

Gravimétrie, géoïde et nivellement par GPS en Belgique

■ H. DUQUENNE - M. EVERAERTS - P. LAMBOT

Cet article présente les progrès récents réalisés par l'Observatoire Royal de Belgique et l'Institut Géographique National belge (IGN-B), en collaboration avec l'International Geoid Service (IGeS) et le Laboratoire de Recherche en Géodésie de l'IGN français, pour réaliser un modèle du géoïde. Plusieurs types de données ont été incorporées dans ce calcul : un modèle global de champ, des données gravimétriques, un modèle numérique de terrain. Deux méthodes de calcul ont été confrontées : l'intégration de Stokes par transformées de Fourier rapide (FFT) et la collocation rapide : elles se sont avérées équivalentes. Le géoïde a été comparé à un ensemble de 4000 points GPS nivelés, d'une part pour valider les données et les méthodes de calcul, et d'autre part pour adapter le géoïde aux besoins particuliers du nivellement par GPS. Un test indépendant permet de conclure à une précision de 2 centimètres.

Le contexte technique et scientifique

Depuis la généralisation du GPS comme moyen de localisation précis, le géoïde est devenu un élément clé dans les techniques de positionnement. Il permet en effet la conversion des hauteurs ellipsoïdales obtenues par GPS en altitudes. Deux méthodes s'offrent à l'utilisateur :

- Ou bien il réalise lui-même un modèle local de géoïde en déterminant la hauteur ellipsoïdale de quelques repères de nivellement ou l'altitude de quelques points géodésiques, puis en interpolant la hauteur du géoïde sur les points à déterminer.
- Ou bien il utilise, de manière plus ou moins transparente, un modèle national de géoïde spécialement adapté aux nécessités du nivellement par GPS.

La première méthode a prévalu jusqu'au milieu de la dernière décennie, en raison de l'indisponibilité de modèles de géoïde suffisamment précis. Mais, pour l'utilisateur, son coût est plus élevé et elle n'est pas sans risque : si on réalise un géoïde local sur la base d'un réseau de points GPS nivelés peu dense, une ondulation naturelle du

géoïde ou une faute d'un ou deux décimètres sur l'altimétrie des points risquent fort de passer inaperçues. Enfin, cette méthode conduit de fait à la prolifération de références altimétriques (les géoïdes locaux réalisés par différents opérateurs à différentes époques) plus ou moins confidentielles, dont la cohérence est impossible à assurer.

La seconde méthode consiste à élaborer un modèle de géoïde d'étendue suffisante répondant aux besoins du nivellement par GPS en termes d'exactitude, de précision, de résolution, de fiabilité. Les progrès récents dans les domaines de la modélisation du géoïde, de la collecte des données, de la puissance de calcul disponible ont permis des réalisations opérationnelles tout au moins dans les pays dotés de l'infrastructure géodésique adéquate. Cet article décrit les progrès récents réalisés par l'Observatoire Royal de Belgique et l'Institut Géographique National belge. En 1996, deux solutions ont été calculées, l'une par la formule de Stokes, l'autre par collocation (Pâquet et al. 1997). Leurs précisions, évaluées par comparaison à 36 points GPS nivelés, étaient très similaires : 3 à 4 cm en écart-type, 10 à 15 cm en erreur maximale,

principalement dans les Ardennes, dont la couverture gravimétrique était plus pauvre. En 2003, suite à la disponibilité de nouvelles données (nouveaux modèles globaux de champ, nouveau modèle numérique de terrain, densification de la couverture gravimétrique et des points GPS nivelés), de nouvelles déterminations ont été entreprises.

Le modèle de géoïde belge BG03

■ Les données

Modèles globaux de champ

La plupart des géoïdes modernes résultent de la combinaison d'un modèle global du champ de pesanteur, de données gravimétriques et d'un modèle numérique de terrain. D'une certaine manière, le modèle global intervient comme une solution approchée qu'il faut raffiner. Il sert aussi à modéliser les données gravimétriques lointaines qu'on renonce à prendre en compte. Le calcul précédent du quasi-géoïde en Belgique était basé sur OSU91A. Depuis, deux nouveaux modèles géopotentiels sont apparus : le modèle EGM96 (Figure 1), complet jusqu'au degré 360, (Lemoine et al., 1998 ; Sansó, 1997) et le modèle à haute résolution GPM98CR, complet jusqu'au degré 720 (Wenzel, 1998). OSU91A et EGM96 sont assez similaires : ils ont la même résolution (55 km en demi longueur d'onde), ils ont été réalisés par des méthodes assez semblables (mélange d'observations de géodésie spatiale, d'altimétrie par satellite et de gravimétrie), en assimilant à peu près les mêmes données dans la région qui nous intéresse. GPM98CR par contre montre une résolution plus détaillée (22,5 km). Il a été établi par correction et augmentation d'un modèle spatial au moyen de gravimétrie terrestre dense. ■■■

■ ■ ■ Dès lors, on peut s'attendre à des différences par rapport à OSU91A et EGM96. Les deux modèles EGM96 et GPM98CR ont été utilisés lors du calcul du quasi-géoïde BG03.

Gravimétrie

La première détermination de la pesanteur en Belgique fut effectuée à l'aide d'un pendule à l'Observatoire Royal de Belgique en 1884. Le premier réseau belge fut observé en 1928. Il comprenait 24 stations et sa précision était de 1 à 3 mGal¹. Dans les années 1947-1948, un second réseau national fut réalisé, celui-ci comprenait 381 stations. La précision était meilleure que 0.7 mGal pour toutes les stations. Depuis 1948, l'IGN et l'Observatoire Royal de Belgique ont travaillé en collaboration étroite pour densifier la couverture gravimétrique de la Belgique. Ce but fut finalement atteint en 2002 (Figure 2). La densité est moindre dans le sud-est (1 station par 2,5 km² à 1 station par 5 km²) mais plus forte dans le reste du pays (1 station par km²). La banque de données de l'Observatoire Royal de Belgique contient actuellement plus de 250 000 points de mesures couvrant la Belgique et les contrées avoisinantes. Il y a plus de 30 000 données pour le territoire Belge qui ont toutes une précision meilleure que 0,1 mGal. Le reste des données a été fourni par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières pour la France, par le BGS pour le Royaume-Uni, par le Rijkswaterstaat pour les Pays-Bas et par H.G. Wenzel (communication personnelle) pour l'Allemagne. Toutes ces données ont été introduites dans le calcul du nouveau quasi-géoïde belge BG03.

Modèle numérique de terrain

Dans le cadre de ce calcul un nouveau MNT a été préparé afin d'évaluer correctement les effets de terrain. Pour la Belgique le MNT a été fourni par l'IGN-B avec une résolution de 3' x 6'. En ce qui concerne les territoires hors de la Belgique, une grille homogène au pas de 4 km a été obtenue en intégrant les données terrestres du projet *West East Europe Gravity Project* avec la grille bathymétrique de 5' de la *National Oceanic and Atmospheric Administration*. Les MNTs

(1) Le milligal (symbole : mGal) est une unité d'accélération encore utilisée en gravimétrie, valant 10⁻⁵ m/s²

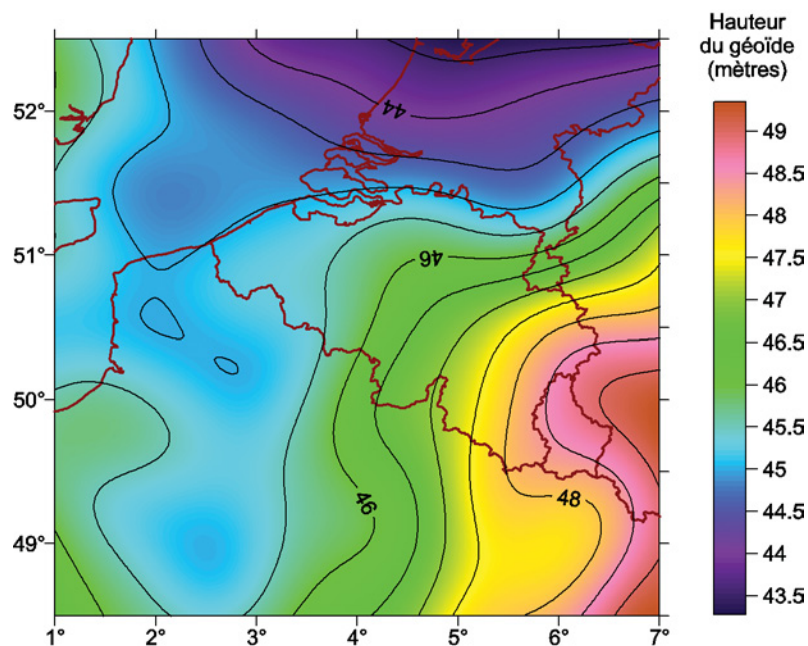


Figure 1. Le géoïde dans la région de la Belgique d'après le modèle global EGM96.

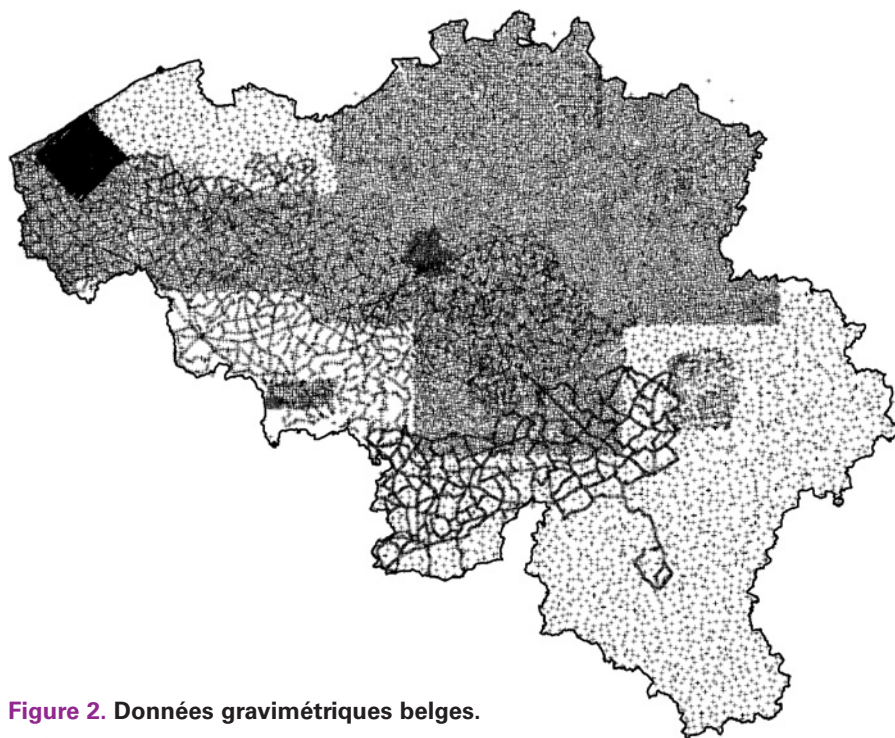


Figure 2. Données gravimétriques belges.

ont été rassemblés en utilisant une interpolation bilinéaire afin d'obtenir un MNT unique avec des pas $\Delta\varphi = 2.5'$ et $\Delta\lambda = 3'$, dans les limites $47,5^\circ \leq \varphi \leq 53,5^\circ$ et $0^\circ \leq \lambda \leq 8^\circ$. De cette façon, le MNT estimé est connu sur une surface étendue à un degré de plus que la zone de couverture gravimétrique (Figure 3).

Géodésie et nivellement

Le département de la géodésie de l'Institut Géographique National belge

a réalisé un nouveau système de référence géodésique, sous-ensemble du système européen EUREF (*European Reference Frame*), dénommé BeRef (*Belgium Reference frame*).

Dans ce système tridimensionnel géocentrique, les coordonnées associées au datum européen ETRS89 (*European Terrestrial Reference System*) et exprimées sous formes de longitudes, latitudes et hauteurs ellipsoïdales, assurent

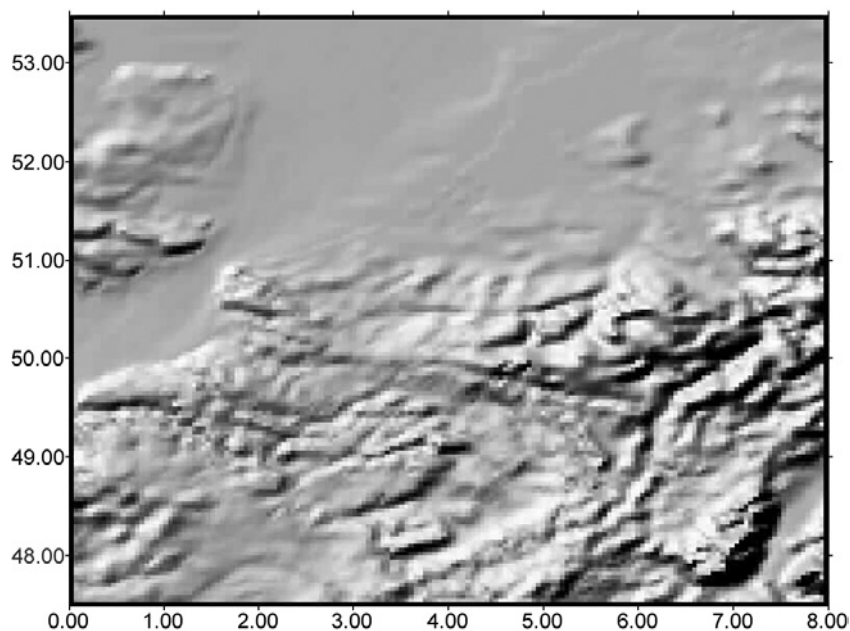


Figure 3. Modèle numérique de terrain (image ombrée). La topographie étant faiblement accidentée, il n'est pas nécessaire que la résolution soit très fine.

une cohérence au niveau centimétrique. La mise en place de cette nouvelle référence commencée en 1988, a été réalisée entièrement avec la technique GPS, et s'est achevée en 2002. Le réseau de référence, constitué de 36 points dont 4 points font partie du réseau EPN (*EUREF Permanent Network*), a été ajusté en un ensemble prenant appui sur sept points EPN. L'écart standard sur les coordonnées varie de 4 à 6 millimètres. La densification de ce réseau est constituée de quelques 4000 points; ceux-ci ont été ajustés en un ensemble prenant appui sur les points BeRef. L'écart-type sur les coordonnées varie de 8 à 17 millimètres.

Chaque point géodésique appartenant à BeRef a été rattaché par nivellement géométrique au réseau de nivellement national DNG (Deuxième Nivellement Général) qui constitue la référence d'altitude belge. Le réseau BeRef offre donc un ensemble de points où sont connues notamment la hauteur ellipsoïdale dans le système de référence ETRS89 et l'altitude orthométrique dans le système de référence DNG.

■ Les méthodes de calcul du géoïde gravimétrique

Il existe deux grandes familles de méthodes de calcul du géoïde à partir de données gravimétriques: la méthode de

Stokes, qui fait partie des méthodes intégrales, et la collocation, qui est une méthode statistique. Elles ont toutes deux été mises en œuvre pour calculer le modèle BG03, de façon à comparer et valider les résultats. Dans les deux cas, on transforme les valeurs de pesanteur mesurées en anomalies de pesanteur résiduelles Δg_{res} en retranchant la pesanteur vue par le modèle de champ et l'effet du terrain. Cette phase appelée "retrait" permet de rendre les valeurs à traiter plus petites et plus lisses, donc facilement interpolables, et harmoniques, c'est-à-dire indéfiniment dérivables par rapport aux coordonnées. Cette propriété doit en effet être vérifiée pour qu'on puisse appliquer les méthodes de Stokes ou de collocation. En fait, et pour être rigoureux, il

faut remarquer que le modèle global de champ contient déjà une partie des effets du terrain, l'attraction gravitationnelle correspondant aux formes principales de la topographie. Il ne faut donc pas retrancher la totalité des effets du terrain, mais seulement la partie qui n'est pas déjà dans le modèle de champ et qui correspond aux détails de la topographie. On l'appelle "terrain résiduel" (Figure 4).

Dans le cas de la méthode de Stokes, on interpole les anomalies de pesanteur résiduelles aux points de mesure pour obtenir une grille régulière. Celle-ci est utilisée pour calculer la hauteur du géoïde résiduel par la formule:

$$N_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g_{res} S(\psi) d\sigma \quad (1)$$

$S(\psi)$ est une fonction compliquée mais qui ne dépend que de l'angle ψ sous lequel on voit, depuis le centre de la Terre, le point de calcul et le point courant d'intégration (Figure 5). R est le rayon de la Terre, γ est la pesanteur normale au point de calcul, ce serait la pesanteur si la Terre était un ellipsoïde de révolution. $d\sigma$ est l'élément d'angle solide, c'est-à-dire l'élément de surface terrestre divisé par R^2 , σ est le domaine d'intégration, une calotte sphérique de quelques centaines de kilomètres de rayon. Le calcul direct d'une grille fine du géoïde résiduel par l'équation (1) prend beaucoup de temps, par exemple des dizaines d'heures pour la Belgique avec un ordinateur de bureau. Il est possible de montrer que l'intégrale de Stokes se met sous la forme d'une convolution calculable exactement par transformée de Fourier rapide (FFT). Le gain en temps de calcul est considé-

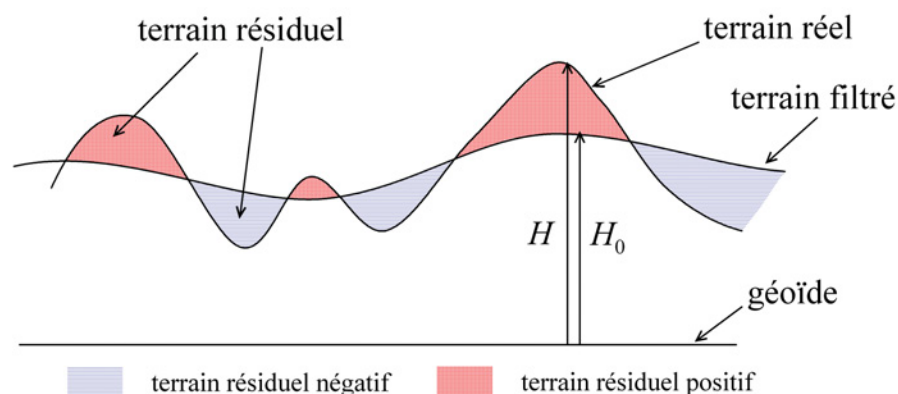


Figure 4. La méthode du terrain résiduel. H est l'altitude du terrain. Par filtrage passe-bas, on obtient le terrain filtré d'altitude H_0 . La différence est le terrain résiduel, dont l'influence n'est pas déjà contenue dans le modèle de champ.

■ ■ ■ rable (un facteur 100 à 1000, pour fixer les idées). Cette méthode a été appliquée pour calculer deux des versions tests de BG03.

La méthode de collocation est une généralisation des moindres carrés. Dans notre cas, les observations sont les anomalies résiduelles en q points et leur matrice est :

$$\ell = \begin{pmatrix} \Delta g_{res,1} \\ \vdots \\ \Delta g_{res,q} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les inconnues sont les hauteurs de géoïde en p points, leur matrice est :

$$\mathbf{N}_{res} = \begin{pmatrix} N_{res,1} \\ \vdots \\ N_{res,p} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Elles se déduisent des observations par :

$$\mathbf{N}_{res} = \mathbf{C}_{N,\Delta g} (\mathbf{C}_{\Delta g,\Delta g} + \Sigma_{\Delta g})^{-1} \ell \quad (4)$$

$\Sigma_{\Delta g}$ est la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure de la pesanteur, de dimension $q \times q$. On prend généralement une matrice scalaire :

$$\Sigma_{\Delta g} = \sigma_{\Delta g}^2 \mathbf{I}_q \quad (5)$$

où $\sigma_{\Delta g}$ est l'écart-type a priori des mesures et \mathbf{I}_q la matrice unité de dimension $q \times q$.

$\mathbf{C}_{\Delta g, \Delta g}$ est la matrice d'auto-covariance des anomalies de pesanteur résiduelles aux points de mesure. Elle traduit le fait que, en deux points voisins, les anomalies de pesanteurs sont statistiquement très voisines, car créées à peu près par les mêmes distributions de masses à l'intérieur de la Terre. $\mathbf{C}_{\Delta g, \Delta g}$ se calcule à partir d'un modèle de covariance. Dans le cas de BG03, la covariance entre deux points P et Q a été calculée suivant le modèle de covariance (Tscherning et Rapp, 1974) formule (6). Les deux paramètres A et R_B sont ajustés aux données

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta g_{res}(P), \Delta g_{res}(Q)) = & \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i \frac{(i-1)^2}{r_P r_Q} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi_{PQ}) \\ \sigma_i = & \begin{cases} \text{variance pour le degré } i \text{ du} \\ \text{modèle de champ pour } i \leq N_{\max} \end{cases} \quad (6) \\ & \frac{A}{(i-1)(i-2)} \left(\frac{R_B}{R} \right)^2 \text{ pour } i > N_{\max} \\ N_{\max} = & \text{degré maximal du} \\ & \text{modèle de champ} \end{aligned}$$

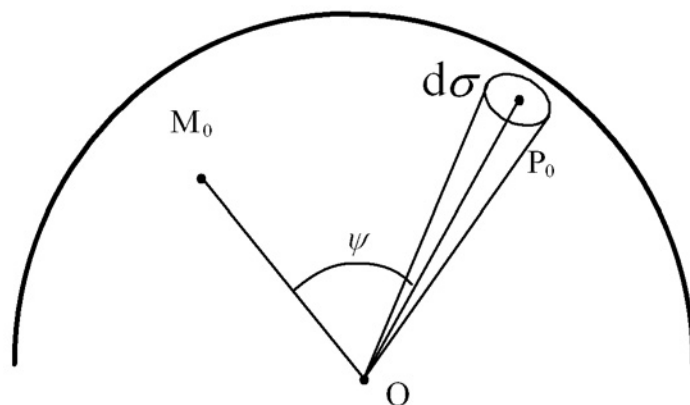


Figure 5. Méthode de Stokes. M_0 est le point où on calcule la hauteur du géoïde. P_0 est le point courant d'intégration, où l'anomalie de pesanteur est Δg . O est le centre de la Terre.

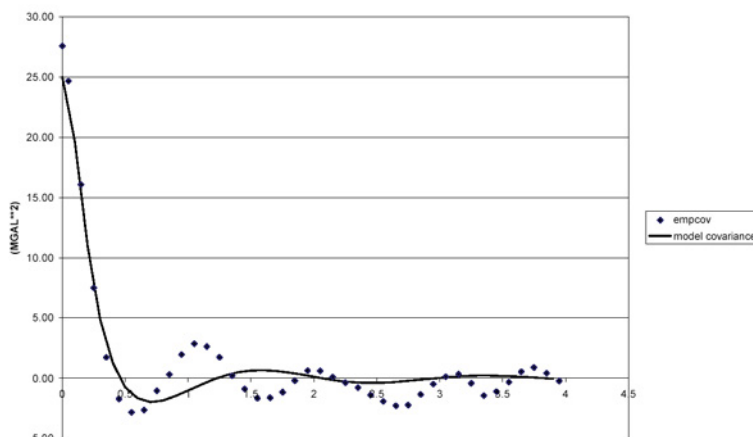


Figure 6. Exemple d'ajustement d'un modèle de covariance des anomalies de pesanteur résiduelles à des données terrain. Modèle ce champ retiré : EGM96. Abscisse : distance angulaire entre deux points, en degrés. Ordonnée : covariance des anomalies résiduelles. L'histogramme des covariances empiriques est représenté par des points. La courbe est le graphe du modèle ajusté. Celui-ci coïncide assez bien avec les données, au moins pour les distances inférieures à 50 km.

terrain (Figure 6). Pour cela, on construit l'histogramme des covariances en fonction de la distance en utilisant tous les couples de points gravimétriques disponibles, puis on cherche les paramètres qui assurent une bonne coïncidence du modèle à l'histogramme.

Toujours dans la formule (4), $\mathbf{C}_{N,\Delta g}$ est la matrice de covariance croisée des hauteurs du géoïde résiduel aux points de calcul du géoïde et des anomalies de pesanteur résiduelles aux points de mesure. Elle caractérise la dépendance statistique de la hauteur du géoïde en un point vis-à-vis des anomalies gravimétriques aux points voisins. Les termes de $\mathbf{C}_{N,\Delta g}$ se déduisent du modèle de covariance ci-dessus, des relations fonctionnelles qui existent entre les N et

les Δg , du rayon vecteur r des points et de leur distance angulaire ψ formule (7)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_{res}(P), \Delta g_{res}(Q)) = & \frac{GM}{R} \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \sigma_i \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi_{PQ}) \quad (7) \end{aligned}$$

En principe, dans la méthode de collocation, il n'est pas nécessaire que les données en entrée (ici les anomalies de pesanteur résiduelles) soient mises en grille. Cependant, l'inversion de la matrice figurant dans l'équation (4) prend un temps considérable ou même est impossible s'il y a beaucoup de données. Une méthode particulière baptisée collocation rapide (fast collocation), décrite dans (Bottoni et Barzaghi, 1993), accélère considérablement les calculs et diminue les

besoins en mémoire. Cependant, elle nécessite l'interpolation des anomalies de pesanteur pour en obtenir une grille régulière. Cette méthode a été utilisée pour calculer deux des versions tests de BG03.

Une fois calculé le géoïde résiduel soit par l'intégrale de Stokes, soit par collocation rapide, il faut procéder à la restauration des effets du terrain résiduel et du géoïde vu par le modèle global de champ.

■ Les résultats et leur comparaison

En combinant les deux méthodes décrites ci-dessus (Stokes par FFT et collocation rapide) et les deux modèles de champ disponibles (EGM96 et GPM98CR), quatre solutions de géoïde ont pu être calculées. Pour les départager, on a étudié l'écart entre chacune d'elles et la hauteur du géoïde issue de 35 points GPS nivelés du réseau BeRef. En un point géodésique P_i , de coordonnées géographiques $\varphi_i, \lambda_i, h_i$ et d'altitude H_i , soit N_{Gvi} la hauteur du géoïde gravimétrique et soit $N_{GPS-Niv,i} = h_i - H_i$ la hauteur du géoïde déduite de la géodésie et du nivellement. On commence par réduire l'écart en supposant que sa partie principale est due à une translation des références des deux géoïdes, dont on ajuste les composantes $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, dans un repère géocentrique. L'équation d'observation est :

$$N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi} = (\Delta X \cos \lambda_i + \Delta Y \sin \lambda_i) \cos \varphi \quad (8)$$

v_i est le résidu relatif au point P_i . Il est relativement plus sensible que l'écart brut $N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi}$ à un changement de méthode ou de données. Les statistiques des résidus obtenues en faisant varier les méthodes de calcul et les modèles de champ sont données dans le Tableau 1. Les quatre modèles de géoïde apparaissent comme équivalents du point de vue de la précision et bien validés. Le modèle calculé par collocation rapide avec le modèle de champ GPM98CR a été finalement choisi, il est dénommé BG03 et est représenté sur la Figure 7.

La référence d'altitude

Tableau 1. Statistiques des résidus des 4 modèles de géoïde, par rapport aux points GPS nivelés. Unité : mètre.

Modèle de champ	EGM96		GPM98CR	
	Collocation rapide	Stokes FFT	Collocation rapide	Stokes FFT
Ecart-type	0.03	0.04	0.03	0.03
Résidu minimal	- 0.07	- 0.07	- 0.07	- 0.07
Résidu maximal	0.07	0.07	0.07	0.07

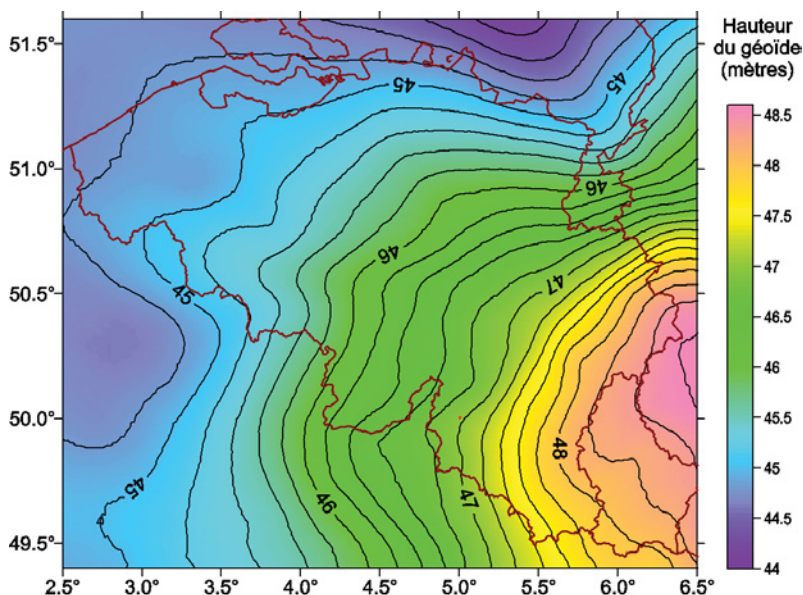


Figure 7. Géoïde gravimétrique de Belgique BG03. Comparer avec la Figure 1 pour estimer le gain en précision et en résolution apporté par la gravimétrie et le MNT.

Lorsqu'un utilisateur du GPS détermine des altitudes, il espère trouver les mêmes résultats qu'en opérant par nivellement classique. S'il désire obtenir un niveau de précision de quelques centimètres, il ne peut pas se servir brutalement d'un géoïde gravimétrique pour effectuer la conversion des hauteurs ellipsoïdales en altitudes. Les raisons sont multiples :

- Les références géodésiques (repère tridimensionnel, ellipsoïde) du réseau d'appui GPS et du géoïde gravimétrique ne coïncident pas nécessairement, leur décalage n'est pas toujours bien connu.
- Les coefficients de bas degrés du modèle global de champ utilisé pour calculer le géoïde gravimétrique peuvent être erronés, mais la gravimétrie, intégrée dans une calotte de rayon trop faible, ne remédie pas complètement à ces erreurs.
- La gravimétrie comporte ses propres erreurs, systématiques (défaut d'étalonnage des gravimètres, erreurs de

traitement, etc.) ou accidentelles.

- Les méthodes de calcul du géoïde gravimétrique ne sont pas parfaitement rigoureuses.
- Le réseau GPS n'est pas exempt d'erreurs localement corrélées (effets troposphériques) ou non (mesures des hauteurs d'antennes).
- L'altitude du point fondamental du réseau de nivellement est déduite de l'observation du niveau de la mer², qui peut différer du géoïde.
- Le réseau de nivellement, qui réalise de facto la référence des altitudes, est également affecté d'erreurs diverses.

On peut dire que le modèle de champ, la gravimétrie et le MNT d'une part, les réseaux géodésiques et de nivellement d'autre part, conduisent à deux réalisations différentes du géoïde. L'utilisateur doit généralement rattacher ses travaux aux références légales, mais les points GPS nivelés qui les réalisent ne sont pas assez denses et peuvent comporter

(2) En Belgique, le réseau de nivellement se réfère au niveau des plus basses mer pour éviter les altitudes négatives.

■ ■ ■ des fautes. Le géoïde gravimétrique joue le rôle d'interpolateur mais il faut le remettre en référence, le valider et le corriger. Une référence d'altitude utilisable pour le nivellement par GPS peut donc être obtenue en adaptant un modèle gravimétrique du géoïde à un ensemble de points GPS nivelés représentatif des références géodésiques et altimétriques, qui doivent rester virtuellement inchangées.

■ Adaptation du géoïde gravimétrique

La comparaison du géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés doit permettre d'une part d'identifier et de localiser les erreurs affectant les données et d'autre part d'adapter le géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés pour en faire une surface de référence des altitudes répondant aux besoins du nivellement par GPS (Duquenne et al., 2005). Soit $\{P_i, i = 1, \dots, n\}$ un ensemble de points GPS nivelés : leur hauteur ellipsoïdale h_i et leur altitude H_i sont donc connues. $N_{GPS-Niv,i} = h_i - H_i$ est la hauteur du géoïde réalisé par GPS et nivellement au point P_i . La hauteur du géoïde gravimétrique est $N_{Gv,i}$. On s'intéresse aux écarts :

$$\delta_i = N_{GPS-Niv,i} - N_{Gv,i} = h_i - H_i - N_{Gv,i} \quad (9)$$

qu'on partage en trois parties :

$$\delta_i = t_i + s_i + n_i \quad (10)$$

t_i est une tendance qui représente les erreurs globales telles que les écarts entre références géodésiques ou les erreurs sur les coefficients de bas degré du modèle de champ. A l'échelle d'un pays peu étendu, ces erreurs apparaissent comme très peu variables, on les modélise par un polynôme de bas degré ou toute autre fonction "lisse" des coordonnées géographiques. s_i est la partie corrélée de l'écart : on l'appelle le signal, il contient les erreurs qui, en deux points voisins, ont une forte probabilité d'être proches. Supposons par exemple qu'un levé gravimétrique peu étendu soit affecté d'un biais dû à un mauvais étalonnage d'un gravimètre. L'intégrale de Stokes va propager cette erreur sur le géoïde dans une zone de grande étendue, dans la limite du rayon d'intégration. Dans cette zone, le géoïde gravimétrique présentera des erreurs corrélées. Dans l'équation (10), n_i repré-

sente la partie non corrélée de l'écart δ_i . On l'appelle le bruit. Il représente par exemple les erreurs sur les hauteurs d'antennes GPS ou les petits déplacements fortuits de repères de nivellement qui sont statistiquement indépendants d'un point à l'autre.

Les coefficients a, b, c , du polynôme de tendance peuvent être déterminés par moindres carrés. Par exemple, dans le cas d'une tendance linéaire, les équations d'observation prennent la forme :

$$N_{GPS-Niv,i} - N_{Gv,i} = a + b(\varphi_i - \varphi_0) + c(\lambda_i - \lambda_0) \cos \varphi_0 + v_i \quad (11)$$

a est la partie constante de la tendance, b et c sont les pentes générales vers le nord et vers l'est du géoïde gravimétrique par rapport à la surface de référence des altitudes, v_i le résidu au point P_i . On a évidemment :

$$v_i = s_i + n_i \quad (12)$$

Cette équation ne permet pas à elle seule de séparer le signal du bruit, mais on peut y parvenir par collocation (Moritz, 1989, eq. 14-23 et 14-43) du fait de leurs propriétés statistiques très différentes. On désigne par \mathbf{v} le vecteur des résidus, \mathbf{s} le vecteur des signaux et \mathbf{n} celui des bruits. \mathbf{C}_{vv} est la matrice de variance-covariance des résidus et \mathbf{C}_{ss} celle des signaux. On a :

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss} \mathbf{C}_{vv}^{-1} \mathbf{v} \quad (13)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{s} \quad (14)$$

Les matrices de covariances ne sont pas connues a priori, aussi les détermine-t-on en ajustant aux données (les résidus et leur localisation) un modèle de covariance : on suppose que la covariance du signal entre deux points est une fonction de leur distance (éventuellement de leur azimut) dépendant d'un petit nombre de paramètres. On peut par exemple modéliser la covariance du signal entre deux points P_i et P_j par une fonction exponentielle :

$$C_s(P_i, P_j) = C_0 \exp(-d_{i,j} \ln 2 / d_{1/2}) \quad (15)$$

$d_{i,j}$ est la distance des deux points, C_0 est la variance du signal (covariance à la distance nulle), $d_{1/2}$ est la distance pour laquelle la covariance vaut $C_0/2$, $\ln 2$ est le logarithme népérien de 2. Les fonctions de covariance ne dépendent que de la distance, comme celles proposées dans l'équation (15) et dans le tableau (2), sont dites "isotropes".

La covariance des résidus se déduit de l'équation (10) et du fait que les bruits ne sont par définition ni corrélés entre

eux, ni corrélés avec les signaux. La variance du bruit étant supposée constante égale à σ_n^2 , on a : formule

$$C_v(P_i, P_j) = \begin{cases} C_s(P_i, P_j) & \text{si } P_i \neq P_j \\ \sigma_n^2 + C_s(P_i, P_j) & \text{si } P_i = P_j \end{cases} \quad (16)$$

C'est comme des paramètres qu'il faut ajuster aux données. On construit donc un histogramme des covariances des résidus en fonction de la distance en calculant les quantités $v_i v_j$ pour tous les couples de points $P_i P_j$ possibles, puis les moyennes de ces quantités par classe de distances. Puis on ajuste les paramètres de la fonction de covariance par moindres carrés.

On ne connaît pas actuellement de théorie permettant de choisir les modèles de tendance ou de covariance des écarts $N_{GPS-Niv,i} - N_{Gv,i}$. On en est donc réduit à les choisir empiriquement dans des banques de modèles. Dans le cas de la Belgique, sur plus de 4000 points disponibles, trois modèles de tendance ont été testés : une constante, une fonction linéaire des coordonnées géographiques (comme dans la formule 11 ci-dessus), un polynôme du second degré. On a également essayé cinq modèles de covariance, dont les expressions sont données dans le Tableau 2. Le meilleur couple de modèles (tendance + covariance) est obtenu pour le meilleur ajustement du modèle de covariance à l'histogramme des covariances. La Figure 8 et le Tableau 3 montrent que les meilleurs résultats sont obtenus avec le modèle polynomial du second degré pour la tendance et le modèle exponentiel pour la covariance, pour une distance d'ajustement de 38 km.

La validation des points GPS nivelés résulte de l'analyse des bruits dans un processus itératif. A chaque étape, les paramètres de tendance et de covariance sont recalculés, de même que les matrices \mathbf{C}_{ss} et \mathbf{C}_{vv} , dont les coefficients sont donnés par (16). On obtient les signaux et les bruits sur chaque point GPS nivelés par (13) et (14), puis l'écart-type du bruit. Un bruit important (disons supérieur à 2,57 fois l'écart-type) est l'indice d'une faute isolée sur

Tableau 2. Modèles de covariance du signal, principalement tirés de (Chilès et Delfiner, 1999), légèrement modifiés : le paramètre α est introduit pour que $d_{1/2}$ ait toujours la même signification (voir texte). r est la distance des deux points.

Modèle de cov.	Fonction	Paramètre spécial
Exponentiel	$C_s(r) = C_0 \exp(-r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha = 1/\ln 2$
Markov 2° ordre	$C_s(r) = C_0 (1 + r/(\alpha d_{1/2})) \exp(-r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha = 1/\ln(2 + 2/\alpha), \alpha \approx 0.59582$
Triangulaire	$C_s(r) = C_0 (1 - r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha = 2$
Sphérique	$C_s(r) = C_0 \left(-0.5 r/(\alpha d_{1/2}) + 0.5 (r/(\alpha d_{1/2}))^3 \right)$	$\alpha : \alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0, \alpha \approx 2.87939$
Sinus cardinal	$C_s(r) = C_0 (\alpha d_{1/2}/r) \sin(r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha \sin(1/\alpha) = 1/2, \alpha \approx 0.52756$

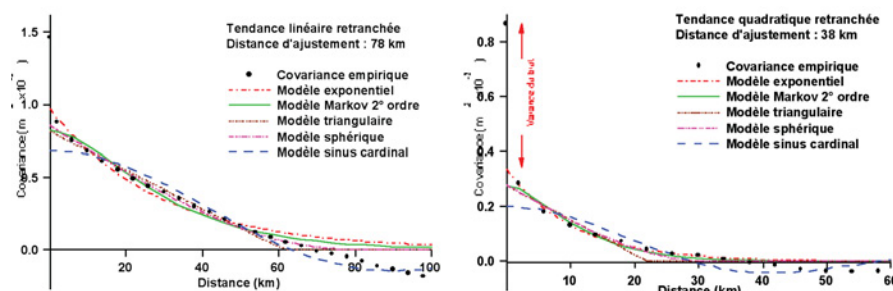


Figure 8. Exemples d'ajustements de modèles de tendance et de covariance. Le modèle exponentiel semble le plus performant. L'écart entre l'ordonnée à l'origine des courbes et la covariance empirique à la distance nulle est une estimation de la variance du bruit.

un point, par exemple une hauteur d'antenne GPS erronée ou un repère de nivellement fortuitement déplacé. La convergence est atteinte lorsque le processus ne rejette plus de points, ou lorsque le niveau de bruit est jugé suffisamment faible. Comme on peut le voir sur la Figure 9, le rejet des points se révèle très sensible au choix de la fonction de covariance du signal : le modèle

exponentiel, qui s'ajuste le mieux à l'histogramme des covariances, est aussi plus sélectif que le modèle triangulaire. Il conduit aussi plus rapidement à un écart-type du bruit plus faible : 1,6 cm après 6 itérations au lieu de 2,2 cm après 9 itérations.

Un ensemble de signaux anormalement élevés sur des points voisins doit conduire à incriminer le géoïde gravi-

métrique (donc la gravimétrie... et l'ensemble du calcul !) ou, plus rarement, une erreur sur une session GPS affectant plusieurs points (troposphère anormale...). La méthode permet donc non seulement de détecter et localiser des fautes éventuelles, mais aussi, dans une certaine mesure, d'en préciser la nature.

On procède finalement au calcul de la référence d'altitude en modifiant la grille du géoïde gravimétrique : on lui ajoute la tendance et le signal interpolé pour chaque nœud de la grille. On réalise ainsi une fusion de toutes les informations disponibles (modèle de champ, gravimétrie, MNT, géodésie, nivellement) pour obtenir la hauteur du zéro des altitudes au dessus de l'ellipsoïde géodésique. La référence d'altitude a été testée par l'IGN-B en effectuant des opérations de nivellement par GPS (sessions de 2 à 3 heures) sur 109 points rattachés au réseau de nivellement et n'ayant pas participé aux calculs. La moyenne des écarts entre les altitudes vaut 4 millimètres et leur écart moyen quadratique (moyenne non déduite) est inférieur à 21 millimètres.

Conclusions

Cette étude a permis de déterminer un modèle de géoïde pour la Belgique. Les deux méthodes employées (collocation rapide et Stokes par transformées de Fourier rapide) ont donné des résultats

Tableau 3. Ajustement des modèles de tendance et de covariance et choix de la meilleure distance d'ajustement. La meilleure combinaison, correspondant aux résidus de covariance les plus faibles, est surlignée.

Tendance retranchée	Modèle de covariance	Distance d'ajustement	C_0 ($10^{-6}m^2$)	$d_{1/2}$ (km)	σ_n ($10^{-3}m$)	Résidus des covariances ($10^{-6}m^2$)		
						Min	Max	Écart-type
linéaire	exponentiel	78 km	967.9	20.06	22.24	-49.0	101.4	48.6
linéaire	Markov 2° ordre	78 km	819.2	27.02	25.36	-65.5	71.8	38.2
linéaire	triangulaire	78 km	815.1	30.51	25.44	-90.4	35.5	33.1
linéaire	sphérique	78 km	857.4	27.18	24.60	-54.3	29.0	20.8
linéaire	sinus cardinal	78 km	679.6	38.03	27.98	-200.3	72.0	67.7
quadratique	exponentiel	38 km	337.0	7.28	22.96	-10.7	17.3	9.0
quadratique	Markov 2° ordre	38 km	275.4	10.25	24.27	-19.6	25.9	14.5
quadratique	triangulaire	38 km	278.4	11.00	24.21	-41.7	24.0	25.9
quadratique	sphérique	38 km	280.8	10.82	24.16	-29.2	22.2	18.3
quadratique	sinus cardinal	38 km	199.9	17.45	25.78	-84.8	35.9	41.0
quadratique	exponentiel	78 km	346.3	6.87	22.76	-15.2	42.4	22.6
quadratique	Markov 2° ordre	78 km	277.7	10.06	24.22	-17.8	41.2	23.0
quadratique	triangulaire	78 km	278.4	11.00	24.21	-41.7	40.9	26.8
quadratique	sphérique	78 km	280.8	10.83	24.16	-29.2	40.9	23.9
quadratique	sinus cardinal	78 km	212.2	12.99	25.54	-73.9	67.9	44.7

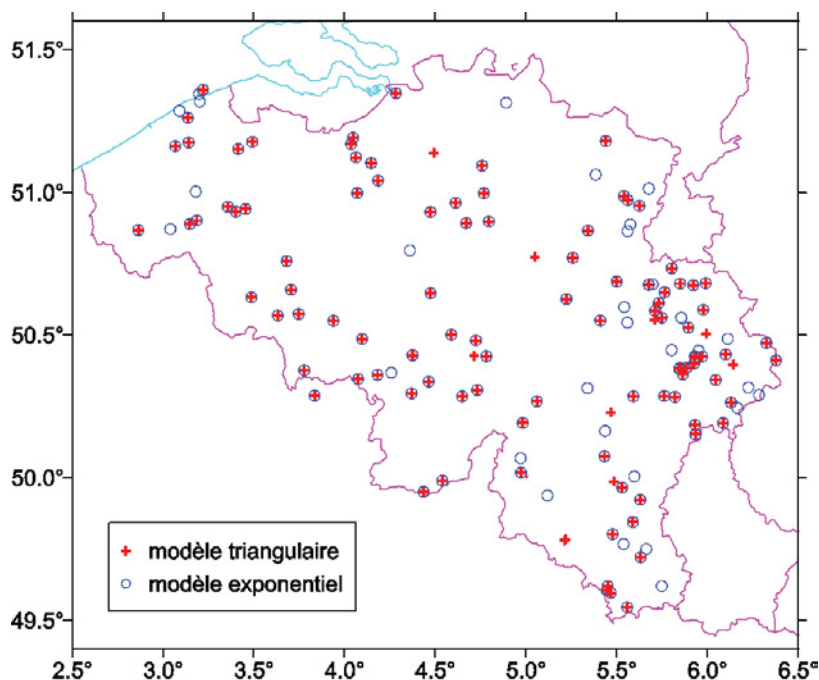


Figure 9. Tests de validation de points GPS nivelés par étude du bruit. Le modèle exponentiel est plus sélectif.

■■■ équivalents, indépendants du modèle de champ. La comparaison des modèles obtenus avec des points GPS nivelés permet une estimation de la précision des méthodes de calcul et une validation croisée des données (gravimétrie, altitude et hauteur des points GPS). Grâce au grand nombre des points GPS nivelés disponibles en Belgique, il a été possible de transformer le géoïde en une référence d'altitude opérationnelle et fiable. Le nivellement par GPS est désormais possible en Belgique avec une précision de 2 centimètres, ce qui couvre la majorité des besoins. ●

Références bibliographiques

BARZAGHI R., BORCHI A., DUCARME B., EVERAERTS M. (2003). Quasi-geoid BG03 computation in Belgium. In: "Newton's Bulletin", J.P. Barriot, F. Sanso ed., BGI and IGeS, pp. 75-88. http://bgi.cnes.fr:8110/borghi_etall.pdf

BOTTOMI, G., BARZAGHI, R. (1993). *Fast Collocation*. In: Bulletin Géodésique, Vol. 67, No. 2, pp. 119-126.

CHILÈS J.P., DELFINER P. (1999). *Geostatistics*. Wiley & Sons, New York, USA.

DUQUENNE H., EVERAERTS M., LAMBOT

P. (2005) *Merging a Gravimetric Model of the Geoid with GPS/Levelling data: an Example in Belgium*. In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes J. (ed.), *Gravity, Geoid and Space Missions*, IAG symp. n° 129, Springer, pp. 131-136

LEMOINE F.G., KENYON S.C., FACTOR J.K., TRIMMER R.G., PAVLIS N.K., CHINN D.S., COX C.M., KLOSKO S.M., LUTHCKE S.B., TORRENCE S.H., WANG Y.M., WILLIAMSON R.G., PAVLIS E.C., RAPP R.H., OLSON T.R. (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Technical report nr. 206861, NASA/GSFC, Greenbelt, Maryland, USA.

PÂQUET P., JIANG Z., EVERAERTS M. (1997). *A new Belgian geoid determination: BG96*. In: *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, J. Segawa, H. Fujimoto, S. Okubo ed., IAG Symposia vol. 117, Springer, pp. 605-612.

SANSÓ F. (ed.) (1997). *The Earth Gravity Model EGM96: testing procedures at IGeS*. In: IGeS Bulletin No. 6, DIIAR, Politecnico di Milano, Italy.

TSCHERNING, C.C., RAPP, R.H. (1974). *Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies Geoid Undulations, and the Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models*. In:

Reports of the Department of Geodetic Science, No. 208, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.

WENZEL, G. (1998). *Ultra high degree geopotential models GPM98A, B and C to degree 1800*. In: Proceedings of the Joint Meeting of the International Gravity Commission and International Geoid Commission, September 7 -12, Trieste 1998. Bollettino di Geofisica teorica ed applicata.

Contacts

H. DUQUENNE

Laboratoire de Recherche en Géodésie
IGN/ENSG - 6 et 8 avenue Blaise Pascal
77455 Marne-la-Vallée (France)
henri.duquenne@ensg.ign.fr

M. EVERAERTS

Observatoire Royal de Belgique
Av. Circulaire 3 - 1180 Bruxelles (Belgique)
everaerts@oma.be

P. LAMBOT

Institut Géographique National
13 Abbaye de la Cambre
1050 Bruxelles (Belgique)
pla@ngi.be

ABSTRACT

This paper presents recent progress made by the Royal Observatory of Belgium and the National Geographical Institute of Belgium, collaborating with the International Geoid Service and the Research Laboratory in Geodesy of the French IGN, in order to achieve a model of the geoid. Several kinds of data have been included in the computation: a global field model, gravity data and a digital terrain model. Two methods of computation have been compared: Stokes' integration by fast Fourier transform and rapid collocation. They appeared to perform equally. The geoid was compared with a set of 4000 GPS leveled points, on one hand to validate data and methods, on the other hand to adapt the geoid to the specific needs of leveling by GPS. An Independent test allows us to conclude to a precision of 2 centimeters.