

# La modélisation des voies routières

■ Claude MILLION



Vue aérienne de l'échangeur du Val Maubuée (A4 / N104) à Noisiel et Lognes / Marne-la-Vallée.

© Iconothèque Epamarne / Eric MORENCY / 1998

*Lorsqu'on modélise une voie routière ou ferrée on cherche à obtenir un résultat meilleur que ce que donne le relevé tel qu'il est obtenu par des mesures brutes en introduisant des connaissances préalables sur la géométrie des voies. C'est pourquoi on a grand intérêt à utiliser des modèles utilisés couramment pour implanter ces voies au moment de leur création à l'exclusion de tout autre modèle qui n'apporterait aucune information.*

**L**a modélisation des voies, que ce soit routières ou ferrées, semble être devenu une pratique courante utilisée afin de conserver des documents numérisés décrivant ces ouvrages, dans le but de disposer d'une documentation permanente. Notre propos n'est pas d'en traiter le mode de lever, cela a déjà été fait avec brio, d'abord pour les voies ferrées [4], puis plus récemment pour les voies routières [8] et [10] avec le lever des détails de la voie. Au demeurant, il est surtout basé sur l'utilisation d'un récepteur mobile GPS, associé ou non à une station totale ou d'un LIDAR, embarqués sur un véhicule ferré ou routier recevant par ailleurs les signaux d'un récepteur fixe [4] ou d'une station d'un réseau géodésique permanent [8].

C'est, tout au contraire, le traitement ultérieur des mesures qui va nous intéresser, il semble en effet que les méthodes divergent singulièrement, et c'est ce qui est intéressant.

Soit on considère que ces ouvrages sont des assemblages de courbes connues parfaitement définies, soit, au contraire, on les modélise à l'aide de courbes pouvant s'appliquer à n'importe quelle circonstance, y compris à des limites naturelles telles que le bord d'un lac ou la limite d'une forêt.

On connaît, certainement, l'utilisation qui est faite de la connaissance *a priori* de la géométrie d'un ouvrage pour en améliorer la description, en introduisant des équations de condition: Citons, notamment, deux exemples

■ ■ ■ très connus: Lorsqu'un photogramètre restitue la limite d'un bâtiment qu'il sait ou juge rectiligne il "redresse" cette limite pour la rendre réellement et parfaitement rectiligne, en cela il améliore sa détermination brute. De même, quand on numérise un bâtiment dont on sait que tous les angles sont droits on introduit des relations d'orthogonalité entre ses limites ce qui en améliore la détermination. En photogrammétrie on fait, fréquemment, les deux opérations simultanément.

Pourquoi ne pas profiter des connaissances qu'on a, *a priori*, de la géométrie des voies de communication pour en améliorer la description numérique ?

## Les modélisations

On se trouve face à deux types de modèles proposés: Le premier est celui des voies ferrées, pour lesquelles on connaît parfaitement les caractéristiques et la nature géométrique des courbes utilisées, il n'y a donc aucun problème: les plans de récolement sont dressés et des repères séparant les différents types de courbes utilisés, lorsqu'ils n'ont pas été détruits et subsistent sur place [4]. Pour le second, on ignore, ou on feint d'ignorer, la nature géométrique de ces courbes [8]. Cette dernière manière de faire est, à notre sens, extrêmement critiquable: En effet, les tracés de voies routières répondent à des impératifs physiques dans les courbes voisins de ceux des voies ferrées: à savoir des règles de rayon minimum fonction de la vitesse de base, du dévers acceptable, et du coefficient de friction limite entre les pneumatiques et la chaussée, de la tolérance des passagers, et de la progressivité des raccordements.

Certes, les chemins vicinaux qui n'étaient, à l'origine, que des chemins muletiers qui ont été empierrés puis revêtus, n'ont évidemment pas fait l'objet d'une étude rationnelle concernant la circulation qu'ils auraient à supporter, mais ses impératifs, notamment la vitesse de base de 90 km/h, ont amené les responsables à se pencher sur les problèmes posés par les tracés "bruts" hérités du passé. Presque toutes les voies de circulation, même rurales, ont

été partiellement ou totalement rectifiées pour leur donner des caractéristiques correctes, au moins dans des passages cruciaux.

## Les règles physiques utilisées

Les règles utilisées sont très simples, voire élémentaires: Un véhicule circulant en courbe est soumis à une accélération horizontale centrifuge donnée par la relation:

$$a = \frac{v^2}{R} = C \cdot v^2$$

avec a: accélération en m/s/s,  
v: vitesse du véhicule en m/s,  
R: Rayon de courbure en m,  
C: courbure en  $m^{-1}$ .

Pour les voies ferrées le dévers d, ou pente transversale de la voie (sans dimension) est donné par:

$$d = \frac{a}{g} = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

avec g: accélération de la pesanteur 9,81 m/s/s. En effet le convoi ne doit pas exercer d'effort transversal sur la voie qui ne le supporterait pas. En revanche, si le convoi est arrêté en courbe le dévers ne doit pas gêner les passagers et ne pas exercer un effort trop élevé sur le rail intérieur [2], [3]. D'où, pour une vitesse de base v et un dévers limite d, on a, par conséquent, une courbure limite C en  $m^{-1}$ . Donc, pour une vitesse de base v, les graphes de C et d sont identiques à l'échelle près: Courbure proportionnelle à dévers  $C \propto d$ . Le dévers limite fixe la courbure limite  $C_1 \propto d_1$ .

Pour les voies routières les relations sont à peine plus compliquées. D'autres impératifs s'ajoutent à ceux qui affectent les voies ferrées, notamment dans les carrefours en virage, lorsque la voie qui recoupe celle qui est étudiée se raccorde sur le côté opposé au virage. Dans ce cas il est impossible de créer un dévers, pire, parfois ce dévers doit être négatif. On admet alors que l'accélération centrifuge peut être encaissée par le frottement du pneumatique sur la chaussée et par la tolérance de la sensation de dérapage des passagers. On admet la relation:

$$d + f = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

f est un coefficient de frottement sans dimension. Si le dévers est nul on a:

$$f = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

c'est ce coefficient qui, pour une vitesse de base donnée: v, fixe la courbure limite:

$$C_l = \frac{(f_l + d_l) \cdot g}{v^2}$$

avec  $C_l$ : courbure limite en  $m^{-1}$ , et  $f_l$ : coefficient de frottement limite, sans dimension. Certains auteurs donnent les valeurs suivantes pour  $f_l$  en fonction de la vitesse de base v:

40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	vitesse en km/h
0,19	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11	fl, sans dimension.

La variation de  $f_l$  avec la vitesse est due au fait que les passagers accepteraient une sensation de "dérapage" plus importante à faible vitesse qu'à une vitesse plus élevée.

On remarquera immédiatement que pour une vitesse de base de 90 km/h, si le dévers est nul, on a:

$$C_l = \frac{0,13}{25^2} \cdot 9,81 = 0,002$$

soit un rayon limite de 490 m ! Ce qui montre, à l'évidence, que les anciens chemins ont été ou seront rectifiés.

*L'usage des splines cubiques ne permet pas de maîtriser aisément la condition de courbure maximale.'*

On a longuement expliqué, en [2] et [3], que pour passer d'un alignement à un cercle comment et pourquoi on utilisait des courbes à courbure progressives dont la courbure était une fonction linéaire de l'abscisse curviligne: c'est-à-dire des clothoïdes, et que pour raccorder les cercles aux clothoïdes on avait intérêt, pour les voies ferrées, d'utiliser des **clothoïdes doubles** ou spirades.

On s'en tiendra à l'usage des clothoïdes simples pour les voies routières. On a donc trois types de courbes routières: L'alignement droit, le cercle de rayon minimum d'après

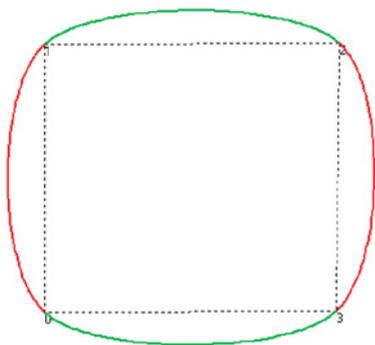
(1) On a  
 $S(t) = 0,3333 \cdot t^3 - 0,2381 \cdot t^7 + 0,000758 \cdot t^{11} -$   
 $C(t) = t - 0,1 \cdot t^5 + 0,00463 \cdot t^9 - 0,000107 \cdot t^{13} +$   
 aucun terme d'exposant pair !

$Cl$ , ou bien un cercle de rayon plus grand  $C_l \geq C$ , et les clothoïdes pour les raccordements progressifs, ces dernières sont définies par  $C = k \cdot s$ , avec  $s$  abscisse curviligne variant linéairement de  $C = 0$  alignement droit, à  $C = Cl$  courbure limite puis  $Cl = \text{constante}$ , c'est-à-dire dans un cercle. Ce sont des courbes de courbure connue et seulement définies par leurs courbures, fonctions de leur abscisse curviligne. La longueur développée de la clothoïde:

$$s, \text{ fixe le paramètre } k; k = \frac{C_l}{s}$$

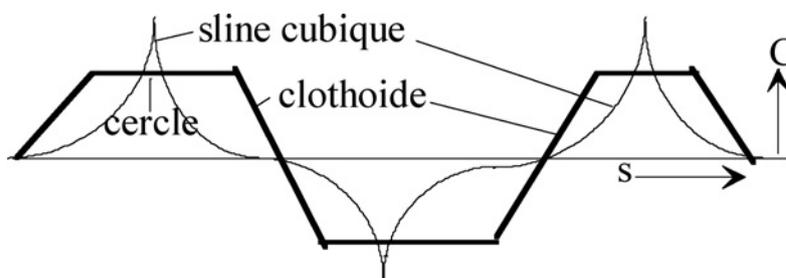
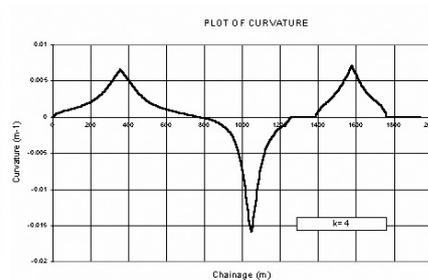
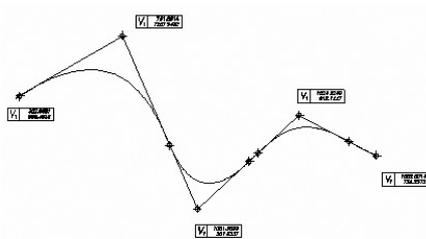
de dimension  $m^{-2}$ .

Si les clothoïdes ont pu être assimilées à des splines cubiques, elles ne sauraient en aucun cas pouvoir remplacer un cercle, or c'est l'association de la clothoïde et du cercle qui satisfait les exigences de courbure limite. **Une spline, seule, ne les respecte pas.** On a tenté de tracer, ci-dessous, un cercle à l'aide de splines cubiques:



On voit que c'est tout à fait impossible! Les courbures aux points de définition 0, 1, 2, 3 ne respectent pas les limitations dont on vient d'exposer les raisons et ne sont pas maîtrisables selon les méthodes proposées en [6] et [8]. Il n'y a donc aucun avantage à modéliser une voie routière à l'aide de splines. Certains ont proposé l'association de splines cubiques et de cercles [10]. C'est en effet possible, mais on préférera modéliser les voies relevées par leur courbures, et les restituer sous la forme d'alignements, de clothoïdes, et de cercles, comme cela se fait tous les jours au moment de l'implantation des ouvrages.

En outre, la **continuité en courbure** ne saurait être assurée par des splines cubiques leur degré est trop faible. Selon les auteurs le degré de la courbe devrait être égal à six pour assurer une



“douce” continuité, à cinq pour une rude continuité.

Sur la figure suivante inspirée de [10] on a porté le tracé d'un avant-projet sur un diagramme d'abscisse curviligne  $s$ , la courbure  $C$  étant en ordonnées, matérialisé par des alignements droits  $C = 0$ , des clothoïdes sont des droites inclinées, ou des cercles des droites parallèles à l'axe qui ont des tracés évidemment rectilignes, puis le même tracé approché cette fois-ci par des splines cubiques; on remarquera que les conditions de courbures ne sont alors pas satisfaites à “la pointe des virages”

### Modélisation des voies routières par la courbure

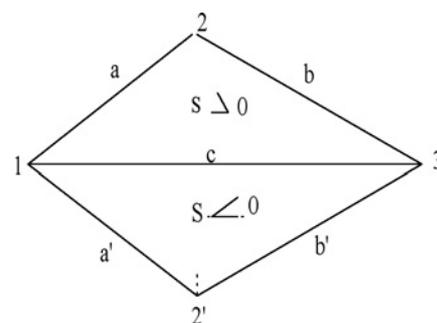
On suppose que les points des courbes routières sont relevés par les moyens décrits en [4] et [6], c'est-à-dire à l'aide d'un récepteur GPS associé à une station de base ou à une station du RGP avec un pas d'un mètre, on peut même relever la voie directement en même temps qu'on relève son axe [6] et [11]. Il s'agit de calculer la courbure en chaque point relevé pour dresser un diagramme comme celui qu'on vient présenter tout au long du tracé. On doit, à l'aide des coordonnées des points relevés, calculer la courbure, avec son signe, en

chaque point. Pour cela, après plusieurs essais, on a adopté les deux formules suivantes:

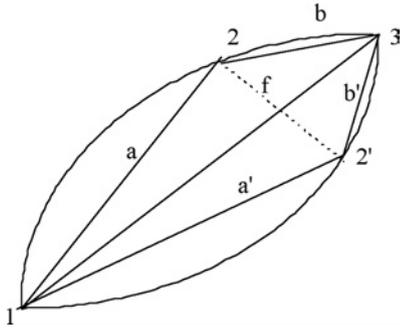
$$C = \frac{1}{R} = \frac{4.S}{a.b.c}$$

$S$  étant la surface du triangle formé du point précédent le point où est calculée la courbure, et de celui qui lui fait suite.  $a, b, c$  étant les trois côtés de ce triangle dont  $a$  et  $b$  sont sur le parcours et  $c$  est le côté qui joint le premier et le troisième point. Pour obtenir le signe de la courbure on doit adopter une formule du calcul de  $S$  qui le donne, par exemple: (voir formule en bas de page)

Si le parcours est dextrogyre (sens des gisements croissants) la surface sera positive et la courbure le sera aussi, dans le cas contraire, avec un parcours senestrogyre, elles seront toutes deux négatives. (voir figures)



$$2.S = x_1.y_2 - x_2.y_1 + x_2.y_3 - x_3.y_2 + x_3.y_1 - x_1.y_3$$



Toutefois, définir une courbe par sa courbure, peut entraîner des imprécisions importantes. En admettant, ce qui est généralement le cas, que :  $b \approx a$ , et  $c \approx 2.a$

on aura alors,  $S = f . a$

avec  $f$  : flèche de l'arc circulaire entre deux points. Par conséquent on aurait :

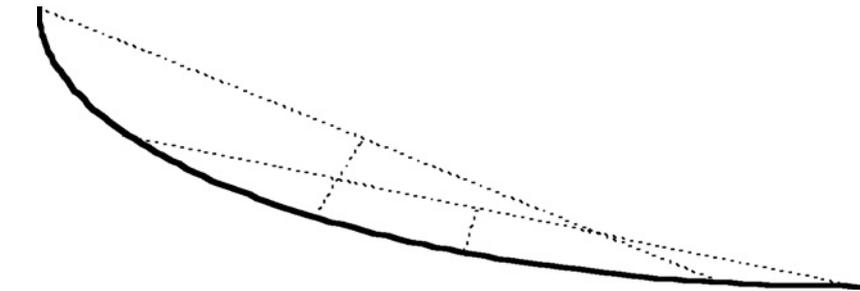
$$C \approx \frac{2.f}{a^2}$$

Toute erreur sur la flèche sera directement proportionnelle à l'erreur qui sera commise sur la courbure calculée.

Les différents auteurs qui ont traité des mesures, et qui sont plus nombreux que ceux strictement cités en référence [4], admettent une erreur relative entre des points voisins de 3 à 5 mm pour, les mesures faites sur les voies ferrées, là où la définition du point mesuré ne pose aucun problème, puisque c'est un équipement roulant sur la voie qui effectue la mesure. Il n'en est pas de même pour les voies routières l'axe n'est défini que par les tracés faits sur la voie et que pointe le véhicule (trait continu de non dépassement, trait double de dépassement d'un seul côté, ou axe tiré sur l'axe de la voie), dans ces cas favorables on peut estimer l'imprécision globale de l'ordre de un à deux centimètres, on doit également pouvoir traiter le cas où aucun tracé dessiné sur la voie ne peut guider le relevé, dans ce cas il faudrait relever un bord de chaussée et l'imprécision pourrait sans doute atteindre cinq cm, ou plus. Dans le premier cas l'imprécision sur la courbure entre deux points consécutifs relevés serait de :

$$\varepsilon_C = \frac{2 \times 0,02}{1} = 0,04 \text{ et } \varepsilon_R = 25m$$

le bruit de la mesure rendrait la courbure inutilisable pour caractériser la



courbe. Il n'en est plus de même si on calcule la courbure en un point en adoptant un côté de 10 m on aurait alors :

$$\varepsilon_C = \frac{2 \times 0,02}{10 \times 10} = 0,0004 \text{ et } \varepsilon_R = 2500m$$

$\xi_R = 2500 m$   $\xi_C$  et  $\xi_R$  étant respectivement l'erreur sur la courbure et sur le rayon.

## Calculs

A l'aide d'un fichier des points relevés les calculs sont simples. Il s'agit de repérer les différents types de courbes utilisés à l'aide du graphe des courbures en fonction de l'abscisse curviligne. On n'a pas rendu cette fonction automatique car les résultats obtenus, au cours des essais, étaient discutables, ce qui ne signifie pas du tout que cela soit impossible !

En revanche, l'interprétation visuelle du graphique est des plus simples : les alignements droits sont à courbure nulle, et comme les cercles, leurs tracés, aux erreurs près, sont parallèles à l'axe de l'abscisse curviligne, ces deux caractéristiques les distinguent des courbes progressives qui font la liaison entre elles. On doit tracer une plage d'indécision, d'abord pour les alignements, ce qui permet, aisément, de les distinguer (deux parallèles équidistantes autour de l'axe des abscisses). Pour distinguer les cercles on trace une parallèle à l'axe des abscisses passant par les points les

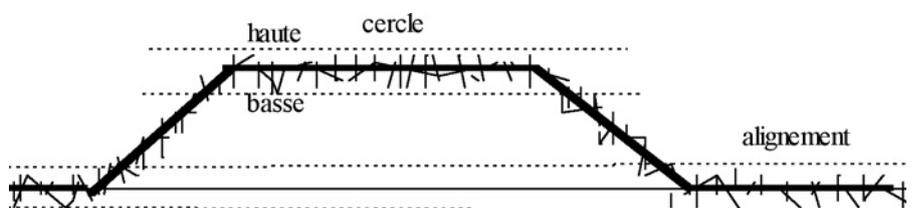
plus hauts du graphique, puis une seconde parallèle correspondant à l'indécision la plus basse. On découpe ainsi les limites des arcs de cercle. Les clothoïdes raccordent ces deux tracés.

On restitue par le calcul les tracés de ces courbes idéales par les méthodes indiquées en [2] et [3], puis on les cale sur le réseau des points mesurés par une transformation de similitude (translation, rotation, mise à l'échelle, quatre inconnues à déterminer). Rappelons que la solution des moindres carrés de cette transformation n'implique pas la résolution d'un système linéaire, car des simplifications d'écriture allègent le calcul qui devient fort simple.

## Tests de précision

Afin de vérifier que ce que l'on avance est exact on devait disposer d'un fichier jouant le rôle de "vérité terrain". Pour cela on a créé un tracé idéal à l'aide d'une méthode courante de tracé des voies routières comme le Manuel de [12]. On a calculé les points de l'axe de l'ouvrage à l'équidistance d'un mètre. Ce sera le fichier de "vérité terrain". A partir de ce fichier on dressera un fichier "mesures" en le "bruitant".

On introduisit deux types d'erreurs : une erreur accidentelle moyenne [7] de 2 cm gaussienne à l'aide de générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur en utilisant la relation de Box-Müller, puis une erreur systématique variant de 0 à 20 cm tout au long du tracé pour



simuler les erreurs de mesure de GPS qui sont souvent proportionnelles au temps et à la distance, ou pour aussi simuler un défaut de détermination de l'ambiguïté, ce qui revient au même dans le cas traité.

Puis on mène les calculs comme indiqué au paragraphe immédiatement précédent. On remarque l'amélioration des résultats en les comparant à la fois au fichier "mesures" et au fichier "vérité terrain" les résultats se situent bien entre ces deux termes de comparaison.

Le test de précision est aussi constitué par la position des points de tangence des courbes: Ces points ont été calculés avec une erreur moyenne [7] de dix mètres. Cela peut paraître médiocre, il n'en est rien, car les points de tangence entre une clothoïde et un cercle ou un alignement sont, de toute façon, physiquement très mal définis en raison de la progressivité et de la continuité de la courbure.

## Conclusions

Il est exact que les splines, notamment les splines de Catmull-Rom [5], sont des courbes très agréables à utiliser pour modéliser une courbe **quelconque**, voir figure, définie par quelques points de passage **obligés** [8]. Si les points sont serrés la différence avec des segments de droites n'est effectivement pas très grande!

Il n'en est plus de même si on connaît a priori la nature des courbes à modéliser et s'il s'agit d'ajuster comme le fait K. Atkinson [6] une courbe de nature prédéfinie à un nuage de points. Dans la mesure où les courbes des voies routières ou ferrées sont bien connues, et parce que les splines sont incapables de les remplacer, en raison de l'impossibilité de respecter la condition de courbure minimum et de se raccorder

en continuité de courbure, il est plus simple de revenir aux premières.

La tentative élégante de K. Atkinson [6] était vouée d'avance à l'échec, il suffisait soit de comparer les équations des deux types de courbes pour voir que cela était impossible, et/ou simplement d'avoir quelques notions de technique routière. Si comme en [10] on implante les courbes progressives à l'aide de splines, de cercles et d'alignements notre méthode reste encore la meilleure, car il est évident qu'on **ne peut pas** modéliser un arc de cercle de rayon minimal à l'aide d'une spline cubique sauf à multiplier les points, car alors entre une spline et une droite la différence est faible, en outre, comme plus haut, le raccordement en continuité de courbure reste impossible. ●

## Bibliographie

- [1] 1986 - José F. Zélaco: *Clothoïde unique de raccordement entre deux cercles* in XYZ n°16
- [2] 1992-1 Claude Million: *La clothoïde dans tous ses états* in Géotop n°124
- [3] 1998-4 Claude Million: *Mieux que la clothoïde, la spirale adoucie* in XYZ n°77
- [4] 2000-4 Philippe Halle: *Analyse qualitative d'une voie ferrée par levé dynamique GPS* in X Y Z n°85
- [5] 2001-1 Claude Million:
  - *Des courbes et des lignes* in XYZ n°86
  - Les courbes in <http://perso.wanadoo/claude.million/articles/>.
- [6] 2002 - Kendall Atkinson:
  - *Modelling a Road Using Spline Interpolation in Report of Computational Mathematics Department of Mathematics*, University of Iowa, Iowa 52242. USA
  - *Robust and Efficient Computation of*

*the Closest Point on a Spline Curve* in Curve and Surface Design at Saint Malo 2002

[7] 2003-3 Michel Kasser, Patrick Sillard: *les nouveaux textes réglementaires français en matière de précision des levés* in XYZ n°96

[8] 2005-2 Hervé Gontran: *Technique de lever par véhicule équipé de récepteurs GPS et d'une station totale* in XYZ n°103.

[9] 2005 <http://perso.wanadoo/claude.million/articles/>.

[10] 2005 A. Fracassa A. Scalamandrè: *The use of Rational B-spline Curves* in Geometrical Design of Road Alignments in <http://xoomer.virgilio.it/antfracca/spline>.

[11] 2005 Simon Newby Paul Mrstik: *LIDAR on the Level in Afghanistan GPS, Inertial Map the Kabul Road* in GPS World - July

[12] 2005 HighRoad6.0 User Manual in <http://www.createng.com.au/HighRoadHTMLMan/HR6Manual-Ch9.html/>

## ABSTRACT

*When we modelise a road or railway track we seek to obtain a result better than what is obtained by the rough measurements themselves, by introducing the knowledge of the geometry of the road or track. This is why it is always beneficial to get the models currently used to design these roads or tracks at the time of their staking, instead of all other "smart" models which would not bring any information at all.*

