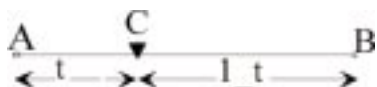


Les courbes, les splines cubiques et autres

■ Claude MILLION

Dans un article précédent on a donné toutes les généralités concernant le tracé ou le calcul des courbes quelconques [1] :

- Soit la définition paramétrique d'une droite A-B
- Soit une droite définie par les coordonnées de ses deux extrémités A et B :



Les coordonnées c d'un point C situé entre A et B peuvent être calculées par la relation :

$\vec{c} = \vec{a} \cdot (1 - t) + \vec{b} \cdot t$ variant de 0 à 1 le point C parcourt le tronçon de droite A-B, si C est confondu avec A, alors $t = 0$, $1-t = 1$ on aura bien $c = a$, si C est confondu avec B : $t = 1$ $1-t = 0$, on aura $c = b$. Il est possible de sortir du segment A-B en donnant à t des valeurs positives supérieures à 1 pour aller au-delà de B ou simplement négatives pour aller en deçà de A. On a déjà rencontré cela dans les applications sur les symétries. L'essentiel sera de n'utiliser que des courbes paramétriques et non des courbes du type $y = f(x)$

Les courbes de Bézier

Il n'est pas question de reprendre ici tous les développements théoriques qu'on retrouvera dans des ouvrages spécialisés. On s'en tiendra aux cas les plus courants de la pratique. Les courbes de



Signe n° 14" Photo Yvette Velay

Bézier sont tracées à partir de points de définition lesquels peuvent se déplacer entraînant une déformation de la courbe. Ces points de définition ne sont pas, sauf pour le premier et le dernier points de la courbe à tracer, des points de passage ou des points d'appui de la courbe comme dans le tracé des splines. Ces courbes sont des paraboles de degré égal au nombre de points de défini-

tion moins un. Au-delà de trois points de définition, décrivant un plan sur lequel se trace cette courbe, ces courbes tracées sont gauches si les points de définition ne sont pas situés dans le même plan. Le tracé des courbes ne dépend que d'un paramètre t variant de 0 à 1 sur toute l'étendue du tracé de la courbe, $t = 0$ (zéro) à l'origine, et $t = 1$ à la fin de la courbe $t \in [0, 1]$. Les coordonnées

...

- des points de la courbe (2 ou 3) sont des fonctions polynômes de Bernstein $t^i(1-t)^{n-i}$ de ce seul paramètre. Et des coefficients du triangle de Pascal sur les combinaisons de n points i à i :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

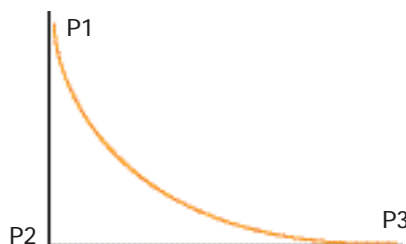
$$\text{où, } B(t) = \sum_0^n \text{poids}(i) \cdot P_i$$

est la coordonnée (x, y , ou z) du point de la courbe, P_i représente la même coordonnée du point de définition.

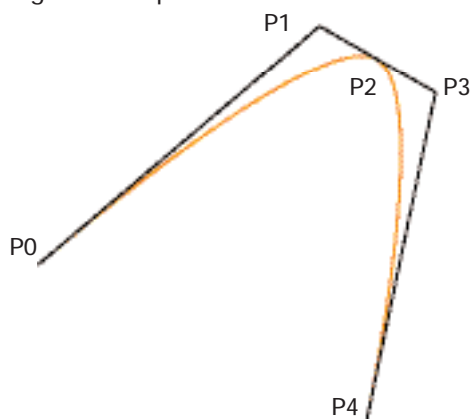
C_n^i ou $\binom{n}{i}$ représente le nombre de combinaisons de n points de définition i à i .

Cette description, directement issue d'anciens procédés de tracé des courbes en atelier, poserait des problèmes de calcul pour des degrés élevés mais on dépasse rarement le troisième degré.

Ci-dessous le tracé d'une courbe de Bézier définie par trois points, c'est un arc de parabole carrée :



Une autre particularité de ces courbes de raccordement, au demeurant peu pratiques pour notre usage, réside dans le fait qu'il est tout de même possible de faire passer la courbe sur un point connu P2 ; il suffit de le placer sur la droite joignant deux points de définition P1-P3.



Mais, naturellement, on augmente la courbe d'un degré, ce qui n'est pas toujours souhaitable, surtout si les points de passage sont nombreux. On recherchera des courbes qui nous seront plus utiles.

Les courbes paramétriques cubiques

Ce sont des courbes définies par un système d'équations paramétriques cubiques, largement suffisantes pour notre usage surtout si elles sont utilisées par tronçons successifs :

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z, \quad t \in [0, 1]$$

Définition mathématique : soit un vecteur $\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle$ et un vecteur $\vec{X} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ le système d'équations paramétriques peut s'écrire :

$$\vec{X} = \vec{T} \cdot \mathbf{C} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Les courbes de cette famille sont continues comme leurs dérivées premières et secondes. Quatre coefficients sont nécessaires pour définir chaque coordonnée, soit douze coefficients pour trois coordonnées, ce qui sera le cas le plus courant. On impose quatre contraintes mathématiques pour définir l'équation sur trois axes.

Les courbes de cette famille ont la propriété d'être continues, ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

On transforme la matrice \mathbf{C} donnée ci-dessus en une matrice $\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}$ où \mathbf{M} est une matrice 4.4 appelée matrice de base, et \mathbf{G} une matrice composée de quatre vecteurs colonnes appelés vecteurs de géométrie, il s'agit habituellement de quatre points de l'espace de représentation car la courbe est du troisième degré : degré = nombre de points de définition-1.

$\vec{X} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}$, $\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}$
La courbe générée évoluera entre ces quatre points de définition ou de passage suivant les cas. La matrice \mathbf{M} permet de donner des poids à chacun des coefficients du vecteur $\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle$ permettant de définir l'allure de la courbe obtenue.

$$\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{bmatrix}$$

Si on se donne deux points connus par leurs coordonnées P1 et P2, et qu'on veuille définir une courbe paramétrique cubique passant par P1 et P2 et ayant des pentes P'1 en P1 et P'2 en P2, on aurait, sans difficultés :

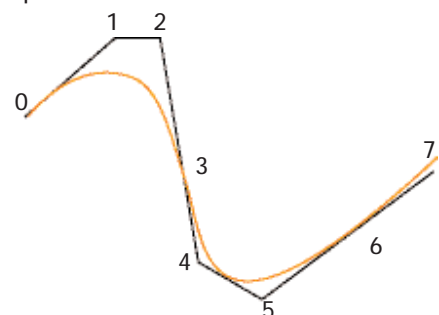
$P_1 = d, P_2 = a + b + c + d, P'_1 = c, P'_2 = 3a + 2b + c$ car en 1, on a : $t = 0$, et $t = 1$ en 2. On remarquera que a, b, c, d , ont la dimension d'une coordonnée et que, par conséquent, les matrices fournissent une pondération, et que le résultat est une coordonnée barycentrique !

Courbes de Bézier

Si le degré de la courbe est égal à trois (3) les quatre points de définition sont les g ci-dessus, on obtient les résultats suivants :

$$\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{bmatrix}$$

On peut faire facilement des tracés continus en faisant en sorte que le dernier sommet de la première courbe soit le premier de la suivante tout en restant sur

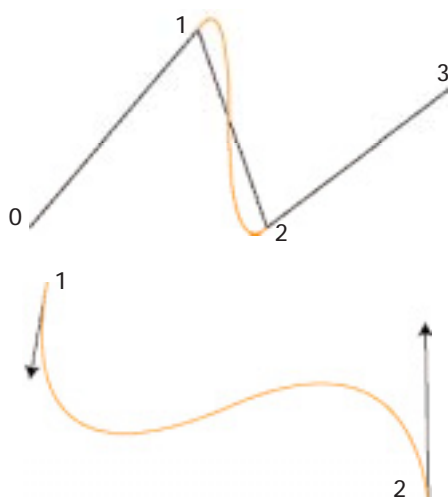


une droite commune aux deux courbes. Voir sur la figure les points 3 et 6.

On s'assure que 2-3 et 3-4 sont colinéaires. Si on veut que la dérivée seconde soit continue les distances 2-3 et 3-4 devront être égales.

Splines d'Hermite

Toutes les courbes dérivées directement de celles de Bézier ont le grave défaut de ne pas passer par les points de définition, on arrêtera provisoirement ici leur étude pour se pencher sur les splines paramétriques cubiques qui passent sur les points d'appui. On va commencer par montrer que ces



cubiques sont dérivées d'un même modèle déjà ancien la spline d'Hermite.

Pour calculer une spline cubique d'Hermite on a besoin de quatre vecteurs :

- Les coordonnées du point de départ 1
- La tangente au point de départ, c'est une direction, on verra que parfois ce n'est pas indispensable par exemple si on trace une parabole carrée.
- Les coordonnées du point d'arrivée 2
- La tangente au point d'arrivée 2. On verra que parfois ce n'est pas indispensable par exemple si on trace une parabole carrée.

On indique ainsi les moyens de calculer quatre paramètres par coordonnée qui définit paramétriquement la cubique joignant 1 à 2.

Les fonctions de base sont :

$$h_1(t) = 2.t^3 - 3.t^2 + 1$$

$$h_2(t) = -2.t^3 + 3.t^2$$

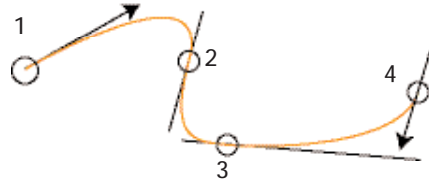
$$h_3(t) = t^3 - 2.t^2 + t$$

$$h_4(t) = t^3 - t^2$$

On multiplie les coordonnées du point de départ 1 par h_1 , et celles du point d'arrivée par h_2 . Les valeurs de h_3 et h_4 sont appliquées de la même manière aux tangentes. On obtient les résultats globaux suivants :

$$\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g'_{1x} & g'_{1y} & g'_{1z} \\ g'_{2x} & g'_{2y} & g'_{2z} \end{bmatrix} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

1.4 4.4 4.3



Faisons varier t de 0 à 1 pour parcourir toute la courbe. On peut enchaîner plusieurs courbes qui se suivent.

Pour notre usage, nous ne trouvons que des avantages à conserver cette définition, d'autant que rien ne s'oppose à tracer des figures fermées, ce qui était impossible avec les splines ordinaires ($y=f(x)$), pour d'autres usages la nécessité de donner la pente de la courbe en chaque point aurait été considérée comme rédhibitoire. Pour cette raison les auteurs ont tenté de trouver des moyens de se soustraire à cette obligation.

Si on retient la définition du début, on aurait, a, b, c, d en résolvant :

$$a = 2.[P_1 - P_2] + P'_1 + P'_2$$

$$b = 3.[P_1 - P_2] - 2.P'_1 - P'_2$$

$$c = P'_1$$

$$d = P_1$$

Les splines cardinales

Les auteurs ont trouvé un moyen assez facile pour ne pas avoir à calculer les tangentes tout au long d'un tracé qui peut être important. La tangente adoptée peut être parallèle aux deux points voisins du tronçon calculé, le précédent et le suivant : $\vec{g}_i = c.(P_{i+1} - P_{i-1})$, $c \in [0,1]$, où c , compris entre 0 et 1, est une constante qui affecte la raideur de la courbe. On notera, essentiellement, qu'il faut connaître le point précédent et le point suivant de la courbe, et qu'elle ne passera pas par ces points qui ne sont là que pour définir une tangente à l'origine et à la fin, même en doublant ces points sur une droite on n'assurerait pas un raccordement tangent.

Les splines de Catmull-Rom

Ce sont des splines cardinales pour lesquelles $c=1/2$:

$$\vec{g}_i = \frac{1}{2} \cdot (P_{i+1} - P_{i-1})$$

Donnons-nous $n+1$ points d'appui : $[P_0, P_1, P_2, \dots, P_n]$, on veut tracer des cubiques paramétriques passant par ces points et qui ne soit affectées que localement par le déplacement d'un seul point, on aura en finale l'équation suivante :

$$\vec{T} = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{bmatrix}$$

1.4 4.4 4.3

Les splines de Kochanek-Bartels

Elles sont directement dérivées des précédentes, mais on introduit trois constantes de définition de la spline :

- la tension τ
- la continuité γ
- le biais β .

La tangente d'entrée TE et la tangente de sortie TS seront :

$$T_E = \frac{(1-\beta)(1-\gamma)(1+\tau)(P_2 - P_1) + (1-\beta)(1-\gamma)(1-\tau)(P_1 - P_0)}{2}$$

$$T_S = \frac{(1-\beta)(1+\gamma)(1+\tau)(P_2 - P_1) + (1-\beta)(1+\gamma)(1-\tau)(P_1 - P_0)}{2}$$

figure courbes 1

Sur la figure on remarquera que les tangentes en chaque point de passage sont parallèles aux droites joignant le point situé avant le point de tangence au point situé immédiatement après. C'est la définition des splines de Catmull-Rom pour lesquelles on a établi un logiciel de démonstration, largement complété.

On va étudier l'effet d'un seul paramètre t la tension σ la matrice de pondération M d'une B-spline, par exemple deviendra :

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -\sigma & 12-9\sigma & 9\sigma-12 & \sigma \\ 3\sigma & 12\sigma-18 & 18-15\sigma & 0 \\ -3\sigma & 0 & 3\sigma & 0 \\ \sigma & 6-2\sigma & \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

alors que normalement la matrice M d'une B-spline est :

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec : $\sigma = \frac{1-t}{2}$ variant de 0 à 1.

- Le paramètre t est appelé paramètre de tension car il détermine comment le tracé de la courbe suivra les points de passage au plus près avec $t=0$ on retrouve dans le cas des splines de Cattmull-Rom, pour $t=1$ on "colle" directement sur le polygone des points de passage et les courbes disparaissent. Ce paramètre est appelé tension car si on appuie une lame élastique sur les points de passage elle prend la forme d'une spline cubique qu'on peut tendre, à la limite $t = 1$, elle perd toute raideur, et se comporte comme un fil tendu passant par tous les points d'appui. De la même manière une spline de Cattmull-Rom "tendue" devient :

$$X_{C-R}(t) = (t^3, t^2, t, 1) \begin{bmatrix} \alpha-1 & \alpha+3 & -3-\alpha & 1-\alpha \\ 2-2\alpha & -5-\alpha & 2\alpha+4 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{11} \\ P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix}$$

Utilisation en topographie

On notera qu'il y a deux utilisations possibles de ces courbes splines en topographie :

- Pour le dessin automatisé de détails en courbe, et la description vectorielle d'un lever topographique ou de tout élément d'information géomatique de même nature : la description des rives d'un lac, ou de la limite d'une forêt par exemple.
- Pour la conception, le calcul, et l'implantation de courbes quelconques sur le terrain, avec toute la précision désirable, car on peut multiplier les points de la courbe autant qu'il en est besoin, et les calculer avec autant de décimales que nécessaire.

Pour cela il faut se donner quelques définitions :

On désignera par point des passages (p) un point d'une courbe où celle-ci doit rester continue, c'est-à-dire ne pas présenter de cassure. Dans le langage mathématique on doit au moins assurer une continuité C1, on verra que nos courbes n'assurent pas de continuité C2. Par opposition au point précédent on désignera par point de sommet (s) un point où il faut marquer une brisure. Si deux points s se suivent le détail représenté est une droite. Si, dans une description, un point p fait suite à un point s, on utilisera une spline de Cattmull-Rom, ou mieux une spline libre qu'on

propose, jusqu'à rencontrer un nouveau point s, car les splines de C-R sont, en fait, contraintes à leurs extrémités, entre l'encastrement et la liberté totale.

Pour être complet, on doit créer des points (t) de tangence à la transition entre une droite et une courbe définie par des points p, donc avec une continuité C1, mais sans brisure au passage, aucune courbe décrite dans la littérature ne correspond à cette contrainte particulière fort courante. On a établi un logiciel, voir en fin.

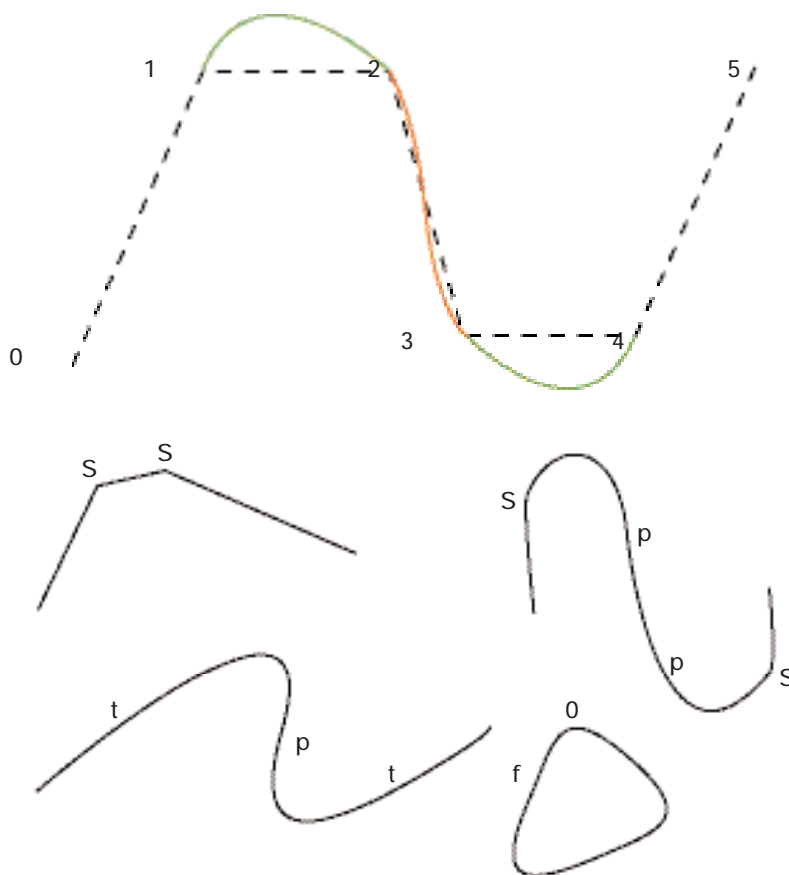
Enfin, on doit compléter cette typologie des points par le cas important des figures fermées pour lesquelles on n'a rien trouvé dans la littérature, ce qui ne signifie pas que cela n'existe pas. Afin d'éviter des confusions, le dernier sommet ou le dernier point de passage ne seront pas décrits une seconde fois sur les figures fermées. On indiquera que la figure se ferme par un point f, ce qui signifiera qu'il faut tracer un trait ou une courbe entre ce point f et le premier point de la description de l'objet 0.

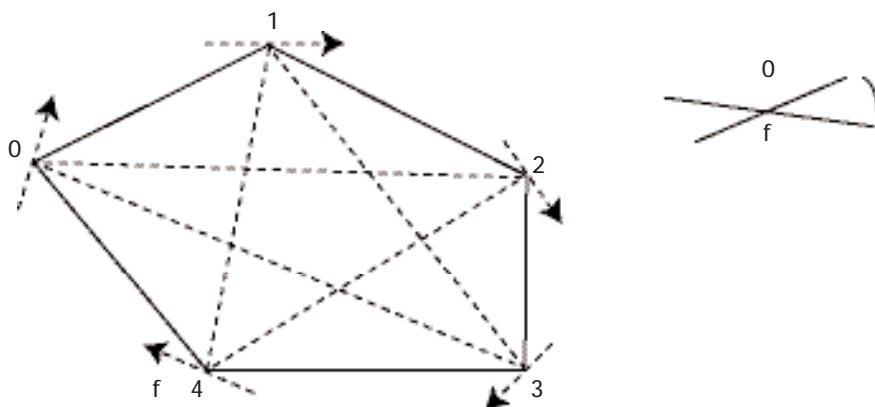
Il nous a donc fallu traiter le cas des figures fermées constituées d'arcs de

splines cubiques, et les cas où les raccordements se font tangentiellement avec des droites, c'est-à-dire en continuité, ou par une articulation. Pour tous les autres cas les droites ou les splines de Cattmull-Rom seront très satisfaisantes.

Figure fermée

Rappelons encore une fois que le premier et le dernier côtés d'une spline de Cattmull-Rom servent seulement à définir les tangentes d'entrée et de sortie. Dans une courbe fermée elles doivent servir aussi de point de passage, ce qui oblige à prolonger le polygone des points de passage de chaque côté du vecteur de fermeture par des points déjà connus. Cela se fait uniquement par la programmation et l'utilisateur qui a déclaré un point f ne sait pas que la déclaration de ce point entraîne tout un processus destiné à fermer le polygone et à tracer les splines. Il faut prendre la précaution de ne pas tracer à l'écran le dernier côté car on créerait un point double qui donnerait naissance à une boucle raccordée aux splines voisines : voir sur la figure quand 0 et f sont confondus.





$$ME = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & +5 & -4 & +1 \\ 4 & -9 & +6 & -1 \\ -2 & +2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou ME' plus loin.}$$

$$MS = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & +4 & -5 & +2 \\ +2 & -6 & +6 & -2 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MM = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & +6 & -6 & +2 \\ +4 & -10 & +8 & -2 \\ -2 & +2 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ , ou MS' ci-dessous.}$$

Le tracé des courbes fermées n'est donc qu'un petit problème de programmation des splines de Cattmull-Rom classiques.

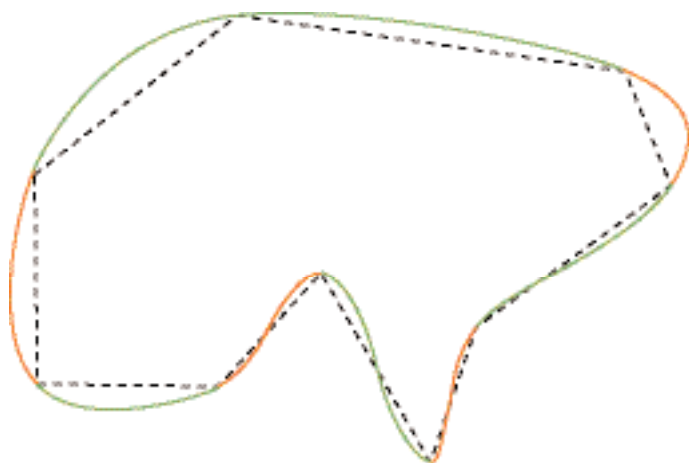
Raccordements tangentiels

Les matrices M des raccordements tangentiels en entrée ME et en sortie MS de courbe différent de la matrice de C-R en sorte qu'on a différents cas de figure :

- Cas où deux points t encadrent des points p, par exemple la séquence : t..p..p..t. On doit donc appliquer les matrices suivantes dans l'ordre suivant ME..CR..CR..CR..MS
- Cas où on a en entrée un point s, puis des points p, enfin en sortie un point t, par exemple la séquence s..p..p..p..t dans ce cas on utilise successivement les matrices CR..CR..CR..CR..MS
- Cas où on a en entrée un point t, puis des points p, enfin en sortie un point s, par exemple la séquence t..p..p..p..s, dans ce cas on utilise successivement les matrices ME..CR..CR..CR..CR.

Ce dernier cas ne devrait pas exister, mais l'expérience montre que les utilisateurs poussent toujours un logiciel à la limite de ses possibilités, même si cela est contraire aux règles de l'art qui imposeraient de mettre au moins un point sur la courbe ; c'est celui où deux points t se suivent sans point p intermédiaire. C'est-à-dire que la courbe est définie par deux points et par ses tangentes en ces deux points soit la séquence....t..t.... les matrices ME et MS ne sont valables que pour la transition entre un point t et un point p ou t et p et pas du tout entre deux points t successifs. On doit recalculer une matrice spéciale en entrée et en sortie tangentes soit MM (spline mixte en entrée et en sortie). Celle-ci en raison de la présence de symétrie dans sa formulation est, en définitive, très intéressante.

On va donner, ci-dessous, les différentes matrices, peut-être inconnues, en tout cas moins connues que C-R, soit ME, MS, et MM, qu'on a calculées.



Raccordements libres

En complément des raccordements tangentiels il faut pouvoir se raccorder librement sans contraintes, ce que ne font pas les splines de Cattmull-Rom, qui imposent la direction de la tangente d'entrée et de sortie des courbes. Au paragraphe précédent on a imposé des conditions de continuité différentes de ces dernières, pensant qu'elles seront plus utiles pour le topographe, on va maintenant libérer totalement les conditions d'entrée et de sortie. La tangente imposée sera celle située immédiatement après le point d'entrée, et avant le point de sortie. Ce qui fait que pour le premier et le dernier tronçons nous n'aurons plus que trois contraintes. Ces courbes ne pourront plus être des splines cubiques mais des arcs de parabole carrée assurant, au point de passage, la continuité avec les splines cubiques qui suivent. On a donc, en conservant les mêmes notations, $\vec{a} = 0$, donc les équations des arcs d'entrée et de sortie sont : $\vec{b} \cdot t^2 + \vec{c} \cdot t + \vec{d}$ avec à l'entrée :

$$\vec{P}_0 = \vec{d}, \vec{P}'_0 = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{P}'_0 = 2\vec{b} + \vec{c}, \text{ et à la sortie :}$$

$$\vec{P}_{(n-1)} = \vec{d}, \vec{P}_{(n)} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{P}'_{(n-1)} = \vec{c},$$

0 étant le premier point articulé et n le dernier. Ce qui donne, à l'entrée :

$$2\vec{b}_E = \vec{P}_0 - 2\vec{P}_{(1)} - \vec{P}_{(2)},$$

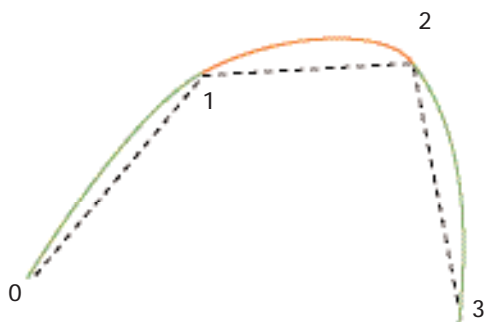
$$2\vec{c}_E = 3\vec{P}_0 + 4\vec{P}_{(1)} - \vec{P}_{(2)}, \text{ et en sortie :}$$

$$2\vec{d}_E = 2\vec{P}_0$$

$$2\vec{b}_E = \vec{P}_{(n-2)} - 2\vec{P}_{(n-1)} - \vec{P}_{(n)},$$

$$2\vec{c}_E = 2\vec{P}_{(n-2)} + \vec{P}_{(n)}$$

$$2\vec{d}_E = 2\vec{P}_{(n-1)}$$



... et pour reprendre la notation matricielle générale :

$$ME' = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & +1 \\ 0 & -3 & +4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$MS' = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stockage des données

Comment stocker économiquement les données concernant les courbes dans une banque ? Le problème est surtout de ne stocker que le minimum de nombres définissant une courbe quelconque. On a déjà opté, pour définir une courbe complexe, par une suite d'arcs de cubique ou de parabole carrée. Dans ce cas, il semble que le plus simple serait de ne stocker que les paramètres a, b, c, d pour chacune des coordonnées, c'est-à-dire le produit M.G des matrices M qui intègrent les cas de tangence, cassure, continuité etc. et les données purement géométriques de G , ce qui fait 4 fois le nombre de coordonnées par arc, soit huit dans le plan, et douze dans l'espace 3-D. On rappellera que le paramètre d est composé des coordonnées du point de passage d'origine de la courbe, et qu'en plus du stockage inévitable de ces points de passage il n'y a guère en plus que six ou huit paramètres de définition de la courbe par arc, par conséquent l'information est complète et minimisée. A l'aide de ces données, on restitue, par

des calculs simples, toutes les coordonnées des points de la courbe, avec n'importe quel pas, aussi petit qu'on veut, avec toute la précision désirée, sans réelles limites.

Rectification des courbes et surfaces en courbe

Une donnée qui peut être importante dans certaines applications est la longueur de la courbe. Il peut être intéressant de profiter du calcul des points de la courbe pour déterminer sa longueur développée.

Soit une fonction $y = f(x)$ différentiable dans un intervalle $[a, b]$, la longueur de l'arc est donnée par :

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Dans le cas général ce n'est guère pratique, sauf dans des cas très particuliers aucune solution générale n'existe, c'est pourquoi on se servira de l'ordinateur comme d'un intégrateur. On généralisera d'abord la formule au cas des courbes paramétriques ci-dessus en lui donnant la forme suivante :

$$s[a, b] = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_i^2} \cdot dt$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad s[a, b] = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)_i^2} \cdot dt$$

en discrétisant :

$$s = \sum_{i=0}^1 (\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}), \quad \text{ou} \quad s = \sum_{i=0}^1 \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_i^2} \right) \cdot \Delta t$$

On aait :

$$x(t_0^1) = a_x \cdot t^3 + b_x \cdot t^2 + c_x \cdot t + x_0; \quad \frac{dx_i}{dt} = (3 \cdot a_x \cdot t^2 + 2 \cdot b_x \cdot t + c_x) / 2$$

$$y(t_0^1) = a_y \cdot t^3 + b_y \cdot t^2 + c_y \cdot t + y_0; \quad \frac{dy_i}{dt} = (3 \cdot a_y \cdot t^2 + 2 \cdot b_y \cdot t + c_y) / 2$$

$$z(t_0^1) = a_z \cdot t^3 + b_z \cdot t^2 + c_z \cdot t + z_0; \quad \frac{dz_i}{dt} = (3 \cdot a_z \cdot t^2 + 2 \cdot b_z \cdot t + c_z) / 2$$

puis

$$\Delta x^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \Delta t^2, \quad \Delta y^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \Delta t^2, \quad \Delta z^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \cdot \Delta t^2$$

On peut ainsi calculer un périmètre d'une courbe fermée ou la longueur d'une courbe ouverte.

En outre, il peut être intéressant de calculer, dans le même temps, la surface entourée par des limites courbes. En assimilant la surface limitée par une courbe à un polygone d'un grand nombre de côtés on peut faire le calcul par la formule bien connue :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) + x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n \right]$$

Mais, en chaque point, on calcule le couple $\begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix}$ et on vient de calculer

$$\Delta x = \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \Delta t, \quad \Delta y = \left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \Delta t$$

on peut transformer la formule en :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=0}^n \left(x_i \cdot \frac{dy_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \cdot y_i \right) \cdot \Delta t + x_n \cdot y_0 - x_0 \cdot y_n \right]$$

ce qui évite de retrancher des valeurs relativement grandes, telles que, ce qui est toujours défavorable dans les calculs sur des nombres quelconques (non entiers dit "flottants"). La formule devient :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{i=0}^n (x_i \cdot \Delta y_i - \Delta x_i \cdot y_i) + x_n \cdot y_0 - x_0 \cdot y_n \right]$$

Le calcul, très rapide, peut se faire au cours d'une consultation, ce qui évitera de stocker ces données dans la banque, en outre, la précision des résultats sera fonction de la "discretisation", c'est-à-dire du pas de t adopté, sans pour autant attendre d'une augmentation de la finesse du pas des résultats plus "exacts" si les points de passage, les seuls objets des mesures, sont peu nombreux !

Courbures

La variation des courbures est un sujet d'intérêt pour le tracé des courbes de voies de circulation, on s'est largement étendu sur ce sujet en traitant des clothoïdes et des spirales dans un article sur ce sujet [2]. Les courbes qu'on vient de décrire, malgré certaines apparences, ne conviennent généralement pas à cet usage, car on ne maîtrise pas convenablement les courbures. Toutefois, elles peuvent être d'un grand intérêt dans les tracés d'avant-projet ou de chemin en montagne.

On calculera la courbure d'une spline d'Hermitte et de toute la famille qui en descend, à savoir : les splines cardinales, de Catmull-Rom etc.

On utilise la relation :

$$C^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

on a par ailleurs, voir au précédent paragraphe :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

d'où :

$$C^2 = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 = (6.a_x.t + 2.b_x)^2 = 36.a_x^2.t^2 + 24.a_x.b_x.t + 4.b_x^2$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = (6.a_y.t + 2.b_y)^2 = 36.a_y^2.t^2 + 24.a_y.b_y.t + 4.b_y^2$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = 36.(a_x^2 + a_y^2).t^2 + 24.(a_x.b_x + a_y.b_y).t + 4.(b_x^2 + b_y^2)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9.(a_x^2 + a_y^2).t^4 + 12.(a_x.b_x + a_y.b_y).t^2 + 2.(b_x.c_x + b_y.c_y).t + c_x^2 + c_y^2$$

$$C^2 = \frac{36.(a_x^2 + a_y^2).t^2 + 24.(a_x.b_x + a_y.b_y).t + 4.(b_x^2 + b_y^2)}{9.(a_x^2 + a_y^2).t^4 + 12.(a_x.b_x + a_y.b_y).t^2 + 2.(b_x.c_x + b_y.c_y).t + c_x^2 + c_y^2}$$



"Signe n° 2" photo Yvette Velay

On peut, ainsi, calculer et tracer un graphe C-s avec la formule de rectification de la courbe (voir au paragraphe précédent).

$$s_i[a, b] = \sum_i \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i^2} . dt$$

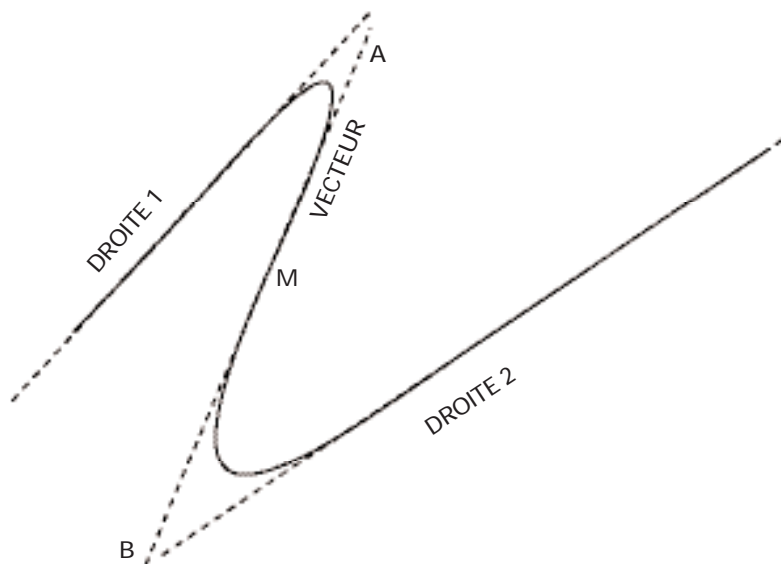
On a ainsi :

$$s = f(t) \text{ et } C = g(t), t \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$$

on peut comparer la variation de courbure d'une spline cubique à celle d'une clothoïde par exemple dans le même système de représentation.

On notera que la continuité en courbure, dite en C2, n'est pas assurée.

...



●●● Applications des courbes de Bézier simples

On est passé rapidement sur les courbes de Bézier, car les points de définition, sauf celui placé sur une droite limitée par deux autres points de définition qui l'encadrent, ne sont pas des points de passage. En outre, le degré de la courbe obtenue augmente avec le nombre de points de définition, ce qui a amené à la création des B-splines, lesquelles sont aussi des cubiques qui comme les splines de C-R n'ont pas ce défaut, mais ces courbes ne passent pas, non plus, sur les points de définition.

Toutefois, pour raccorder deux droites concourantes, une courbe de Bézier n'est que du second degré, et peut devenir utilisable. Ensuite, pour raccorder deux droites non concourantes en 3-D, au point où elles sont les plus proches l'une de l'autre, une courbe de Bézier sera une cubique qui pourrait parfaitement convenir à cet usage.

De même il sera toujours possible de faire passer une courbe de Bézier sur le point situé M à mi-distance sur la droite vecteur reliant les deux points les plus proches A et B de deux droites 1 et 2. On verra la figure un peu caricaturale ci-dessus, on notera que dans ce dernier cas la courbe est du quatrième degré et que cela peut lui donner des formes assez anguleuses.

Intersections

La description des courbes étant faite par tronçons entre deux points de passage on ne peut pas employer les méthodes mathématiques tradition-

nelles pour calculer la, ou les intersections, entre une courbe et une droite. En revanche, l'informatique permet d'employer des méthodes qui, à défaut d'être élégantes utilisent la force brutale. Les intersections éventuelles entre une courbe et une droite se déterminent en parcourant la courbe, et en calculant en chaque point sa distance à la droite, on a la relation bien connue :

Soit la droite d'équation paramétrique

$$\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{n}$$

la perpendiculaire issue du point P de coordonnées, est encore un point de cette droite. On a :

$$d = \frac{|\vec{n} \wedge (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{n}|} = |\vec{x}_0 - \vec{p}|$$

Si n est unitaire :

$$d = |\vec{n} \wedge (\vec{p} - \vec{a})|$$

$d = (p-a) \cdot \sin(\phi)$. Ce qui est évident. La solution est obtenue pour $d = 0$ ou $d = \epsilon$ aussi petit qu'on le désire.

Les intersections entre deux courbes se calculent de la même manière, c'est-à-dire de façon encore plus brutale et moins élégante : pour chaque point de la première courbe on calcule sa distance à tous les points de la seconde. On est normalement entraîné dans un processus de calcul d'une durée exponentielle, mais sur les courbes assez courtes ce n'est pas un problème.

Logiciels

On a tenu compte du fait que la lecture d'un tel article serait parfaitement

ennuyeuse sans applications mises à la disposition du lecteur. On a donc établi deux logiciels : l'un permet de tracer des courbes de Catmull-Rom ouvertes classiques ; dans le même logiciel on a donné la possibilité importante de tracer des contours fermés. Un second logiciel séparé, permet de tracer des courbes avec des contraintes de raccordement tangentes ou libres telles que décrites dans cet article. Il suffit de cliquer sur l'exécutable choisi puis d'agrandir la fiche qui apparaît à tout l'écran dont on dispose. On verra une flèche qui peut être déplacée à l'aide de la souris, on "cliquera" avec le bouton de gauche sur les positions des points choisis, un trait tireté joindra ces points de 0 à n. Puis, à la partie inférieure de l'écran, on choisira le tracé désiré et on fixera les contraintes aux extrémités. Pour le tracé des courbes fermées il est inutile, et même très nuisible, de fermer la figure soi-même, le programme le fera mieux que vous, car même en cas de double-clic accidentel sur un même point vous obtiendrez normalement une bouclette fermée passant deux fois sur ce point !

Chaque arc est distingué de ses voisins par deux couleurs rouge ou verte. En outre, le développement des courbes est calculé ainsi que la surface totale de la figure pour les courbes fermées, et la surface comprise entre la courbe et ses cordes pour les tracés ouverts, avec une règle des signes tenant à l'écriture de la formule des surfaces, le sens positif du tracé étant celui des aiguilles d'une montre, la surface positive étant à gauche de la corde, elle est négative à droite, l'inverse dans l'autre sens. Ces logiciels sont librement accessibles sur <http://perso.wanadoo/claude.million/logiciels/>. ●

BIBLIOGRAPHIE

[1] 2001-1 Claude Million : Des courbes et des lignes in XYZ n°86

[2] 1992-1 Claude Million : La clothoïde dans tous ses états in Géotop n°124

1998-4 Claude Million : Mieux que la clothoïde, la spirale adoucie in XYZ n°77

Article illustré par Yvette Velay
www.yvettevelay.com