

# L'extraction des racines carrées dans le manuscrit de l'arpenteur arlésien Bertran Boysset (~1350 - 1415)

■ Magdeleine MOTTE

*L'auteur du manuscrit 327 de la Bibliothèque Inguimbertaine de Carpentras – dit "Traité d'Arpentage" – l'arpenteur arlésien Bertran Boysset, qui écrit en provençal, a donné, pour plus de cent superficies, décrites à la fois par leur mesure en unité agraire, la séterée, et en unités linéaires d'Arles (destre de 16 palms), la mesure en destre, palm et fraction de palm, du côté du carré équivalent. Il a donc calculé plus de cent racines carrées. Comme il a souvent précisé le défaut ou l'excès des carrés, nous pouvons déduire de l'examen des données numériques : la méthode utilisée, celle de Héron, la précision qu'il recherchait ( $\pm 1 \text{ m}^2$  et les calculs approchés qui ont facilité ses calculs. Nous avons là un témoignage du passage de la méthode de Héron des mathématiciens aux utilisateurs à une date plus haute (avant 1415) que celle avancée jusque ici (XVI<sup>e</sup> siècle).*

**A**u XIV<sup>e</sup> siècle le travail de l'arpenteur provençal ne consiste pas seulement à mesurer les superficies des biens vendus, échangés ou lotis. Un travail important de mise en valeur de domaines en friche, voire de parcours pastoraux, va exiger de lui de *metre per quasens* (en quartiers) ces terres et, par conséquent, de calculer au préalable le côté des lots carrés auxquels le seigneur, ou les co-seigneurs, ont assigné telle superficie. C'est pourquoi plusieurs folios du manuscrit de Bertran Boysset (B.M. Carpentras, n° 327) sont consacrés à donner en destres les mesures des côtés de carrés dont les superficies sont, dans l'usage, comptées en séterées.

## Unités d'Arles du XIV<sup>e</sup> au XVIII<sup>e</sup> siècle<sup>(1)</sup>

**de longueur** : 1 destre = 2 canne = 16 palm ( $d = 2c = 16p$ )

**de superficie** :  $d^2$ ,  $dp$  (nommée palm carré),  $p^2$  (palm simple)

**agaires** : l'éminée, la séterée, la carterée pour les vignes  
1 séterée = 2 éminée =  $625 c^2 = 156d^2 4dp$



Nous trouvons dans ces folios 200 résultats numériques : les surfaces mesurées en séterées (par les entiers de 1 à 100 et les fractions binaires de  $1/2$  à  $1/128$ ) sont converties en unités d'arpentage ( $d^2$ ,  $dp$ ) et, pour chacune d'elles, est donné le côté du carré équivalent avec, parfois, le défaut ou l'excès de surface qu'aurait le carré construit sur le côté proposé. Boysset a donc calculé 107 racines carrées. Sur les 85 que j'ai contrôlées, soit à la plume, soit à la calculette, 69 sont justes et 14 fausses, dont 8 probablement par erreur de copie. Dans deux cas – 48 et 50 séterées – il y a incertitude, car la fraction de palm manque.

(1) La canne d'Arles mesurait 2,047 186 m ; 175 palms mesuraient le côté du carré unité agraire des "peuples des mégalithes", soit 54 "mégalithic yard" ou "mètre mégalithique". Cette unité était une des séterées de l'Aveyron jusqu'à l'introduction du système métrique (cf. Motte Magdeleine, La Cana e lo destre : essai d'histoire métrologique des Pays occitano-catalans. à paraître).

■ ■ ■ Mais, c'est la possibilité de connaître la méthode de calcul utilisée par cet artisan, à la fin du XIV<sup>e</sup> siècle, qui fait l'intérêt de ces pages.

Pour la commodité de l'exposé rappelons :

**T<sub>1</sub>**, si  $a$  est une racine carrée par défaut, à une unité près, de l'entier  $A$ , c'est à dire  $a^2 < A < (a+1)^2$ , laissant un reste ( $r = A - a^2$ ), alors  $[a + r/(2a+1)]$  est aussi racine carrée par défaut de  $A$ .

**T<sub>2</sub>**, si  $a$  est une racine carrée par excès, à une unité près, de l'entier  $A$ , c'est à dire  $(a-1)^2 < A < a^2$ , laissant un reste ( $r = A - a^2$ ), alors  $[a + r/(2a)]$  est aussi racine carrée par excès de  $A$ .

Par itération  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) fournit une suite croissante (resp. décroissante) convergeant vers  $\sqrt{A}$ .

L'usage de  $T_2$  est bien attesté au Moyen Âge<sup>(2)</sup>. Du procédé  $T_1$  J. Sésiano écrivait en 1988 : *"on considère qu'il a du être utilisé par les Grecs, mais les textes attestant de son emploi n'apparaissent qu'au X<sup>e</sup> siècle, chez les Arabes. On ne le trouve pas en Europe au XII<sup>e</sup> siècle, ou dans l'œuvre de Léonard de Pise. Et, en dépit d'une occurrence précoce dans un manuscrit (B.M. Colmar) écrit autour de 1300, il apparaît que ce procédé n'est entré dans l'usage commun qu'au XVI<sup>e</sup> siècle"*

Je me propose de montrer que l'étude des folios 66 à 87 permet d'assurer que Boysset utilisait  $T_1$ , tout en sachant minorer par la soustraction de  $[r/2a]$  lorsqu'il avait été amené à retenir une v.a.e<sup>(3)</sup> visiblement plus proche de la racine. On peut donc avancer d'un siècle et demi l'entrée de  $T_1$  dans l'usage commun, si l'on remarque que Boysset l'a probablement appris de ses maîtres vers 1360-1365, ou guère plus tard, lors de son séjour à Avignon. Il restera à préciser le cheminement de la connaissance, des Arabes (de l'Espagne ?) vers la Provence.

On observe que les mesures des côtés des carrés étudiés sont données, en destre et palm, par trois entiers positifs  $x, y, z$  sous la forme : côté =  $xd, yp/4, \pm 1/zp$ . Le second terme souligne un arrondi proche, bien visible sur les graduations du destre d'arpentage<sup>(4)</sup>.

Je ne détaillerai pas les observations qui permettent d'assurer que Boysset recherchait une précision négligeant au plus une surface de un "palm carré", soit  $pd = d^2/16 \approx 1,05 m^2$ .

J'appelle 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> étape, respectivement, la recherche de  $x, y, z$ . Deux lignes ajoutées par Boysset au paragraphe consacré à **7 séterées** retiennent l'attention. Après avoir donné la v.a.p.d. 33d 1p 1/7p et le défaut "il manque alors au carré 3 parties d'un palm, faisant 7 parties d'un palm", il ajoute "si tu les veux fais de ces 3 parties 67 parties et ce sera fait; sinon restes-en là."

Entendre : il manque au carré 3/7 dp; pour les retrouver divise 3/7 par 67.

Dans 3/7 on reconnaît, très légèrement minoré, le reste laissé par la racine carrée approchée  $a$ , soit  $r_2 = 3/7dp + 48/49p^2$ .

Et dans 67, la mesure  $(2a+1)$  minorée :

$$2a+1 = 2(33+8/(7 \times 16))+1 = (67+1/7) \text{ destre}$$

On peut voir qu'il suggère ainsi l'accroissement de 1/160 p, ce qui ramènerait le déficit à 0,08dp.

Boysset utilise donc  $T_1$ ; le lecteur pourra vérifier qu'en utilisant  $T_2$  il aurait trouvé

$$34d - 14\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p = 33d + 1\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p$$

et, à la troisième étape, un reste de  $(-1dp)$  au lieu de 3/7dp, donc une v.a.p.e. moins précise que la v.a.p.d. donnée par  $T_1$ . On peut également vérifier qu'il n'a pas cherché la racine carrée de l'entier mesurant cette superficie avec la plus petite unité disponible ( $p^2$ ) - soit 280 000. Avec  $T_1$  il aurait trouvé  $(529+3/20)p$ , c'est-à-dire  $(33d 1p 3/20p)$ . Il aurait pu, certes, substituer à 3/20 la fraction 3/21 et trouver ainsi 1/7, mais il n'avait aucune raison de le faire; l'examen de l'ensemble des résultats montre qu'il n'a privilégié aucun entier pour le choix de  $z$ . On relève, entre autres, les entiers 6, 7, 11, 17, 19, 43, 48.

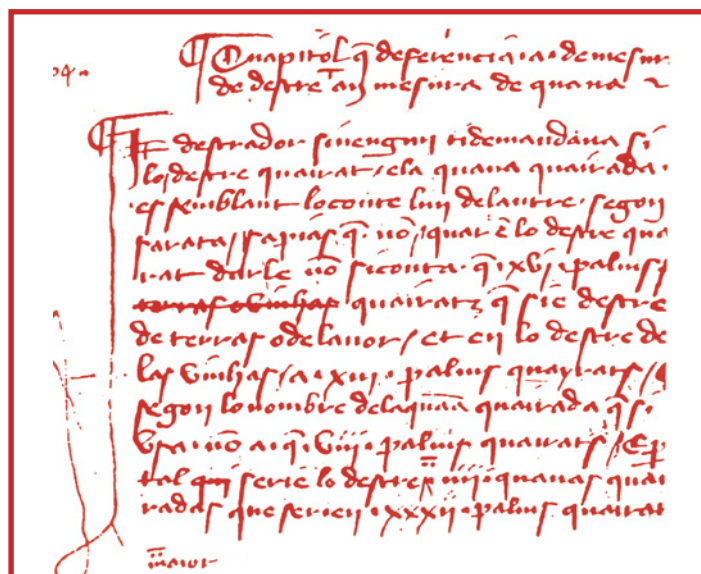
Comme nous venons de le voir Boysset sait s'il donne une valeur approchée par défaut ou par excès; il précise 50 fois le défaut ou l'excès de superficie. Au nombre des cas où ce para-

(2) Sésiano Jacques, "On an algorithm for the approximation of surds from a Provençal treatise" in Mathematics from Manuscript to Print (1300-1600), Clarendon Press, Oxford, 1988, pp. 30-55.

(3) Valeur approchée par excès; v.a.p.d.... par défaut.

(4) Cette observation ne nous autorise pas à assurer qu'aucun des palms du destre ne portait huit graduations d'environ 3,2 cm. Les dessins du manuscrit montrent le destre avec 16 divisions peintes alternativement en noir et blanc.

	1093 d <sup>2</sup> 12 dp	33d 1p 1/7 p
	193	63 x 3 = 189      76/67 = 1 + 9/67
$r_1 =$	004 x 16 + 12 dp	(66 d 1 p) 1 p = 66 dp 1 p <sup>2</sup>
$r_1 =$	76 dp	$\frac{10 - 1/16}{67 + 1/8} \rightarrow \frac{10 - 1/16}{70 - 7/16} = 1/7$
$r_2 =$	10 dp - p <sup>2</sup> = (10 - 1/16) dp	(66 d + 15/7 p) 1/7 p = 9 dp + 3/7 dp + 15/49 p <sup>2</sup>
	- 10 dp + 4/7 dp - 15/49 p <sup>2</sup>	= 10 dp - 4/7 dp + 15/49 p <sup>2</sup>
$r_3 =$	4/7 dp - 64/49 p <sup>2</sup>	
$=$	3/7 dp + 48/49 p <sup>2</sup>	Calcul du côté d'un carré de 7 séterées par le procédé $T_1$



#### XIV de la différence entre la mesure avec le destre, long ou court et la mesure avec la canne

De plus, arpenteur, si quelqu'un te demandait si le calcul en destres carrés est semblable à celui en cannes carrées, toutes proportions gardées, sache que non.

Car le destre carré d'Arles ne contient que 16 empan carrés, qu'il s'agisse du destre des terres ou des labours.

Quant au destre des vignes il contient 13 empan carrés.

Et le mode de calcul avec la canne carrée, lorsqu'on l'utilise, veut qu'elle ne contienne que 8 empan carrés. Si bien que le grand destre vaut (alors) 4 cannes carrées ou 32 empan carrés.

C'est pourquoi retiens qu'il ne revient pas au même de mesurer en destres ou en cannes, car 16 empan carrés du grand destre ne valent que un empan carré et 13 empan carrés du petit font un empan carré (alors que) 8 empan carrés d'une canne valent un empan carré, d'après le calcul des charpentiers et des artisans.

graphe ne figure pas, on trouve les 12 cas de racine exacte, mais aussi des cas où l'écart, de l'ordre de  $p^2$ , est négligeable.

Comment Boysset a-t-il choisi l'entier  $z$  ? Un certain nombre de valeurs de  $z$  m'ont longtemps intriguée et j'ai pataugé avant de comprendre sa démarche, très sûre, pour substituer au quotient compliqué à considérer à la troisième étape un minorant de la forme  $1/z$ .

Observant le cas de 87 séterées, soit  $13593d^2$  12dp, pour lequel il donne un côté de  $116d$  ( $9\frac{1}{2}-1/43$ )p j'étais très surprise qu'il ne propose aucune des deux fractions  $1/41$ ,  $1/42$  que suggérerait le décimal donné par la calculette. Certes, en majorant  $z$ , et donc en minorant  $|r/2a|$ , il conservait une v.a.p.e. à peine moins précise.

En fait l'explication est très simple. Boysset ayant vu qu'il était intéressant de retenir la valeur par excès  $116d$  91/2p devait, à la 3<sup>e</sup> étape, appliquer  $T_2$  en retranchant la valeur absolue du quotient  $r/2a$ , soit  $q = (5+5/8+1/64)/(233+3/16)$ , ou un de ses minorants. Sans calculette, il lui fallait être plus habile que moi, qui avais consciencieusement calculé

$$q = 361/14924 \approx 1/(41+123/361) > 1/42,$$

et il aura probablement choisi la minoration de  $q$  par  $q' = 5\frac{1}{2}/234 = 11/468$ . Alors, la division euclidienne de 468 par 11, de calcul mental aisé, faisait apparaître le quotient 42 et le reste 6, et dictait le choix de 43. Le reste est alors peu différent de  $(-0,2dp)$ .

On explique de même les réponses qu'il donne pour 30, 31 et 34 séterées :

30 séterées :	côté proposé	68 d	$(7\frac{1}{2} - 1/19)p$
31 séterées :	côté proposé	69 d	$(9\frac{1}{2} + 1/19)p$
34 séterées :	côté proposé	72 d	$(14\frac{1}{4} - 1/17)p$

**30 séterées :** la correction  $(-1/19)$  est excellente ; elle résulte de trois minorations qui maintiennent une solution par excès. Minorations du quotient à retrancher  $q = |r/2a| = (7\frac{1}{2} + 1/64)/(137-1/16)$ . A ce quotient Boysset aura substitué le rapport plus maniable  $(7\frac{1}{2}/137 = 15/274)$  et

la division euclidienne de 274 par 15 aura entraîné la troisième, avec le choix de 19, car  $274 = 15 \times 18 + 4$ .

**31 séterées :** dans ce cas, où il convenait de calculer  $r/2a + 1$ , avec  $r = 7 + 3/8 - 1/164$  et  $2a + 1 = 140 + 3/16$ , Boysset aura probablement osé la majoration très faible du numérateur, qui lui donnait alors un rapport très simple après multiplication des 2 termes par le binaire 16 :  $r/2a + 1 \approx 118/2243$ . Le reste de la division euclidienne ( $2243 = 118 \times 19 + 1$ ) autorisait la majoration très faible substituant  $(1/19$  à  $1/19 + 1/118)$ , et refusait le choix de  $1/20$  beaucoup moins précis.

**34 séterées**, soit  $5312,50 d^2$  : dans ce cas, l'entier  $z$  proposé par Boysset – très satisfaisant – semblait d'abord avoir échappé à un traitement aussi simple. En effet, en appliquant  $T_1$  on est conduit à choisir, à la 3<sup>e</sup> étape, la valeur approchée par excès  $72d$   $(14+1/5)p$  de précision acceptable (excès  $\approx 1,4dp$ ). Cette mesure s'écrivant aussi  $72d$   $(14\frac{1}{4}-1/20)p$ , on en déduit que  $(72d$   $14\frac{1}{4}p)$  assurant une v.a.p.e., la substitution de  $1/17$  à  $1/20$  ne pouvait que fournir une meilleure v.a.p.e., ou une excellente v.a.p.d. La calculette vérifie la première éventualité, avec un excès de superficie négligeable  $(1/10dp)$ .

Ce qui précède suggérerait que Boysset, ayant reconnu avec le premier reste l'intérêt de prendre dès la deuxième étape  $14\frac{1}{4}p$ , soit  $y = 57$ , aurait calculé

**Bertran Boysset** (prononcer Bouissé) est un arpenteur arlésien du XIV<sup>e</sup> siècle. Il aurait vécu de 1350 à 1415. Il nous a laissé un manuscrit en provençal connu aujourd'hui sous le nom de "traité d'arpentage" et conservé à la bibliothèque Inguimbertaine à Carpentras. Une partie de ce manuscrit de 315 folios (folios 33 à 65) que son auteur nommait "la siensa de destraz", la science de "destrer" (mesurer avec une règle de 1 destre araduée en empan) a été transcrite une première fois par P. Pansier et publiée dans "Annales d'Avignon et du Comtat Venaissin" en 1926.



■ ■ ■ alors  $r_2 = -(8+177/256)dp$  et le rapport  $q = r_2 : (144+57/32)$ , d'où la soustraction de valeur absolue de  $q$  ou d'un de ses majorants :  
 $(8+3/4)/(145+3/4+1/32) = 35/(583+1/8) = 1/(16+23/35+1/280) \approx 1/17$ .  
 D'autres cas confirment sa démarche et permettent de préciser l'attitude de Boysset dans sa recherche d'une bonne valeur approchée.

**40 séterées**, soit 6250 d<sup>2</sup> : on trouve 79d (1-1/11)p avec un reste  $r_3 = 4/11dp + 10/11p^2$ . Boysset ayant donné 79d (1+1/11)p et un défaut de 4/11dp, on doit conclure à une simple distraction, l'écriture de mais *au lieu de mens*.

**99 séterées**, soit 15468 d<sup>2</sup> 12 dp. On trouve 124d (6-1/40)p. Boysset propose pour le troisième terme (-1/41). Le nôtre est déduit du calcul de  $q = |r/2a|$ , où  $r_2 = -(6^3/4)dp$  et  $2a = 248^3/4$ . D'où :  
 $q = 25/995 = 5/199 = 1/(39+4/5)$

qui indique que  $z = 39$  donnerait une v.a. moins précise que la v.a.p.e. donnée par ( $z = 40$ ) avec un excès de 0,03dp. Le choix de Boysset me surprenait et tenait en échec. Jusqu'à ce qu'il m'apparaisse qu'il fallait exclure une erreur de calcul, mais qu'on pouvait envisager l'oubli de  $1/4$  au numérateur de  $q$ . En effet, on a alors  $q' = |6/248^3/4|$  et  $1/q' = (248^3/4) : 6$ , de calcul mental aisé :  $248^3/4 = 240+6+2^3/4 = 6(41+11/24)$ . L'inverse de 41 étant plus proche de  $q'$  que celui de 42, le choix de Boysset, qui privilégie, ici aussi, la précision, devait être 41.

La démarche de Boysset est sûre, et son attitude pragmatique :  
 - il utilise  $T_1$  mais n'oublie pas d'ajouter  $r/2a$  chaque fois que  $r$  est négatif ;  
 -  $q$  étant le dernier quotient de la forme  $r/2a + 1$  ou  $|r|/2a$  et  $1/q$  étant encadré par les entiers  $n$  et  $(n + 1)$ , il retient pour  $z$  celui qui minimise la différence  $|q - 1/z|^{(5)}$ .

Bien que Boysset nous ait fait savoir, dans le seul passage en latin de son manuscrit – que l'on doit prendre au sérieux<sup>(6)</sup> – qu'il tenait son savoir d'arpenteur du notaire Arnaut Delpuey et d'un livre de celui-ci ayant appartenu à Arnaut de Villeneuve, il est évident qu'il n'a pu trouver dans le livre du célèbre médecin des calculs et des mesures dont l'usage ne pouvait guère dépasser la vaste communauté d'Arles. En effet, à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, aucune commune de Provence ou du Languedoc n'a déclaré la canne et la séterée de cette ville.

Pour l'acquisition de ses connaissances en arithmétique et cosmographie on peut penser, soit à un enseignement reçu d'un membre de la communauté juive, soit qu'il ait mis à profit son séjour à la Cour Pontificale d'Avignon pour compléter la solide instruction de base reçue à Arles, qui lui avait ouvert les portes de l'administration pontificale.

Ses "Chroniques" ont depuis longtemps retenu l'attention des historiens. Il est temps qu'ils sachent ce que le TRAITE D'AR-PENTAGE nous apprend de ses connaissances scientifiques : en arithmétique, on vient de le voir, en cosmographie<sup>(7)</sup>, en géométrie. En géométrie, il est très remarquable pour son temps qu'il propose un seul calcul pour la surface de tout quadrilatère (on ne trouve nulle part le vocabulaire des quadrilatères particuliers)<sup>(8)</sup> : le double du produit de deux mesures - la distance des milieux de deux côtés opposés et celle d'un des

autres milieux à la "médiane" que l'on vient de jalonner.

Remarques. Il m'a paru indispensable, pour alléger l'écriture et en accroître la lisibilité, de revenir à l'écriture  $3^1/4$ , désuète, non pédagogique, mais que suit l'expression orale.

Compléments. Après avoir observé ci-dessus ma présentation du calcul du côté du carré de 7 séterées – qui ne préjuge en rien de celle des calculs de Boysset, que nous ignorons – le lecteur pourra s'exercer à calculer celui du carré de 6 séterées, d'abord par cette méthode (il trouvera alors celui que donne Boysset 30d (10-1/10)p), puis par la méthode de l'arithmétique en langue occitane dite "de Pamiers"<sup>(2)</sup>, par exemple avec la suite décroissante  $1/2, 1/3, 1/4...$  et à partir de l'entier mesure de la surface en canne carrée (il trouvera alors 30d (10-2/25)p). ●

**Magdeleine Motte**, agrégée de mathématiques et membre de l'Institut d'Etudes Occitanes a traduit à la demande de Francis Delebecque, alors directeur de l'ENC "*la siensa de destrair*", soit une trentaine de folios du Traité que Bertran Boysset, arpenteur arlésien, a rédigé à l'intention des futurs arpenteurs. Travail publié par l'ENC en janvier 1988.

(5) Toutefois il se départira de cet impératif quand le nombre le moins précis lui assure déjà une précision très suffisante et de signe connu. cf. 30 séterées.

(6) Motte Magdeleine, Le Traité d'Arpentage de Bertran Boysset (~1345-1415). Transcription, traduction notes et commentaires, à paraître.

(7) Georgelin Yvon, Marseille à la conquête du ciel. L'astronomie à Marseille et en Provence de Pythéas à Charles Fabry (Ville de Marseille, Unité de Provence, Observatoire de Marseille, 1994).

(8) Ce que n'a pas vu Pierre Portet (thèse, Université de Toulouse-Le Mirail, 1995).

## ABSTRACT

*The author of the manuscript 327 from the Carpentras Inguimbertaine Library - known as "Traité d'Arpentage" - the land's surveyor Bertran Boysset, from Arles, who writes in Provençal, gave about more than a hundred surfaces - described at the same time by their measure in surveyor's measure, the "sestairada", and in linear units from Arles (destre subdivided into 16 palms [spans] - the measure for the equivalent square side given in destres, palms and fraction of a palm. So, he calculated more than a hundred of square roots. As he often pointed out the default or excess of the equivalent square, we can then deduct, after examination of these numeral data, the algorithm he used - which is Heron's one, the degree of accuracy he wanted (about 1 m<sup>2</sup>) and the approximations that made easier his calculations. Here is a testimony on Heron's algorithm practice transmitted from the mathematicians to the users at a time earlier (before 1415) than the one known up to now (16<sup>th</sup> century).*

# Paris : des hauts et des bas

## Paris de Haut en Bas

■ Gilles THOMAS

*Sous Paris se trouve un autre Paris, ou plus exactement le même Paris, mais figé il y a plus de 200 ans. On parle à son sujet de la "doublure topographique du Paris du Siècle des Lumières". C'est Paris avec ses artères, ses carrefours, ses places, ses escaliers, ses noms de rues, des indications de monuments, des repères de nivellement... Sous Paris c'est toujours Paris !*

**N**ous pourrions vous parler, à la manière de David Vincent, de "marquages étranges d'un autre temps. Leur localisation : les sous-bassements. Leur but : couvrir la France entière. Le piéton Parisien les a vus. Pour lui, tout a commencé par une marche attentive, le long d'une rue quelconque de la capitale, alors qu'il cherchait un raccourci qu'il ne trouva jamais. Cela a commencé par un repère abandonné, et par un homme que le manque d'information avait rendu trop curieux pour interpréter ces marques. Cela a commencé par l'apparition d'une nef venue d'une autre époque. Maintenant, le piéton parisien saura que les repères sont là, qu'ils ont ces formes métalliques, et qu'il lui faut convaincre un monde incrédule que leur présence a été conçue pour durer." Et effectivement, ils sont désormais bien "incrustés" parmi nous et ce depuis plusieurs générations. Nul ne les remarque plus malgré leur omniprésence parce que justement l'invasion a commencé il y a bien longtemps, bien plus qu'il n'y paraît ! Nous voulons parler des repères de nivellement.

Il n'est pas question ici de refaire l'histoire du nivellement (voir à ce sujet l'article de Jean Allemand le bien nommé !), ni l'historique de ceux apposés dans Paris – réseau Bourdalouë, réseau Lallemant (justement), réseau IGN –, mais d'apporter un éclairage particulier (et ils en ont bien besoin de par leur localisation) sur des repères de nivellement beaucoup plus discrets... parce que

situés à une vingtaine de mètres en moyenne de ceux que l'on croise sans les voir, mais en dessous, au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, souvent dénommées par abus de langage "catacombes".

**Petit rappel au sujet des plus récents repères que l'on peut voir à Paris... en surface (pour les plus anciens se reporter à l'article indiqué *supra*)**

Ces repères de nivellement, qui sont encore très abondants sur les murs de la capitale, sont de trois types. Il y a bien sûr ceux libellés "**Nivellement général de la France \* Ville de Paris**" (modèle circulaire, de 12,5 cm de diamètre extérieur); du type Bourdalouë, leur pose a commencé avant 1879. On en trouve d'autres portant l'inscription "**Ville de Paris / Repère d'altitude**" (de format octogonal; 12,5 cm de diamètre extérieur, 7 cm de diamètre intérieur, comportant un téton en partie sommitale). Il en existe aussi de tout petit, ronds de 7,5 cm de diamètre (avec "téton" en partie sommitale); ils sont de type Lallemant. Si la plupart de ces repères ont été volontairement déposés de leur plaque indiquant l'altitude du lieu qui était insérée dedans, en cherchant bien on en trouve de très nombreux encore intacts; ils ne sont pas bien sûr majoritaires par rapport au repères devenus muets, mais ce ne sont pas des cas aussi rares que certains le pensent.



photo : © Franck Albaret

Sur ce mur du jardin privé de l'Observatoire, on remarque, espacés d'environ 2 mètres, deux repères de nivellement : l'un rond à une hauteur normale (au niveau de la cheville), l'autre datant des années 1840 deux mètres plus haut. S'il se trouve dans cette position incongrue, c'est par suite du nivellement de la rue Saint-Jacques entre les boulevards de Port-Royal et Arago, lors des travaux d'urbanisme décidés par Haussmann (décret du 13 mars 1895). Le mur d'origine, qui a alors été déchaussé, a été repris en sous œuvre par l'ouvrage de soutènement en pierres de couleur plus claire que l'on voit sur la photo.



■ ■ ■ Pour mémoire, le premier relevé systématique du relief de la capitale ne date que de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Les travaux sur le terrain commencèrent le 29 septembre 1857 sous la direction de Paul-Adrien Bourdalouë, faisant fonction d'ingénieur aux Ponts et Chaussées ; moins de 7 ans plus tard, 15000 repères étaient mis en place sur tout le territoire français. Le Service du nivellement général de la France est quant à lui né en 1884, avec comme directeur (jusqu'à sa retraite en 1927) Charles Lallemant, ingénieur des mines. Après 50 années de service, il avait déjà à son actif l'installation de plus de 200 000 repères.

## Où l'on va voir que ce n'est pas parce que l'on est à l'origine de la création du système métrique, que l'on sait être homogène dans les mesures d'altitude

Il ne faut pas oublier que malgré la réussite de cette couverture de la France, l'anarchie régnait avant 1879, au sein de la Ville de Paris : plusieurs référentiels "zéro" étaient en effet utilisés ce qui fait qu'il n'y avait aucune homogénéité dans l'étendue du territoire de la Capitale quant aux différents nivellements en vigueur.



photo : © Franck Albaret

**Cette rose des vents peut sembler inversée, mais il faut se la représenter inscrite au niveau du ciel des galeries souterraines, donc au dessus de la tête.**

Le service de la Navigation de la Seine, la Compagnie du chemin de fer d'Orléans (ligne de Limours), la Compagnie des chemins de fer de l'Ouest (ligne du Champ de Mars), la Compagnie des chemins de fer de l'Est avaient adopté le plan de comparaison du nivellement général de la France d'après lequel le 0 du pont de la Tournelle était à la cote de 26 m 285 (donc basé sur le marégraphe de Marseille).

Le Service Municipal de Paris, l'Inspection Générale des Carrières souterraines (= IDC), la Compagnie du che-

min de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée avaient conservé le plan de comparaison de 1842, pour lequel le 0 du pont de la Tournelle est à la cote de 26 m 25 (niveau moyen de la mer au Havre... non-destination du PLM !)

La Compagnie du chemin de fer d'Orléans, ainsi que la Compagnie du chemin de fer du Nord, avaient conservé quant à elles, le plan de comparaison antérieur à 1842 d'après lequel le 0 du pont de la Tournelle est à la cote de 27 m 60 (précédent niveau moyen de la mer au Havre).

Quant au Service ordinaire et au Service vicinal du département de la Seine, ainsi que la Compagnie des chemins de fer de l'Ouest, ils n'avaient pas de plan de comparaison spécial ; ils se rattachaient tout simplement aux repères les plus voisins du nivellement général de la France.

On le voit, tout cela était une joyeuse pagaille parfaitement organisée et assumée, ce que la Sous-Commission pour l'établissement d'un repère fixe départemental qualifiait, par un doux euphémisme, de "situation aussi complexe que fâcheuse".

Pour avoir encore de nos jours une idée visuelle de la coexistence de ces différentes échelles, il suffit de se rendre au pont de la Tournelle et de regarder le quai de Béthune. Plusieurs échelles juxtaposées sont encore présentes, bien que suite à des travaux de "restauration" du parement du quai en question (à la toute fin du XX<sup>e</sup> siècle), l'échelle la plus à l'extrême droite ait disparu, tandis que celle à côté de l'anneau d'amarrage des bateaux a été amputée de la moitié supérieure de ses graduations. Les basses eaux de la Seine au pont de la Tournelle durant l'été 1719 avaient été choisies comme zéro de référence. En effet ce pont était le premier que rencontraient les bateaux entrant dans Paris en amont, le niveau de l'eau était donc important à la fois pour la navigation, mais *a fortiori* aussi pour le simple passage sous la voûte, d'autant plus que le commerce utilisait abondamment la voie fluviale comme moyen de transport. Au sujet de cette échelle, voir ci-contre ce qui a été écrit dans les "Annales des mines" de 1819 (1<sup>re</sup> série, tome IV, page 504).



photo : © Franck Albaret

À la base de cet escalier, remarquez la conversion du système pieds / pouces en système métrique au 1/10<sup>e</sup> de mm. Quand au repère de nivellement à droite (cote 36.36), il est indexé de la lettre A car c'est le premier de sa série (ce que confirme sa localisation à la base d'un escalier).





L'un des rares repères de nivellement du type 7.5 cm avec téton apposés sous Paris. Il porte sur le pourtour "Nivellement Général".

**Où l'on va maintenant découvrir que bien d'autres repères de nivellement sont lisibles dans Paris, mais cette fois-ci avec le sens de "à l'intérieur", c'est-à-dire "sous Paris"**

Trémery ayant été Inspecteur général des Carrières de Paris de 1831 à 1842, il n'est en conséquence pas surprenant de découvrir un certain nombre de repères de nivellement sous Paris. Et effectivement, en nous plongeant dans les galeries de servitude de

l'Inspection générale des carrières nous allons en trouver d'autres. Ces repères de nivellement qui sont plus discrets parce que au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, datent aussi de la mi-XIX<sup>e</sup> siècle. Certains sont gravés directement sur la masse en place, d'autres sur les moellons de maçonnerie des piliers de confortation : ils indiquent alors la cote d'altitude du lieu souterrain (avec comme référence le zéro de l'échelle du pont de la Tournelle de 1719), ainsi qu'une précision supplémentaire : le recouvrement, c'est-à-dire

**Note sur la hauteur de l'Observatoire royal au-dessus du zéro de l'échelle du pont de la Tournelle, à Paris, par Trémery, ingénieur en chef au corps royal des mines**

*"D'après des nivellements (sic) géométriques exécutés dernièrement, avec tous les soins possibles, par M. Trémery, ingénieur au Corps royal des Mines, et par MM. De Lamotte et Louis Hassenfratz, géomètre, attachés au Bureau des Carrières du département de la Seine, la hauteur du seuil de la porte du nord de l'Observatoire royal, par rapport au zéro de l'échelle du pont de la Tournelle, est de..."*

mètres  
34,471

*Dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes (années 1815), M. de Prony a fait connaître des nivellements (re-sic) qui avaient déjà donné, pour la hauteur dont il s'agit*

*34,474*  
Différence 00,003

*Il existe un accord remarquable entre les hauteurs que nous rapportons ici. La très petite quantité, dont le résultat publié par M. de Prony excède celui récemment obtenu, peut-être tout à fait négligée, puisqu'elle est seulement de trois millimètres."*



photos : © Franck Albarét

**Repère de nivellement strictement à l'aplomb de ceux de surface de la page 63. Nous sommes donc à plus de 21 m sous le trottoir, à une altitude par rapport au "zéro" du pont de la Tournelle de 10 m 68. La consolidation sur laquelle est visible ce repère date de 1806 : c'est la 17<sup>e</sup> tranche de travail exécutée sous Charles-Axel Guillaumot (d'où le G) premier Inspecteur général des carrières du département de la Seine.**

la profondeur de la galerie par rapport au sol de surface.

À propos de ces indications de profondeur en carrière, pour la petite histoire (qui n'en est pas moins une trace palpable de la grande Histoire), au niveau des escaliers d'accès au réseau souterrain de l'IDC, lors de leur création à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, en surface était indiquée la "profondeur" en pieds/pouces tandis que à l'opposé dans les carrières c'était la "hauteur" qui était gravée dans ce système de mesure. Lorsqu'en 1795 pour unifier le territoire français fut adoptée une nouvelle unité de longueur, universellement connue sous le nom de mètre, celui-ci fut défini comme on le sait comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ; pour une personne habituée à manier les anciennes mesures physiques "corporelles", cette définition étaient pour le moins absconse (d'ailleurs qui de nos jours visualise vraiment quelle dimension représente un méridien terrestre !). Et donc, lorsque l'on demanda de



photos : © Franck Albaret

**Deux indications visibles dans le "Pôle Haussmann - St-Lazare" : la première fichée dans un mur, la seconde enchâssée dans le sol.**

convertir les mesures de ces escaliers de l'Inspection, cette conversion se fit de manière purement mathématique en s'arrêtant au 4<sup>e</sup> chiffre après la virgule, et on s'ingénia alors à graver la nouvelle donnée au dixième de millimètre ce qui est superfétatoire pour l'usage que l'on faisait de ces valeurs; mais on conçoit bien que si on ignore ce que représente vraiment un mètre, on ne peut avoir aucune idée du millimètre!

Revenons à nos repères souterrains. En plus des deux valeurs chiffrées, ces repères sont agrémentés d'un indice alphabétique, lié à l'ordre d'établissement de la série de nivellements. Pour installer le premier repère d'une série, on se positionnait à la base d'un puits ou d'un escalier; on connaissait ainsi facilement la profondeur du lieu et par différence avec l'altitude de la surface on en déduisait l'altitude de la galerie. Ce premier repère était donc gratifié de la lettre A, puis comme la mesure des autres repères était réalisée par une succession de levés topographiques, on les déclinaient suivant un ordre alphabétique: B, C, D, etc. En outre, comme plusieurs séries de repères peuvent être amenées à se côtoyer, pour identifier quel repère appartient à quelle série, on peut aussi indexer les séries: AA, AB, AC, AD, etc., voire A1, B1, C1, D1, etc. (cas dans le "Grand Réseau Sud" des carrières sous Paris). Dans les galeries de carrière du 13<sup>e</sup> arrondissement, on trouve aussi une indexation du type A1, B1, C1, D1, etc., tandis que dans les anciennes carrières sousminant le Val-

de-Grâce, ce sont des indexes numériques gravés en exposants: A<sup>2</sup>, B<sup>2</sup>, C<sup>2</sup>, D<sup>2</sup>, etc. Les repères de ce lieu précis et confiné présentent en plus une particularité, en ce sens qu'ils sont basés sur le système Bourdalouë: ils n'indiquent que l'altitude de l'endroit par rapport à la Méditerranée... ce qui est de peu d'usage à cet emplacement.

Il existe aussi dans les anciennes carrières sous Paris quelques rares exemplaires de repères modèle "7,5 cm avec téton". Ceux qui ont été trouvés pour l'instant se comptent sur les doigts de la main. Ils sont libellés "Nivellement général" mais ni le Service de nivelle-

ment de la Ville de Paris questionné, ni l'IGN ne revendiquent les avoir posés. Comme ils se situent dans des zones de carrières qui ont servi pour les très nombreux travaux pratiques de topographie organisés par différentes écoles d'ingénieurs de Paris jusqu'à la fin des années soixante-dix (successivement l'École Centrale, l'École des Mines, et l'École Supérieure de Géomètres et de Topographes dite aussi SupGéTo), il se peut qu'ils aient été installés au cours de l'un de ces exercices. Si l'un de vous possède la réponse... merci d'en faire profiter la rédaction.

**Où l'on constate que moins on est précis, plus on se permet d'être visible (pour faire oublier les inexactitudes) sans pour autant être vu!**



photo : © Franck Albaret

**Ce repère est le sixième (car désigné par la lettre F) de la série indexée 1 située sous le Val-de-Grâce. Lui aussi est à un emplacement inhabituel puisque à près de 3 mètres du sol de la carrière. Cette position résulte du décapage de la carrière lors de l'aménagement du site en abri de Défense Passive au moment de la deuxième guerre mondiale (les remblais ont été éliminés pour rendre apparent le banc de roche sous-jacent, afin d'y faire reposer les piliers de l'abri).**

Derniers avatars anecdotiques des repères de nivellement, ceux qui ont été posés lors de la construction de la ligne de RER ÉOLE, dans le "Pôle Haussmann - Saint-Lazare", et qui rejoignent de par leur localisation les repères des carrières sous Paris; mais quelles sont les personnes qui les connaissent? Pourtant cette fois-ci il n'est plus question de discrétion dans le format des dits-repères, qui n'en sont néanmoins pas très précis, car ils ont surtout été mis comme ornement décoratifs. Mais ce n'est pas parce qu'ils sont les plus gros de tous les repères existants à Paris, qu'ils sont les plus remarquables. Il est en revanche conseillé de





photo : © Sébastien Zelenchowski

À Saint-Germain en Laye (ancien département de Seine-et-Oise), il est aussi possible de trouver des repères de nivellement ayant comme référentiel le pont de la Tournelle.

faire davantage confiance à la valeur chiffrée lorsque l'indication est donnée au niveau du sol, que si elle se trouve à hauteur des yeux, ayant été apposée à cet endroit pour une meilleure lisibilité ; pour preuve, on rencontre par exemple un repère (à hauteur des yeux) nous indiquant que nous nous trouvons à 24,40 m au-dessous du niveau de la rue, et après avoir descendu encore 8 marches, nous trouvons la même indication encastrée dans le sol !

Ces repères mesurent 30 cm de diamètre intérieur, et mesurés avec leur couronne biseautée 42 cm. Ils sont soit enchâssés dans le sol (dans ce cas une flèche indique en plus la position du Nord, que l'on suppose magnétique bien qu'il manque la date de réalisation<sup>1</sup>), soit fichés dans les murs de la station et ses nombreux couloirs de correspondance. Dans la très grande majorité des cas, une indication supplémentaire identifie le lieu : niveau supérieur, terrasse supérieure, salle des billets, passerelle supérieure, passerelle intermédiaire, niveau inférieur, salle inférieure, niveau quais. Tandis qu'au

niveau des accès à partir de la rue, on trouve le même style de repères, mais nous donnant cette fois la cote d'altitude par rapport au niveau de la mer.

Il ne faut pas que l'arbre que constitue l'intérêt de ces "repères", cache la forêt de repères plus anciens. Autrement dit n'oubliez pas la question ouverte au cours de cet article (et qui le demeure pour l'instant !) concernant les repères métalliques visibles dans les anciennes carrières souterraines de la ville de Paris : qui est à l'origine de leur installation ? ●

**Gilles THOMAS**

Technicien à la DPE de la Mairie de Paris

## Bibliographie

"Les plaques de nivellement", p. 44-45, par **Marc Declerck**, in Paris Villages (le magazine du patrimoine parisien), n° 9 février/mars 2005.

"Atlas du Paris souterrain", ouvrage collectif sous la coordination de **Alain Clément et Gilles Thomas** ©Parigramme 2001 (récompensé par le Prix Haussmann 2002).

"Le nivellement de Paris", par **Alain Clément**, page 23-37, in Liaison-SEHDACS n° 13 (1998) ;

Revue XYZ, n° 76 (3<sup>e</sup> trimestre 1998), p. 82-90 : "Paris et ses nivellements au cours des temps" par **Jean Allemand**.

"Les nivellements de Paris" par **Alain Clément**, page 60-68, in Liaison-SEHDACS n° 8 (1988).

"Le nivellement général de la France. But et origines de ce service, son organisation actuelle, son importance utilitaire et scientifique", in La Nature du 15 août 1934 (n° 2935), p.145-151, par **Jacques Boyer**.

"Nivellement général de la France. Établissement d'un repère fixe départemental" Rapport de la sous-commission. Paris, le 1<sup>er</sup> mai 1879 : **Vauthier, Grégoire, M. de Fontanges, H. Bernard, E. de Villiers du Terrage** rapporteur. Publication du Ministère des Travaux Publics - Département de la Seine.

"Plan-relief du sol de la ville de Paris en 48 divisions routières et à l'échelle d'un millièmètre", rapport de **Emmery** du 31 octobre 1839 (Archives de la Seine : cote V801 439) ;

"Hauteur de Paris au dessus du niveau de la mer et opération pour rattacher tous les nivellements aux nivellements de la carte de France", rapport de **Emmery** du 20 octobre 1839 (cote V801 439) ;

"Pose et nivellement de 500 repères en fonte aux armes de la Ville", rapport de **Emmery** du 14 décembre 1836 (cote V801 437).

## Remerciements

Merci à Gérard Duserre de l'ASNEP pour la retranscription intégrale des documents V801, et Mireille Skrzyrbak pour sa disponibilité.

## ABSTRACT

*Under Paris exists another Paris, or more precisely an image of what Paris looked like more than 200 years ago. We used to name it "the topographic blueprint of the XVIII<sup>th</sup> century in Paris". It's the city with its streets, crossings, stairs, streetnames, monuments' names and ground level indications. Below Paris you still walk in Paris !*

(1) La convention veut que le Nord magnétique soit maintenant indiqué avec la date de réalisation, puisqu'il fluctue (les cas les plus extrêmes étant les inversions de pôle magnétiques connus au cours des temps géologiques), contrairement au Nord géographique. Il est à noter que dans les galeries de servitude de l'IDC sises au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, il est aussi possible de trouver des roses des vents (une dizaine ont été localisées pour l'instant). Elles sont, au contraire de celles du pôle ÉOLE qui sont positionnées sur le sol, écrites au pochoir au niveau du ciel de la carrière. Les quatre points cardinaux fleurissent bon le XVIII<sup>e</sup> siècle puisque on y lit Nord, Couchant, Levant et Midi, et effectivement si on a la curiosité de prendre une boussole, on relève une différence de 20 degrés entre l'indication donnée par l'instrument de mesure et la flèche pointant le nord. Ceci est tout à fait conforme à la dérive magnétique puisque elle est évaluée à une moyenne de un degré tous les dix ans, et comme ces indications d'orientation ont été inscrites à la toute fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, la différence est cohérente avec ce que nous indique la science géologique.