rapport d'un terme avec son précédent tend vers le nombre d'or, en l'encadrant successivement par défaut et par excès.
Dans la suite ci-dessus, on vérifie que les rapports
144/89 = 1,61797... $\approx$ n
233/144 = 1,61805

Considérons la suite formée par une progression géométrique de raison r :
1 r r^2 r^3 r^4 r^5 r^6
Cette progression géométrique est de Fibonacci si la raison r est le nombre d'or n . On a alors : 1 n n^2 n^3 n^4 n^5 n^6
En effet, dans cette suite, on a bien $n^2 = n + 1$ relation corollaire résultant de la définition du nombre d'or.
On a aussi $n^3 = n^2 + n$, car en divisant les 2 membres par n on a bien encore $n^2 = n + 1$., etc..

Considérons la suite :
... $1/n^5$ $1/n^4$ $1/n^3$ $1/n^2$ $1/n$ 1
On a encore $1/n^3 = 1/n^5 + 1/n^4$.
En effet, en multipliant les 2 membres par n^5,
on a bien : $n^2 = n + 1$.
Cette suite est donc bien une suite de Fibonacci.
On a aussi : $1 = 1/n^2 + 1/n$
En multipliant par n, on a
$n = 1/n + 1$
On a donc :
$n + 1 = n^2$
$n - 1 = 1/n$
qui sont bien les égalités établies comme corollaires de la définition du nombre d'or.

Anciennes unités de mesure

Certaines anciennes unités de mesure de longueur, dans l'ordre croissant : la paume, la palme, l'empan, le pied et la coudée, se présentent curieusement comme les termes d'une suite de Fibonacci ayant pour raison le nombre d'or n. Parmi elles, la longueur la plus connue sinon la plus utilisée, le pied, est la sixième partie de la toise dont la longueur exprimée en mètres est 1,9490366, d'après la définition initiale du mètre de 1799. On en déduit :
1 pied = 324,84 millimètres
1 coudée royale = n pied = 525,60 mm
1 empan = 1 pied / n = 200,76 mm
1 palme = 1 empan / n = 124,08 mm
1 paume = 1 palme / n = 76,68 mm
Ces valeurs forment une suite de Fibonacci :
paume palme empan pied coudée
Il s'ensuit que l'on a :
1 coudée = 1 pied + 1 empan
1 pied = 1 empan + 1 palme
1 empan = 1 palme + 1 paume

On peut représenter toutes ces longueurs au moyen d'un rectangle d'or ABCD (figure 8) dont le grand côté vaut une coudée et le petit un pied, et dans lequel on a tracé EF pour former le carré ABEF d'un pied de côté et un rectangle d'or ECDF, puis de même GH pour former le carré ECGH d'un empan de côté et un rectangle d'or GDFH, et enfin IJ pour former le carré GDIJ d'une palme de côté et le rectangle d'or IFHJ. On a ainsi :
BC = 1 coudée
CD = 1 pied
DF = 1 empan
FH = 1 palme
HJ = 1 paume

Au Moyen Âge, de nombreuses applications du nombre d'or ont été utilisées, principalement en architecture. On a réalisé des spirales d'or construites d'arc de cercle s'inscrivant dans des rectangles d'or; en fait, ce sont de fausses spirales dans lesquelles la valeur du rayon vecteur ne progresse pas de façon continue. La mandorle romane s'inscrit dans un rectangle d'or, ce qui n'est pas le cas de la mandorle gothique. Le nombre d'or a été utilisé aussi dans l'architecture islamique.
Enfin, pour la pyramide de Chéops, on aurait utilisé des propriétés du nombre d'or.

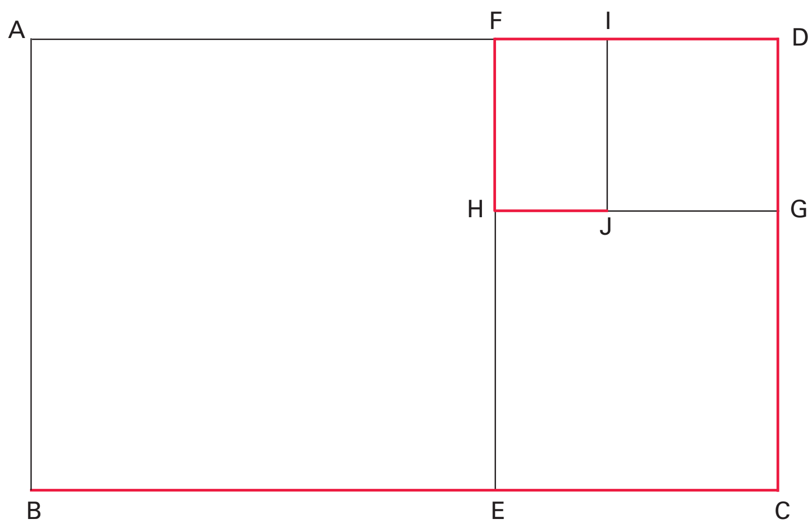

figure 8