

## Application de l'approche par les équations de la régression multiple pour le passage d'un datum à l'autre (cas de l'Algérie)

■ A. ZEGGAI - S. KAHLOUCHE - R. AIT AHMED LAMARA - N. KHELOUFI

**Les modèles globaux (Bursa Wolf, Molodensky Badekas, Veis...) sont généralement les plus utilisés dans la détermination des paramètres de transformation entre deux systèmes de coordonnées identiques. Dans le cas du système Nord Sahara (Algérie), le calcul des paramètres est altéré par le manque d'information sur l'ondulation du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde astro-géodésique de Clarke 1880 A. Une solution utilisant les équations de la régression multiple est proposée.**

**Résoudre ce problème est particulièrement important pour les travaux de géodésie où les données sont insuffisantes (GPS, points d'appui du système national, nivellement classique, géoïde local...).**

### ■ mots-clés

Bursa Wolf - Molodensky - Transformations - Equations de la régression multiple.

**L**e système géodésique Nord Sahara 1959, est l'infrastructure sur laquelle s'appuient tous les travaux géodésiques et cartographiques de l'Algérie. Les valeurs du réseau Nord Sahara sont impérativement liées aux mesures de triangulation.

Les inconvénients majeurs de l'établissement des réseaux géodésiques, par méthodes classiques, résident sur la lenteur des observations, la qualité et la limite des mesures (sphéricité de la terre, visibilité, limite d'emploi des instruments...). La précision obtenue ne peut être supérieure à 15 à 20 cm en planimétrie, à quelques millimètres (Nivellement de précision) et à 50 cm (nivellement géodésique) en altimétrie.

Les opérations de triangulation et de densification par les méthodes classiques, rendent les tâches d'exécution difficiles (lentes et coûteuses). La mise en œuvre des travaux de géodésie, cadastre... par les techniques spatiales (système GPS) permet de renforcer et d'alléger considérablement ces opérations.

Le choix du GPS s'est rapidement imposé parmi les techniques spatiales qui concourent efficacement à l'établissement des réseaux géodésiques. C'est une technique portable, de mise en œuvre aisée, qui fournit des résultats rapides et de qualité. De plus, son caractère descendant la rend accessible à tout utilisateur qui dispose de l'équipement nécessaire pour capter les signaux émis par les satellites GPS. L'équipement en récepteur GPS étant abordable, donc accessible à toute entreprise, c'est ainsi que de nombreuses applications géodésiques lui ont été associées.

Malgré la facilité d'utilisation du système GPS (rapidité, précision), il faut pour obtenir les meilleurs résultats, optimiser les moyens mis en œuvre et adopter une méthodologie respectant les spécifications telles que :

- Modélisation des erreurs liées aux mesures GPS...
- Définition d'une stratégie d'observation (redondance, réoccupation, nature des récepteurs...).
- Introduction de modèles de traitements adéquats.
- etc.

L'exploitation des données fournies par le GPS dans le référentiel WGS (World Geodetic System - 1984) pour des travaux géodésiques exprimés dans le référentiel local (Nord Sahara) nécessite la mise en place de procédures particulières, tenant compte de l'insuffisance de la donnée "géoïde", comme la résolution des équations de la régression multiple.

### Le Système ou Datum "NORD SAHARA"

Le traitement et la compensation, du réseau de premier ordre et du premier ordre complémentaire entrepris par l'Institut Géographique National de Paris (IGN-France) et de l'Army Map Service des Etats-Unis (AMS - Etats-Unis), fournissent un réseau homogène et compensé dans le système EUROPE 1950 (ED50) sur l'ellipsoïde international.

La détermination du réseau géodésique Algérien était basée sur les observations et les données :

- du nouveau parallèle Algérien (réfection de 1953-1954 et calculs de 1955),
- du parallèle sud,
- de la méridienne de GABES (TUNISIE),
- de la méridienne de GUERCIF (MAROC).

Le système cartographique en AFRIQUE est basé sur l'ellipsoïde de Clarke 1880 Anglais. Ce système a été recommandé à la conférence de Bukavu (République du Congo) en 1953 . Les cartes sahariennes sont établies sur un canevas astrono-

mique qui, arrivant au contact du réseau géodésique compensé dans le système Europe 50, présentent un décalage allant jusqu'à quelques dizaines de mètres. Pour concilier les canevas provenant du système cartographique et du canevas astronomique, un système de méridiens et parallèles a été établi sur l'ellipsoïde de Clarke 1880 Anglais, où les discordances entre les coordonnées géographiques des deux sources sont minima. Le système "géodésique" résultant qui répond à ces conditions est le système Nord Sahara. Il est déduit du système ED50 par la transformation suivante :

$$\lambda_{NS} = \lambda_{ED50} - 4.00 \text{ déci milligrades}$$

$$E_{NS} = E_{ED50} - 48.400 \text{ déci milligrades}$$

Où  $\lambda_{NS}$  : longitude exprimée dans le système Nord Sahara,

$\lambda_{ED50}$  : longitude exprimée dans le système ED50

$E_{NS}$  : latitude isométrique exprimée dans le système Nord Sahara

$E_{ED50}$  : latitude isométrique exprimée dans le système ED50

## Le World Geodetic System 1984 (WGS 84)

Il est défini par un jeu de stations réparties à la surface terrestre et obtenu à partir du système NSWC9Z-2 utilisé pour les éphémérides précises des satellites NNSS (Transit) et de l'introduction des résultats d'autres techniques spatiales (LLR-SLR-VLBI...).

Les paramètres de transformation permettent la conversion de tout point Doppler obtenu par les éphémérides précises dans le système WGS84 par la relation [1] :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{WGS84} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.610 \cdot 10^{-6} & -0.814 R_0 & 0 \\ 0.814 R_0 & -0.610 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & -0.610 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{NSWC9Z-2} \quad (1)$$

Les WGS (World Geodetic System) sont développés par le DoD (Department of Defense : USA). Depuis WGS 60 passant par le GRS80, l'approximation de la figure de la terre et de son champ de gravité a évolué pour aboutir à la définition actuelle du WGS 84 qui est le système de référence pour les éphémérides GPS radiodiffusées et précises.

Le trièdre de référence comprend un pôle conventionnel et un plan méridien origine.

## Les modèles globaux de transformation

La transformation des données GPS dans le système géodésique local, qui est la base du système cartographique en vigueur et dans lequel les résultats des travaux géodésiques doivent être exprimés, nécessite la connaissance des paramètres de passage avec l'emploi d'un modèle adéquat. Le choix du modèle de transformation, requiert la disponibilité d'un jeu de données connu dans chacun des deux systèmes. La transformation est généralement présentée soit sous la forme d'une similitude spatiale (BURSA WOLF...) soit issue d'un formalisme géographique dit modèle de MOLODENSKY.

### ■ Le modèle Cartésien de BURSA WOLF

C'est un modèle à sept (07) paramètres dont l'équation générale est donnée par :

$$\vec{X} = \vec{T} + (1 + \Delta k) \cdot R \cdot \vec{x} \quad (2)$$

Où  $\vec{X}$  est le vecteur des coordonnées GPS,  $\vec{x}$  est le vecteur des coordonnées Nord Sahara,  $\vec{T}$  est le vecteur des trois (3) translations,  $R$  est la matrice exprimée en fonction des trois petites rotations entre les deux systèmes et  $\Delta k$  la variation relative du facteur d'échelle.

Pour un point, nous avons :

$$\begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ Z-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z-y \\ 0 & 1 & 0 & y-z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y-x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \Delta k \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Pour un réseau de (N) points, l'équation générale est donnée sous la forme :

$$A \cdot X + B = V \quad (4)$$

Où  $A$  est la matrice de configuration de  $3N \times 7$  coefficients,  $X$  est le vecteur des 7 inconnues,  $B$  est le vecteur des  $3N$  observations,  $V$  est le vecteur des  $3N$  écarts ou résidus et  $N$  le nombre de points.

Le système peut être résolu par l'ajustement par moindres carrés ( $V^T \cdot V = \text{minimum}$ )

$$\frac{\partial V^T \cdot V}{\partial X^T} = A^T \cdot A \cdot X - A^T \cdot B = 0 \quad (5)$$

La solution donne :

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \quad (6)$$

$$\vec{X} = (T_x, T_y, T_z, \Delta k, E_x, E_y, E_z)^T \quad (7)$$

### ■ Le modèle géographique de MOLODENSKY

A chaque système de référence géodésique est associé un ellipsoïde de révolution. Les coordonnées géodésiques (longitude et latitude) sont des valeurs plus représentatives dans la pratique que les coordonnées cartésiennes ( $X, Y, Z$ ). La transformation mise en œuvre est alors à 7 ou 9 paramètres (9 : dans le cas où on considère la variation du demi grand axe et de l'aplatissement comme inconnues).

Il existe des formules qui permettent de s'affranchir des coordonnées géocentriques liées à deux ellipsoïdes et qui permettent d'aboutir à une transformation directe. Cette transformation est issue des équations différentielles de MOLODENSKY. En pratique, pour les systèmes de coordonnées  $\vec{X}$  et  $\vec{x}$ , on obtient un modèle [08] :

$$\vec{X} = F(\vec{x}, \vec{a}) \quad (8) \quad \vec{X} = f(X, Y, Z) \quad (9)$$

$$\vec{x} = f(\lambda, \varphi, he) \quad (10) \quad \vec{a} = f(a, f) \quad (11)$$

Les coordonnées cartésiennes sont représentées par ( $X, Y, Z$ ), les coordonnées géodésiques par ( $\lambda, \varphi, he$ ). Les éléments  $a$  et  $f$  désignent respectivement le demi grand et l'inverse de l'aplatissement.

...

- L'équation différentielle s'écrit :

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \cdot d\vec{x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha} \cdot d\vec{\alpha} \quad (12)$$

$$d\vec{X} = J \cdot d\vec{x} + K \cdot d\vec{\alpha} \quad (13)$$

Où J, K sont les Jacobiens de la transformation.

Les formules [14,15,16] données pour un seul point sont les formules dites de MOLODENSKY - DMA

$$\lambda_2 - \lambda_1 = - \frac{\sin \lambda}{(N+h) \cos \varphi} \cdot T_x + \frac{\cos \lambda}{(N+h) \cos \varphi} \cdot T_y - (f - 2f') \cos \lambda \cdot E_x + \sin \lambda \cdot E_y + E_z \quad (14)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{(p+h) \cos \varphi} \cdot T_x - \frac{\sin \varphi \sin \lambda}{(p+h) \cos \varphi} \cdot T_y + \frac{\cos \varphi}{(p+h)} \cdot T_z + \sin \lambda \cdot E_x - \cos \lambda \cdot E_y \quad (15)$$

$$h_2 - h_1 = \cos \varphi \cos \lambda \cdot T_x + \cos \varphi \sin \lambda \cdot T_y + \sin \varphi \cdot T_z + a \cdot \Delta k - da + (adl' - fda) \sin^2 \varphi \quad (16)$$

Pour le cas de N points, la solution est donnée par la méthode des moindres carrés.

## Transformation WGS84 - Nord Sahara par l'approche de la régression multiple

La méthode dite transformation par les équations de la régression multiple a été utilisée par la NIMA (ex. DMA : 1987) pour le passage d'un système géodésique local vers le système WGS 84.

La méthode permet de compléter les formules de transformations issues des équations différentielles de MOLODENSKY. La méthode est capable de déterminer ou d'évaluer les distorsions non linéaires dans un réseau appartenant à un système ou un autre.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 + \Delta \lambda \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \Delta \varphi \\ h_2 &= h_1 + \Delta h \end{aligned} \quad (17)$$

Avec  $\lambda_1, \varphi_1, h_1$  : coordonnées géodésiques WGS84.

$\lambda_2, \varphi_2, h_2$  : coordonnées géodésiques Nord Sahara.

La forme générale de la différence entre deux Datum en utilisant les équations de la régression multiple pour la latitude est donnée comme suit (DMA, 1987) :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= A_0 + A_1 \cdot U + A_2 \cdot V + A_3 \cdot U^2 + A_4 \cdot U \cdot V + A_5 \cdot V^2 \\ &+ \dots + A_{34} \cdot V^9 + A_{35} \cdot U^9 \cdot V + A_{36} \cdot U^8 \cdot V^2 + \dots \\ &+ A_{64} \cdot U^9 \cdot V^2 + A_{65} \cdot U^8 \cdot V^3 + A_{66} \cdot U^8 \cdot V^2 \\ &+ \dots + A_{72} \cdot U^9 \cdot V^3 + A_{73} \cdot U^8 \cdot V^4 + \dots + A_{99} \cdot U^9 \cdot V^9 \end{aligned} \quad (18)$$

Où  $A_0, A_1, \dots, A_{99}$  : 100 coefficients possibles déterminés dans les équations de la régression multiple.

$U = k \cdot (\varphi - \varphi_0)$  : Latitude géodésique normalisée pour le calcul du point.

$V = k \cdot (\lambda - \lambda_0)$  : Longitude géodésique normalisée pour le calcul du point.

K : Facteur d'échelle.

$\lambda, \varphi$  : Coordonnées WGS84.

$\lambda_0, \varphi_0$  : Coordonnées origine WGS84.

$\Delta \varphi$  : Différence de latitude entre les deux systèmes.

Pour la longitude et la hauteur ellipsoïdique, la différence dans la relation [18] est remplacée par  $\Delta \lambda$  ou par  $\Delta h$  pour donner respectivement les formules relatives à la longitude et à la hauteur.

Le degré des équations de la régression multiple dépend essentiellement du nombre de points. Pour le degré 18, il faut au moins 100 coefficients avec un minimum de 100 points.

## Application : Comparaison entre modèles globaux et la méthode des équations de la régression multiple (résultats préliminaires)

Plusieurs campagnes d'observations ont été menées avec les récepteurs bifrquences Ashtech Z XII, soit un ensemble de 16 points répartis au nord de l'Algérie (8 points d'appui et 8 points de contrôle) ont été observés.

Une partie du réseau a été observée dans le cadre du projet ALGEONET (Algerian Geodynamical Network), mené conjointement par le CNTS (Centre National des Techniques Spatiales) et l'INCT (Institut National de Cartographie et de Télédétection), qui avait pour objectif la mise en place d'un réseau GPS précis, couvrant essentiellement la partie nord de l'Algérie, pour les application géodynamiques. Il a été monté en 1998, ré-observé en 2002, après l'extension dès 1995 du projet TYRGEONET (Tyrrhenian Geodetic Network -ING Italie) en Algérie.

### ■ Observations GPS

L'apport du GPS en Algérie est considérable car son utilisation a permis d'entreprendre plusieurs travaux à but géodésique et cartographique qui, avant étaient fastidieux et difficiles vu l'étendue du pays.

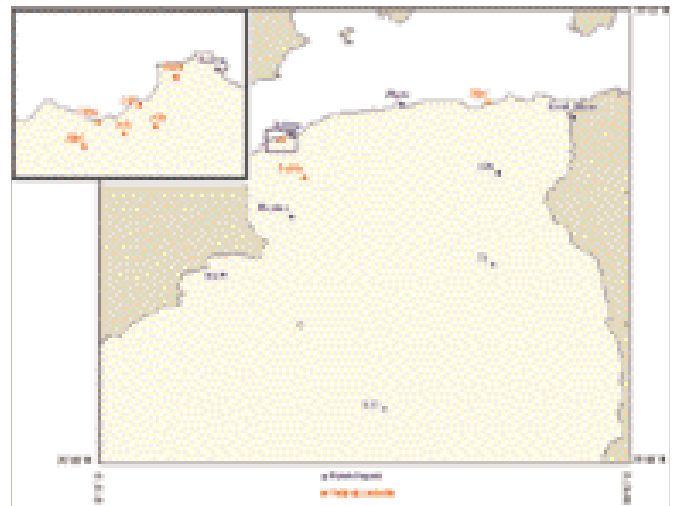


Figure 1 : Le réseau de points utilisé pour la transformation.

La stratégie d'observation adoptée pour mener à bien les campagnes GPS, repose essentiellement sur la détermination de la durée optimale de mesure et la combinaison linéaire de traitement appropriée pour chaque type de longueurs de bases. Cette stratégie permet d'obtenir la meilleure précision (ppm) possible.

La figure 2 montre que le test fait sur une longueur d'environ 540 km (Arzew Jijel) a permis de mettre en valeur la durée d'observation (210 minutes) jusqu'à stabilité du ppm. Le ppm optimal est obtenu avec la combinaison L1C. Une autre base

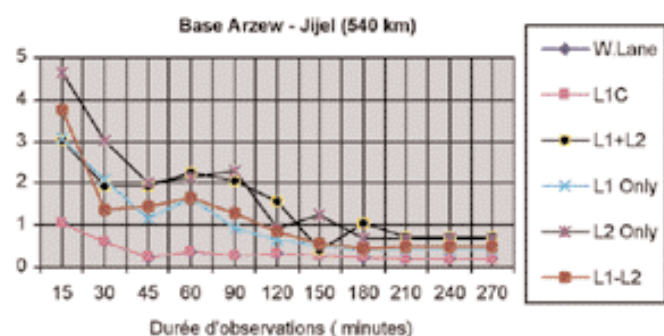


Figure 2 : Détermination de la durée d'observation et de la combinaison linéaire de traitement.

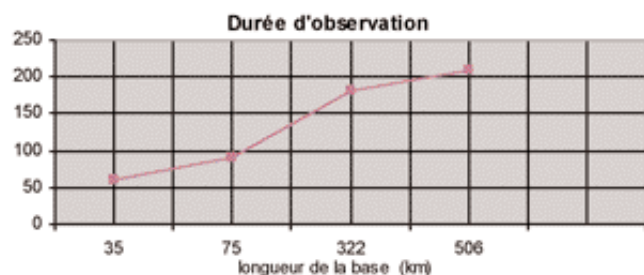


Figure 3 : Détermination de la durée d'observation en fonction de la longueur de la base.

d'environ 503 km reliant Arzew à Béchar a fait l'objet des mêmes investigations et a fourni des résultats équivalents.

Après traitement des observations GPS et analyse faite sur quatre lignes de bases différentes (35 km à 506 km), le graphe de la figure 3 montre que la durée d'observation varie en fonction de la longueur.

## ■ Transformations

Les modèles globaux (Bursa - Wolf, Molodensky Badekas...) sont les plus utilisés pour calculer les paramètres de la transformation entre systèmes identiques. La hauteur de l'ellipsoïde relative à Clarke 1880 (ellipsoïde associé au système Nord Sahara) est remplacée par l'altitude (manque d'information de la hauteur du géoïde). Pour pallier ce problème, l'utilisation des équations de la régression multiple est proposée.

Les écarts sur les composantes géographiques ( $d\lambda$ ,  $d\varphi$ ) correspondent, sur la surface de la terre, à des écarts suivant l'est et le nord ( $dE$  et  $dN$ ). Ces écarts sont exprimés par :

$$dE = N \cos \varphi \cdot d\lambda \quad (19)$$

$$dN = \rho d\varphi \quad (20)$$

Avec  $N$ ,  $\rho$  : respectivement normale et rayon de courbure.

Les écarts  $dE$  et  $dN$  peuvent être exprimés par les formules approchées suivantes :

$$dE = R \cos \varphi \cdot d\lambda \quad (21)$$

$$dN = R d\varphi \quad (22)$$

Avec  $R=6\,371$  km (rayon moyen de la terre appliqué pour la zone).

Tous les écarts sont exprimés en mètre (les écarts en  $d\lambda$ ,  $d\varphi$  sont convertis selon les formules 21 et 22).

Modèle	Composante	Minimum (mètre)	Maximum (mètre)	Moyenne (mètre)	RMS (mètre)	RMS Position (mètre)
Bursa Wolf	X	-1.426	2.686	1.293	1.838	2.260
	Y	-0.301	1.164	0.697	0.834	
	Z	-1.491	1.307	0.461	1.018	
Modèle Géographique de Molodensky	$\lambda$	-1.417	0.407	-0.841	1.014	2.351
	$\varphi$	0.238	0.541	0.404	0.413	
	H	-2.933	2.019	-1.308	2.058	
Equations de la régression multiple	$\lambda$	-0.063	0.319	0.110	0.164	0.401
	$\varphi$	-0.407	0.634	-0.164	0.366	

Tableau 1 : Analyse statistique pour le modèle des équations de la régression multiple et les modèles globaux.



- Dans cet exemple, l'approche par les équations de la régression multiple donne une moyenne de 0.197 m et un RMS de 0.401m en planimétrie. Contrairement aux modèles globaux dont la précision est affectée par l'ondulation du géoïde.

## Conclusion

Pour l'estimation des paramètres de transformation, le passage du système WGS84 au système Nord Sahara nécessite une bonne connaissance d'un réseau commun.

La précision obtenue sur les coordonnées transformées est liée à plusieurs facteurs :

- Précision des coordonnées des points dans le système géodésique national (Nord Sahara).
- Le nombre et la répartition géographique des points d'appui, ainsi que la sélection des points de contrôle.
- Précision des coordonnées GPS.
- Modèles mathématiques utilisés pour la transformation.
- La densité et la répartition géographique des points.

Les résultats obtenus par la méthode de régression multiple, notamment dans un cas particulier où l'insuffisance de données physiques comme la non-disponibilité d'un géoïde précis (cm) couvrant tout le territoire, permet de proposer son utilisation pour toutes les transformations de coordonnées WGS - Local. Les écarts-types obtenus ainsi que l'exactitude fournie à partir des différences fournies sur un réseau GPS de grande précision comme ALGEONET, permettent au niveau global de garantir une certaine qualité des travaux géodésiques à mener avec le GPS.

Il reste important de relever que les méthodes les plus rigoureuses et les plus précises ne permettront certainement pas d'arriver à des résultats optimaux tant que la couverture gravimétrique et géodésique, de précision et de densité adéquate et répondant aux normes admises en la matière, ne sont pas disponibles. Les nouvelles missions spatiales (GOCE, GRACE...) relatives à la détermination précise du champ de pesanteur terrestre en général, et l'exploitation des données collectées permettra certainement une meilleure connaissance du géoïde local et une meilleure détermination des paramètres de passage entre les systèmes spatiaux comme le WGS ou le futur référentiel Galiléo (GTRS) et le système local en vigueur en Algérie. ●

## Contacts

A. ZEGGAI - S. KAHLLOUCHE

R. AIT AHMED LAMARA - N. KHELOUFI

Division de géodésie

Centre National des Techniques Spatiales.

BP 13 Arzew - 31200 - Algérie.

## Références

1. D. Bouteloup [2002] - *Systèmes géodésiques* - Cours de Géodésie Chapitre 8. IGN. Version 2.0. 20-11-2002
2. A. Rey [1960] - *Les principales étapes de la géodésie en Afrique du Nord et leur incidence cartographique* - IGN.
3. World Geodetic System [1984] - *its definition and relationships with local geodetic systems*. NIMA [2000] - Technical Report TR8350.2 - Department of Defense- NIMA.
4. N. Kheloufi [2004]. *Qualité des données et modélisation pour l'estimation des paramètres de passage entre les systèmes WGS84 et le Nord Sahara*. Mémoire de magister. CNTS ARZEW. Novembre 2004.
5. A. Zeggai, S.A. Benahmed Daho, S. Kahlouche, A.N. Nabed, S.Touam, A. Ayoub [2001] - *Rattachement géodésique par GPS longue base du réseau cadastral de Béchar*. Actes du séminaire sur les nouvelles techniques cartographiques à grandes échelles - ALGER 27-28 juin 2001.
6. A. Zeggai, S.A. Benahmed Daho, S. Kahlouche, A.N. Nabed, S.Touam [2001] - *Geodetic lines transformations, GPS Levelling and Nord-Sahara Datum. Comparison with Global Models* - Assemblée scientifique de l'Association Internationale de Géodésie - Symposium A: Fine Tuning Reference Frame Implementation - Budapest du 2 au 8 septembre 2001.

## Sites Web

1. J. Clifford, J. Munier [2001] - Photogrammetric Engineering & Remote Sensing. Grids and Datum. Democratic and popular Republic of Algeria, October 2001. <http://www.ASPRS.org/resources.html>.
2. EPSG [2002] - Coordinate Conversion and Transformation Including formulas. European Petroleum Survey Group. Guidance note number 7. <http://www.epsg.org/>

## ABSTRACT

**Keywords:** Bursa Wolf, Molodensky, Transformations, Multiple Regression Equation(s).

*The global models (Bursa Wolf, Molodensky Badekas, Veis...) are the most used to solve the transformation parameters between identical systems. In the case of Nord Sahara datum (Algeria), the parameter computation is altered by the insufficient information of the geoid's undulation above astro-geodetic ellipsoid (Clarke 1880 A). One solution using the Multiple Regression Equation(s) is proposed. To solve this problem is particularly important for geodetic works where the geodetic data are not sufficiently available (GPS and National benchmarks, spirit levelling, local geoids...).*