

# xvz

Éditée par l'  
Association  
Française de  
Topographie

n° 105

## **ALPTRANSIT SAINT-GOTHARD** **Les exigences imposées aux travaux topographiques sur le tronçon de Sedrun**

- topographie
- géodésie
- photogrammétrie
- SIG
- géomatique
- métrologie
- hydrographie
- topométrie
- cartographie
- génie civil
- histoire





**Directeur des publications**

André Bailly  
Ingénieur Géomètre ETP

**Directeur adjoint des publications**

Emmanuel Natchitz  
Enseignant-Chercheur ESTP

**Rédaction et administration XYZ**

2, avenue Pasteur  
94165 Saint-Mandé Cedex  
Tél. : 01 43 98 84 80  
Fax : 01 43 74 72 80  
secrétariat: tous les jours de 9 h à 17 h

**Rédacteur en chef**

Jean-Pierre Maillard  
Urbaniste, Géomètre-Expert Foncier,  
Marne-la-Vallée

**Comité de Rédaction**

Pierre Grussenmeyer  
Professeur des universités  
INSA de Strasbourg

Tania Landes  
Maître de Conférences  
INSA de Strasbourg

Stéphane Durand  
Enseignant-Chercheur  
ESGT Le Mans

**Responsable du site Internet**

Tania Landes

**Publicité**

Chantal Holdrinet  
aft78@wanadoo.fr  
Tél. : 01 39 53 98 93

**Conception et maquette**

Dorothée Picard

**Abonnements:** Evelyne Mesnis

**Autre publication:** L'annuaire de l'AFT

**IMPRIMERIE MODERNE USHA**

137, avenue de Conthe  
BP 337 15003 Aurillac Cedex  
Tél. : 04 71 63 44 60  
Fax: 04 71 64 09 09

**Dépôt légal**

4<sup>e</sup> trimestre 2005 ISSN 0290-9057  
N° CPPAP: 0106 G 80866

**Tirage de ce numéro:** 1600 ex

**Abonnement annuel**

France CEE: 73 €  
Etranger (avion, frais compris): 76 €  
Les règlements payés par chèques  
payables sur une banque située hors de  
France doivent être majorés de 10 €  
Le numéro: 20 €  
Le bulletin d'adhésion est en p. 83  
Membre du SPCS Syndicat de la Presse  
Culturelle et Scientifique

L'AFT n'est pas responsable des opinions  
émises dans les conférences qu'elle organise  
ou les articles qu'elle publie. Tous droits de  
reproduction ou d'adaptation strictement  
réservés.

Décembre 2005 • 4<sup>e</sup> trimestre

# Sommaire

## La revue XYZ est éditée par l'Association Française de Topographie (AFT)

Membre de la FIG (Fédération Internationale des Géomètres)   
2, avenue Pasteur - 94165 Saint-Mandé Cedex - Tél. : 01 43 98 84 80 - Fax : 01 43 74 72 80

Courriel : [info@aftopo.org](mailto:info@aftopo.org) • Site Internet : <http://www.aftopo.org>

### ■ Editorial ..... 5

### ■ Info-Topo

> Les informations de la profession ..... 7

### ■ Manifestation

> Le 16<sup>e</sup> festival international de géographie  
de Saint-Dié-des-Vosges

Jean-Pierre MAILLARD ..... 15

> CIPA 2005 - 20<sup>e</sup> Symposium du comité  
ISPRS-ICOMOS pour la documentation  
du patrimoine culturel

Pierre GRUSSENMEYER ..... 16

> Intergeo®, salon international  
de la géodésie, de la géomatique  
et de la gestion du territoire

Olivier REIS ..... 18

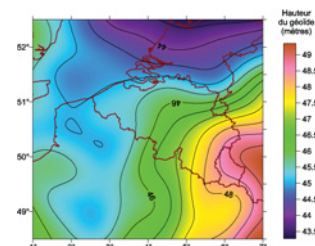
> Cartographier la mer  
Raymond D'HOLLANDER ..... 20

### ■ Topographie



> AlpTransit Saint-Gothard Les exigences  
imposées aux travaux topographiques  
sur le tronçon de Sedrun  
Adrian RYF - Theresa NEUHIERL  
Ivo SCHÄTTI ..... 23

### ■ Géodésie



> Gravimétrie, géoïde et nivellement  
par GPS en Belgique  
H. DUQUENNE - M. EVERAERTS  
P. LAMBOT ..... 29

### ■ Topométrie

> La modélisation des voies routières  
Claude MILLION ..... 37

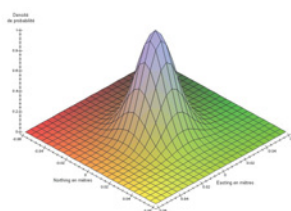
### ■ Photogrammétrie

> La 3D au service des collectivités  
Philippe BOUR ..... 42

### ■ SIG

> Elaboration d'un SIG pour la gestion  
du domaine portuaire de Mostaganem  
Mohand Ameziane CHERIFI  
Djillali BENNEDJEMA  
Saïah Mohammed BOURAS ..... 45

### ■ GPS



> Le point sur les traitements de données  
GNSS en réseau pour un positionnement  
centimétrique temps réel de meilleur qualité  
Bryn FOSBURGH - Bruce PEETZ ..... 49

> La modernisation du GPS  
Romain LEGROS - Frédéric MOLLE  
Nicolas BALARD ..... 59

### ■ Histoire

> L'extraction des racines carrées  
dans le manuscrit de l'arpenteur  
arlésien Bertran Boysset (~1350 - 1415)  
Magdeleine MOTTE ..... 63



> Paris : des hauts et des bas Paris  
de Haut en Bas  
Gilles THOMAS ..... 67

### ■ Géométrie

> Ballon rond et géométrie  
Robert VINCENT ..... 72

### ■ GSF

> Boule de neige malgache  
François BODIN ..... 77

### ■ Art et Géométrie

> Geneviève Asse : le festival du bleu  
Jean-Pierre MAILLARD ..... 78

### ■ Livres ..... 80

Pour la recherche de nos annonceurs  
consulter la page 81.

## A chacun son calendrier

*La vie de l'étudiant est ordonnée par la rentrée, les contrôles, les vacances et assez fréquemment par l'examen, des moments qui sont autant de repères dans l'année scolaire.*

*L'activité de l'exploitant agricole est rythmée par les saisons qu'il intègre naturellement.*

*Le suivi des cultures le renseigne aussi bien que son agenda sur le moment vécu.*

*Le devoir du contribuable, initié par le vote du budget national, se traduit par l'épreuve de la déclaration de revenus puis, le moment venu, par celle du règlement des sommes dues.*

*L'emploi du temps du moine inscrit dans l'année liturgique s'organise autour des fêtes majeures, Noël, Pâques et la Toussaint.*

*Chaque semestre, l'obsession du client des magasins de prêt-à-porter et de chaussures est de ne pas rater le premier jour des soldes...*

*En chantant "L'école est finie" l'étudiant sait que l'été est bien là.*

*En coupant son maïs l'agriculteur comprend que le mois d'octobre est bien avancé, peut-être même dépassé.*

*En postant sa déclaration, le contribuable constate que le mois de mars est déjà revenu.*

*En attendant Noël, le moine se dit qu'enfin l'année se termine, heureux de la promesse de la Nativité.*

*En se ruant sur les soldes d'hiver, entre deux essayages, le chaland pense que la nouvelle année est arrivée et qu'il a un an de plus...*

*Le géomaticien et le topographe ont aussi leurs jalons à périodicité annuelle.*

*L'automne est particulièrement riche en manifestations significatives, notamment : les Journées de la topographie de Strasbourg, le Festival international de géographie de Saint-Dié-des-Vosges, la conférence francophone ESRI, Intergéo, le Cercle Géo du Mans,... Après les avoir annoncés précédemment, xyz rend compte de plusieurs de ses événements dans ce numéro.*

*Pour souligner que l'hiver aussi peut être actif, l'AFT ancrera dans la durée le Forum de la topographie, le deuxième du nom. Il sera organisé à Cachan dans les locaux de l'ESTP le 16 mars 2006.*

*Avec le printemps 2006 reviendront le MICAD et le Géo-Événement pour ne citer qu'eux.*

*Chaque année, ces rendez-vous et bien d'autres constituent en quelque sorte le calendrier géomatique et topographique des professionnels et des enseignants. Nul doute que cela incite à choisir et se préparer à tel ou tel salon ou regretter ne pas pouvoir s'y inscrire. En tout cas, l'offre proposée conséquente et variée peut permettre la mise à jour des connaissances dans nombre de disciplines et des échanges fructueux entre praticiens. Cette offre abondante montre l'actualité des sujets traités par la revue et le dynamisme des secteurs d'activité auxquelles elle ouvre ses colonnes. Cela explique, s'il en était besoin, la présence d'xyz à chaque fois que cela est possible dans les expositions associées.*

**Jean-Pierre Maillard**



## AlpTransit Saint-Gothard Les exigences imposées aux travaux topographiques sur le tronçon de Sedrun

■ Adrian RYF - Theresa NEUHIERL - Ivo SCHÄTTI (Version française : Olivier REIS)

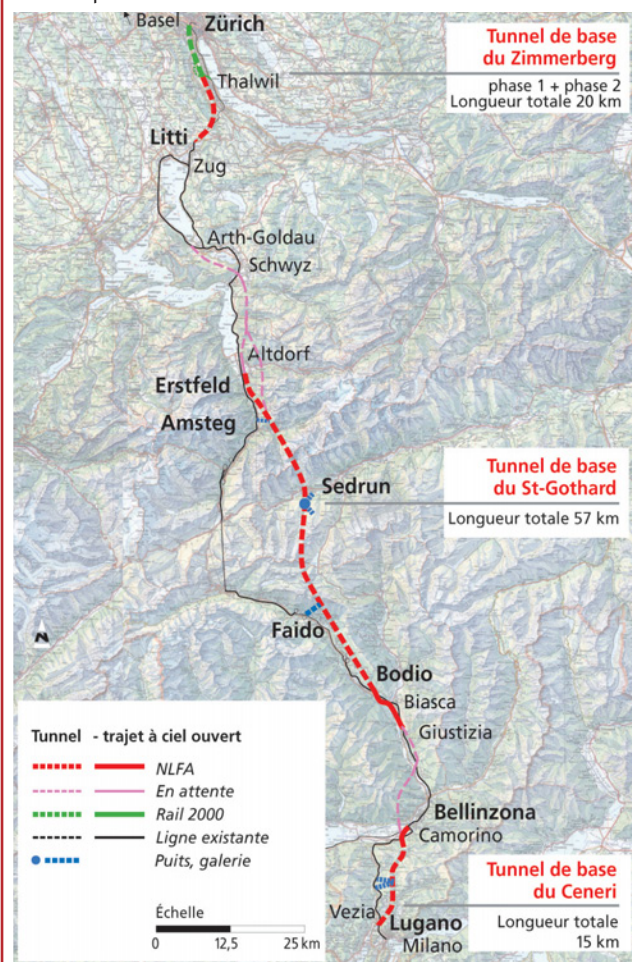


*Les descentes de points effectuées dans les puits ont montré qu'il était possible d'atteindre la valeur de 24 mm délivrée par la préanalyse. Le transfert des altitudes par l'intermédiaire de mesures électroniques des distances effectuées verticalement ne pose aucun problème. La fiabilité du transfert de la direction a pu être fortement accrue grâce au recours à deux méthodes de mesure différentes, les azimuts gyroscopiques et la technique inertielle. L'implantation du tunnel sur environ 2 km, vers le nord comme vers le sud, peut donc prendre appui sur cette base. A cette distance, de nouvelles mesures gyroscopiques seront nécessaires, dans chacune des deux directions de percement. Si le tronçon de Sedrun du tunnel du Saint-Gothard innove en matière de techniques de génie civil mises en œuvre, il ouvre également de nouvelles perspectives au domaine de la géodésie. La descente de points au plomb optique sur une profondeur de 800 m et les mesures inertielles de haute précision dévolues au transfert de la direction constituent des premières mondiales. Et l'excellente collaboration entre le consortium en charge des travaux topographiques, les ingénieurs géomètres d'AlpTransit et les Hautes écoles a permis à tous les intervenants d'acquérir une expérience exceptionnelle.*

### Le projet AlpTransit Saint-Gothard

source : [www.alptransit.ch](http://www.alptransit.ch)

Le projet AlpTransit Gotthard va donner naissance à une ligne de plaine à travers les Alpes, résolument tournée vers l'avenir. Le tunnel de base du Saint-Gothard – qui, avec une longueur de 57 km, sera le plus long tunnel au monde – constituera la pièce maîtresse de cette nouvelle liaison ferroviaire. Cette œuvre de pionnier du XXI<sup>e</sup> siècle apportera une amélioration notable des possibilités de circulation et de transport au cœur de l'Europe.



La nouvelle ligne ferroviaire à travers les Alpes (NLFA) du Saint-Gothard.



**A**u point d'attaque intermédiaire de Sedrun du tunnel de base du Saint-Gothard, long de 57 km et partie intégrante du projet AlpTransit, le percement s'effectue vers le nord et vers le sud à partir du fond de deux puits d'une profondeur de 800 m chacun. Le transfert de la planimétrie, de l'altimétrie et de la direction de la caverne creusée en tête de puits jusqu'au niveau inférieur, celui du tunnel, est réalisé par des topographes qui recourent pour cela à des méthodes si possibles différentes et indépendantes les unes des autres de façon à garantir le respect des exigences imposées en matière de précision et de fiabilité.

## Situation initiale et exigences imposées

Le percement du tunnel de base du Saint-Gothard, long de 57 km et partie intégrante du projet AlpTransit, s'effectue simultanément depuis cinq sites différents. Le maître d'œuvre a fixé l'écart maximal admissible en chacune des différentes jonctions prévues à 25 cm en direction et en distance et à 12,5 cm en altitude. Les topographes considèrent ces valeurs comme des tolérances au sens géodésique et en déduisent les précisions requises en planimétrie (10 cm) et en altimétrie (5 cm). Formulé de façon concrète, cela signifie que toutes les jonctions sont à réaliser à une précision dimensionnelle équivalant à la taille d'un poing.

A Sedrun, le percement du tunnel s'effectue à partir du fond de deux puits d'une profondeur de 800 m chacun, surmontés d'une caverne en tête de puits et reliés à la vallée du Rhin antérieur par une galerie d'un kilomètre de longueur (figure 1). Les exigences à respecter pour la mesure du tunnel, déjà fortes, sont encore accrues par la complexité du système des puits. L'objectif assigné est de transférer la pla-

nimétrie, la direction et l'altimétrie au fond des puits avec une précision et une fiabilité aussi élevées que possible.

Le consortium VI-GBT (groupement d'ingénieurs géomètres pour le tunnel de base du Saint-Gothard), mandaté par la société AlpTransit Gotthard SA et dirigé par le bureau d'ingénieurs Grünenfelder basé à Domat/Ems, s'est vu confier la responsabilité de la conception et de l'exécution de l'ensemble des travaux topographiques nécessaires dans le cadre de l'implantation principale du tunnel de base du Saint-Gothard. Les tâches d'une certaine complexité ont fait l'objet d'une étroite collaboration entre le consortium VI-GBT, l'EPF (Ecole Polytechnique Fédérale) de Zurich depuis peu, l'université technique (TU) de Munich.

## Méthodes de mesure indépendantes

L'objectif prioritaire poursuivi pour tous les travaux topographiques réalisés dans le cadre d'AlpTransit est le recours à des méthodes de mesure de précision différentes, aussi indépendantes les unes des autres qu'il est possible, afin de parvenir à une modélisation optimale des sources d'erreur et surtout, de façon à éliminer toutes les erreurs systématiques. Cette démarche s'applique également au tronçon de Sedrun. Si les méthodes de descente de point par voie optique et mécanique se sont imposées d'emblée pour le transfert de la planimétrie dans les puits, la recherche d'une méthode indépendante permettant de contrôler les azimuts gyroscopiques utilisés pour le transfert de la direction a été bien plus longue. La technique de mesure inertielle, employée pour la première fois au monde dans le cadre de travaux de précision en topométrie souterraine, a finalement permis de mener ce contrôle à bien.

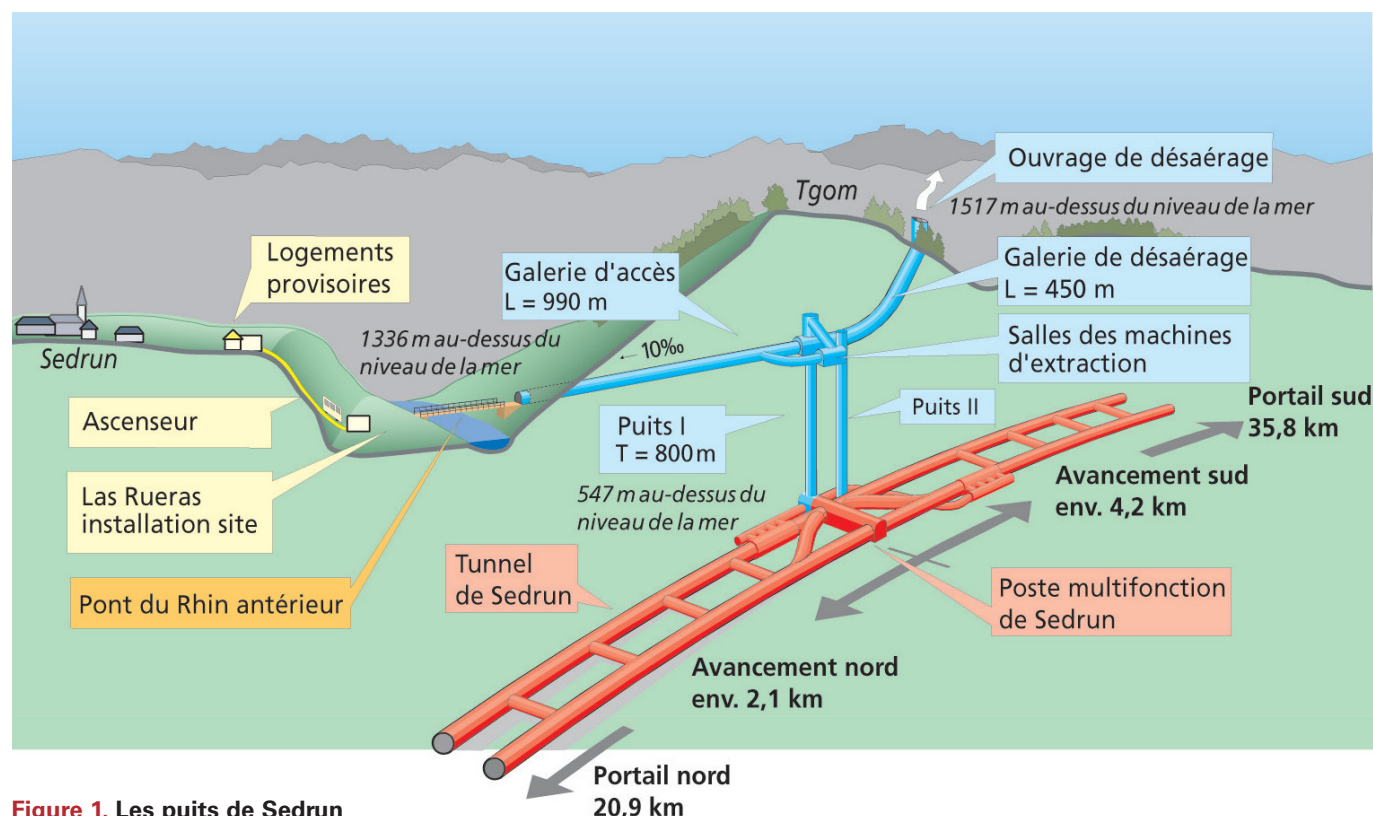


Figure 1. Les puits de Sedrun



## Transfert de la planimétrie et de l'altimétrie

### ■ Descentes de points au plomb optique dans les puits I et II

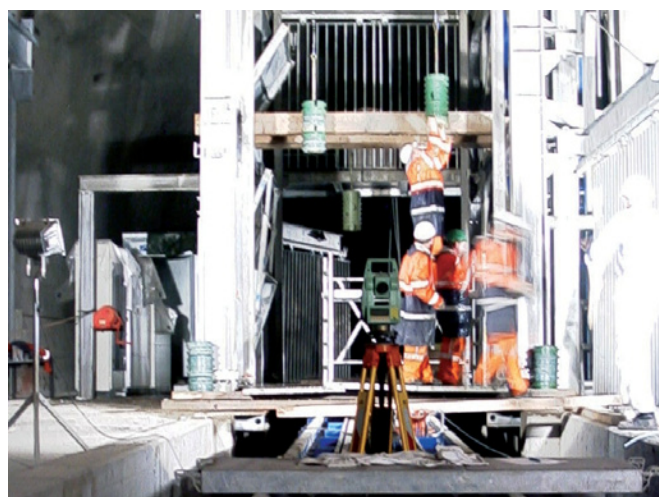
La descente de points au plomb optique dans un puits d'une profondeur de 800 m exige des conditions de visibilité parfaites dont on ne dispose pas dans le cas normal. C'est pourquoi, plusieurs heures avant l'exécution de cette opération, la ventilation a été réglée de telle manière qu'un "courant d'air descendant" se forme dans le puits, autrement dit, que l'air soit aspiré au fond du puits et ramené vers la surface par le circuit de ventilation ; ainsi, l'air frais entrant dans le puits par sa tête dissipait tout brouillard éventuel et permettait de disposer d'une parfaite visibilité de la tête au fond du puits. Une descente de points au plomb optique a pu être réalisée dans chacun des deux puits : au printemps 2002 dans le puits I et en janvier 2004 dans le puits II.

Une lunette nadirale Leica (résolution : 1:200 000) montée sur trépied a été utilisée pour les descentes de points au plomb optique, lesquelles se sont effectuées selon trois couloirs afin d'accroître la précision et la fiabilité du processus (figure 2). Des prismes équipés de diodes lumineuses centrées ont servi de cibles, mises en place sur les points implantés au fond du puits au moyen de coordonnées approchées. Les écarts ont à chaque fois été observés dans quatre positions et les corrections ont été transmises par radio à l'opérateur se trouvant au fond du puits. La position des trépieds utilisés au fond comme en tête de puits a été mesurée depuis trois stations en intégrant les points fixes au processus.

©AlpTransit, 2-8 : EPF Zurich



Figure 2. Lunette nadirale montée sur trépied



©AlpTransit, 2-8 : EPF Zurich

Figure 4. Descente de point par voie mécanique

### ■ Transfert de l'altitude

Il a été possible, pour chacune des deux descentes de points au plomb optique, de procéder au transfert de l'altitude en mesurant la distance verticale du fond du puits vers sa tête au distancemètre électronique. Un dispositif spécial a permis de viser un réflecteur monté sous le trépied implanté en tête de puits (figure 3). Les deux différences d'altitude mesurées ne diffèrent que de quelques millimètres.

### ■ Descente de point dans le puits I par des moyens mécaniques

Une descente de point par voie mécanique a été entreprise par la société DBE Gorleben très peu de temps après la première descente au plomb optique réalisée au printemps 2002. Cette entreprise possède une solide expérience acquise dans le domaine de l'exploitation minière. La descente de point par voie mécanique a également été effectuée selon trois couloirs. L'installation des treuils, des poulies et la descente des fils ont nécessité près d'une journée de travail, les poids pesant près de 390 kg par fil ayant ensuite été mis en place en fin de journée. Les mesures ont eu lieu le lendemain, après avoir laissé reposer les fils durant environ 12 heures. Deux théodolites mis en place sur deux stations différentes ont

■ ■ ■



©AlpTransit, 2-8 : EPF Zurich

Figure 3. Réflecteur monté sous le trépied



■ ■ ■ servi à mesurer chacun 10 points de rebroussement dans les deux positions de la lunette, pour chacun des trois poids en oscillation (figure 4). Une deuxième série de mesures a été effectuée après une réduction des poids, ramenés à environ 192 kg, la troisième série s'effectuant à nouveau avec des poids de 390 kg. Des influences systématiques telles que des courants d'air, le suintement de l'eau et la courbure du fil font dévier ce dernier de sa position théorique. Le recours à des poids différents permet de minimiser ces erreurs.

## ■ Exploitation et résultats

Lors de la descente d'un point, la déviation de la verticale exerce une influence directe sur la précision des coordonnées et doit donc impérativement être prise en compte. La direction de la verticale étant incurvée, les valeurs de correction à appliquer en tête de puits et au fond ne sont pas les mêmes. Le modèle de géoïde de 1998 (Marti, swisstopo) est utilisé pour déterminer les composantes de la déviation de la verticale, valeurs dont la précision est de l'ordre de 0,3 mgon. La figure 5 présente les composantes de la déviation de la verticale aux points concernés ainsi que les corrections qui en découlent. Les descentes de points (optiques et mécaniques) se fondant toutes sur un même modèle de géoïde, les deux méthodes ne sont pas totalement indépendantes, puisque d'éventuelles erreurs systématiques commises dans ce modèle restent indétectables.

Le calcul de la précision interne de la descente de points au plomb optique a d'abord été entrepris. Les deux triangles définis en tête de puits et au fond par les points descendus ont donc été comparés entre eux. Pour chacun des deux puits, la précision interne s'est établie à 4 mm. A cela s'ajoute l'incertitude inhérente à la déviation de la verticale estimée à 0,3 mgon, soit environ 4 mm sur 800 m. Ainsi, la précision de la descente de point au plomb optique peut être estimée à environ 6 mm.

Dans le cas de la descente de point par voie mécanique, les trois séries de mesures réalisées (1 : poids total ; 2 : poids réduit de moitié ; 3 : poids total) ont permis de procéder à deux exploitations dont deux déterminations de la position théorique ont résulté. Les écarts maximaux entre ces deux exploitations s'établissent à 10,2 mm pour l'un des lieux d'observation et à 1,5 mm pour l'autre. L'évaluation de la précision s'appuie ici aussi sur la comparaison directe entre les deux triangles, l'un au niveau de la tête du puits et l'autre au fond du puits et tient par ailleurs compte de la précision des composantes de la déviation de la verticale. Au final, il en résulte une précision de 5 mm pour la descente de point par voie mécanique.

La compensation globale du réseau intègre les résultats des descentes de points (par voie optique et mécanique) et les combine aux mesures de rattachement effectuées au niveau de la tête et du fond du puits. Les distances mesurées au distancemètre électronique (depuis le fond du puits vers sa tête) lors de la descente de point au plomb optique servent au transfert des altitudes tandis que les azimuts gyroscopiques mesurés lors d'une autre campagne de mesure servent au transfert de l'orientation.

Une analyse des différentes descentes de points au sein de la compensation globale met les excellents résultats suivants en lumière : les variantes de la compensation ne prenant en compte que la descente optique ou que la descente par voie mécanique effectuée dans le puits I, conduisent à des différences de coordonnées d'à peine 2 mm suivant les axes Y et X au fond du puits [Schätti 2004].

## Transfert de la direction

Les puits I et II ne sont distants que de 38 m. Les deux descentes de points effectuées permettraient de déterminer un azimut avec une précision de l'ordre de 20 mgon, valeur toutefois insuffisante pour le transfert de la direction puisqu'une précision de 1,5 mgon est exigée.

## ■ Gyroscope

La définition de la direction de percement au fond des puits de Sedrun s'effectue au moyen d'azimuts gyroscopiques, lesquels sont mesurés à l'aide du Gyromat 2000 de l'EPF Zurich. A l'intérieur du gyroscope, une masse suspendue est en rotation à grande vitesse. Le mouvement de précession de la Terre conduit cette masse à osciller autour de la direction du nord géographique, autrement dit, parallèlement à l'axe de rotation de la Terre. La précision du gyroscope dépend pour une large part de la température ambiante. Les écarts entre la température à laquelle a été mesuré l'azimut de référence dans le réseau du portail et celles à laquelle s'effectuent les mesures réalisées ultérieurement au sein du réseau du tunnel peuvent être très conséquents. C'est pourquoi il est impératif de procéder à des étalonnages réguliers de l'instrument dans la chambre d'essai en température dont dispose l'EPF Zurich. Dans le tunnel, la précision et la fiabilité peuvent être accrues par l'exécution de mesures répétées. D'éventuels écarts systématiques ne peuvent toutefois pas être éliminés de la sorte.

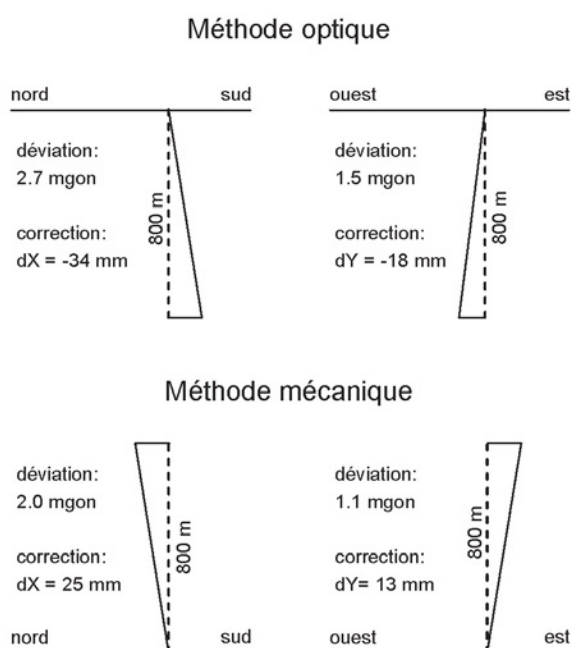


Figure 5. Déviation de la verticale





**Figure 7. Mesures d'autocollimation au fonds du puits**

Ainsi, un modèle de masse de bonne qualité est en particulier requis afin de permettre l'estimation de valeurs aussi réalistes que possible des composantes de la déviation de la verticale pour toutes les stations de mesure. Ici aussi, le modèle de swisstopo est mis à contribution. La précision exigée pour les azimuts gyroscopiques est de 1,5 mgon. Le recours à des mesures répétées a permis d'atteindre une valeur d'environ 1,3 mgon.

#### ■ Mesures inertielles

Dans l'état actuel de la technique, la méthode de mesure inertielle représente la seule possibilité réaliste de contrôle indépendant des azimuts gyroscopiques. Une collaboration étroite entre l'université technique (TU) de Munich et l'EPF Zurich a permis d'utiliser pour la toute première fois un système inertiel de la TU Munich dans le cadre d'un transfert de direction de haute précision. Cet instrument de la société iMAR intègre trois couples accéléromètre – gyroscope, perpendiculaires deux à deux, l'accéléromètre et le gyroscope formant chaque couple étant coaxiaux. Au terme d'une phase d'initialisation de quelques minutes, réalisée en position de repos et durant laquelle l'orientation de départ est déterminée, les translations et les rotations de l'unité sont enregistrées.



**Figure 6. Unité de mesures inertielles**

■ ■ ■ trées et intégrées lors de ses déplacements. De la sorte, l'angle de rotation entre deux positions peut être mesuré avec une très grande précision.

A Sedrun, l'unité de mesure a été placée sur une plaque métallique, solidaire du transporteur à bande du puits, qui a alors fait plusieurs allers et retours à grande vitesse (16 m/s) entre le fond et la tête du puits (figure 6). Au niveau supérieur et au niveau inférieur, un tachéomètre a été mis en station face au puits afin de mesurer la direction de miroirs montés sur la plaque métallique pour la transférer dans le réseau géodésique du tunnel. La mesure des miroirs s'est effectuée par autocollimation, c'est-à-dire que le réticule du tachéomètre a été mis en coïncidence avec son image réfléchi par le miroir (figure 7). La précision a ainsi pu être accrue d'un facteur deux par rapport à des mesures de direction normales. La procédure d'autocollimation a été exécutée à chacun des arrêts du transporteur à bande en tête de puits et au fond.

On peut se représenter le dispositif de mesure retenu comme un cheminement polygonal rattaché au niveau de la tête et du fond du puits au réseau du tunnel. Chaque angle du polygone est déterminé pour partie par autocollimation, par moitié au niveau supérieur et au niveau inférieur, l'angle de rotation entre la tête et le fond du puits étant fourni par le système inertiel (figure 8).

Deux séries de mesures comportant chacune cinq allers et retours ont pu être effectuées en avril 2004 et en janvier 2005 à des périodes en lesquelles le chantier était à l'arrêt.

## ■ Exploitation et résultats

L'exploitation des mesures inertielles est complexe et s'effectue en plusieurs étapes. Elle est décrite en détail dans [Neuhierl 2005]. Les deux séries de mesures ont fait l'objet d'exploitations séparées. La moyenne des trajets de mesure et la combinaison avec les mesures par autocollimation ont mis en lumière, pour les deux campagnes de mesure, un écart en direction entre la tête et le fond du puits. La précision interne de cette méthode de transfert de la direction, calculée à partir de tous les trajets de mesure, s'établit à 1,5 mgon.

La comparaison avec le réseau du tunnel reposant sur les mesures gyroscopiques fait apparaître un écart de +0,7 mgon

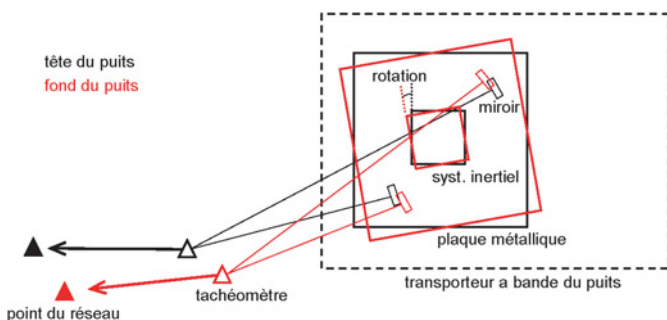


Figure 8. Principe des mesures inertielles

pour la première série de mesures et de +3,7 mgon pour la deuxième série, soit une valeur moyenne de +2,2 mgon. Il résulte des tests statistiques qu'aucune valeur de correction ne peut en être déduite pour les mesures gyroscopiques. Cependant, les mesures inertielles ont indéniablement rempli la mission qui leur était assignée : servir de méthode de contrôle indépendante et accroître le niveau de fiabilité. La technique de mesure inertielle présente en outre la particularité d'être moins soumise à l'influence de la déviation de la verticale que la technique de mesure gyroscopique. Enfin, la précision de la méthode, estimée à environ 1,5 mgon, est du même ordre de grandeur que celle fournie par le gyroscope (1,3 mgon). ●

## Références bibliographiques

**RYF, A.; NEUHIERL, T., SCHÄTTI, I. [2005]:** Implanter AlpTransit: Les puits de Sedrun. Revue TRACÉS, 19/05.

**NEUHIERL, T. [2005] :** Eine neue Methode zur Richtungsübertragung durch Koppelung von Inertialmesstechnik und Autokollimation. Thèse de doctorat, TU Munich.

**SCHÄTTI, I.; RYF, A. [2004] :** Hochpräzise Lotung im Schacht Sedrun des Gotthard-Basistunnels. Géomatique Suisse, 7/2004.

## Contacts

**Adrian RYF**, ing. dipl. EPF Zurich  
Institut de géodésie et de photogrammétrie  
ETH Hönggerberg, CH – 8093 Zurich  
adrian.ryf@geod.baug.ethz.ch

**Theresa NEUHIERL**, ing. dipl. TU Munich  
Lehrstuhl für Geodäsie, Technische Universität München  
Arcisstrasse 21, D – 80290 München

**Ivo SCHÄTTI**, ingl. dipl. EPF Zurich  
Grünenfelder und Partner AG  
Denter Tumas 6, CH – 7013 Domat/Ems

## ABSTRACT

*AlpTransit Gotthard is creating a flat rail link for future travel through the Alps. At the heart of the new transalpine rail route is the world's longest tunnel – the 57 km long Gotthard Base Tunnel. In Sedrun in the middle of the Alps the construction site is accessed through two 800 m deep shafts, representing a big challenge for all parties involved in the realization of this project.*

*The transfer of the position in the shafts was done optically as well as mechanically. For the first time in the world, inertial measurements were used to control the gyroscopic measurements for the transfer of the orientation. With the application of modern methods and instruments the required breakthrough results can be guaranteed.*



# Gravimétrie, géoïde et nivellement par GPS en Belgique

■ H. DUQUENNE - M. EVERAERTS - P. LAMBOT

*Cet article présente les progrès récents réalisés par l'Observatoire Royal de Belgique et l'Institut Géographique National belge (IGN-B), en collaboration avec l'International Geoid Service (IGeS) et le Laboratoire de Recherche en Géodésie de l'IGN français, pour réaliser un modèle du géoïde. Plusieurs types de données ont été incorporées dans ce calcul : un modèle global de champ, des données gravimétriques, un modèle numérique de terrain. Deux méthodes de calcul ont été confrontées : l'intégration de Stokes par transformées de Fourier rapide (FFT) et la collocation rapide : elles se sont avérées équivalentes. Le géoïde a été comparé à un ensemble de 4000 points GPS nivelés, d'une part pour valider les données et les méthodes de calcul, et d'autre part pour adapter le géoïde aux besoins particuliers du nivellement par GPS. Un test indépendant permet de conclure à une précision de 2 centimètres.*

## Le contexte technique et scientifique

Depuis la généralisation du GPS comme moyen de localisation précis, le géoïde est devenu un élément clé dans les techniques de positionnement. Il permet en effet la conversion des hauteurs ellipsoïdales obtenues par GPS en altitudes. Deux méthodes s'offrent à l'utilisateur :

- Ou bien il réalise lui-même un modèle local de géoïde en déterminant la hauteur ellipsoïdale de quelques repères de nivellement ou l'altitude de quelques points géodésiques, puis en interpolant la hauteur du géoïde sur les points à déterminer.
- Ou bien il utilise, de manière plus ou moins transparente, un modèle national de géoïde spécialement adapté aux nécessités du nivellement par GPS.

La première méthode a prévalu jusqu'au milieu de la dernière décennie, en raison de l'indisponibilité de modèles de géoïde suffisamment précis. Mais, pour l'utilisateur, son coût est plus élevé et elle n'est pas sans risque : si on réalise un géoïde local sur la base d'un réseau de points GPS nivelés peu dense, une ondulation naturelle du

géoïde ou une faute d'un ou deux décimètres sur l'altimétrie des points risquent fort de passer inaperçues. Enfin, cette méthode conduit de fait à la prolifération de références altimétriques (les géoïdes locaux réalisés par différents opérateurs à différentes époques) plus ou moins confidentielles, dont la cohérence est impossible à assurer.

La seconde méthode consiste à élaborer un modèle de géoïde d'étendue suffisante répondant aux besoins du nivellement par GPS en termes d'exactitude, de précision, de résolution, de fiabilité. Les progrès récents dans les domaines de la modélisation du géoïde, de la collecte des données, de la puissance de calcul disponible ont permis des réalisations opérationnelles tout au moins dans les pays dotés de l'infrastructure géodésique adéquate. Cet article décrit les progrès récents réalisés par l'Observatoire Royal de Belgique et l'Institut Géographique National belge. En 1996, deux solutions ont été calculées, l'une par la formule de Stokes, l'autre par collocation (Pâquet et al. 1997). Leurs précisions, évaluées par comparaison à 36 points GPS nivelés, étaient très similaires : 3 à 4 cm en écart-type, 10 à 15 cm en erreur maximale,

principalement dans les Ardennes, dont la couverture gravimétrique était plus pauvre. En 2003, suite à la disponibilité de nouvelles données (nouveaux modèles globaux de champ, nouveau modèle numérique de terrain, densification de la couverture gravimétrique et des points GPS nivelés), de nouvelles déterminations ont été entreprises.

## Le modèle de géoïde belge BG03

### ■ Les données

#### Modèles globaux de champ

La plupart des géoïdes modernes résultent de la combinaison d'un modèle global du champ de pesanteur, de données gravimétriques et d'un modèle numérique de terrain. D'une certaine manière, le modèle global intervient comme une solution approchée qu'il faut raffiner. Il sert aussi à modéliser les données gravimétriques lointaines qu'on renonce à prendre en compte. Le calcul précédent du quasi-géoïde en Belgique était basé sur OSU91A. Depuis, deux nouveaux modèles géopotentiels sont apparus : le modèle EGM96 (Figure 1), complet jusqu'au degré 360, (Lemoine et al., 1998 ; Sansó, 1997) et le modèle à haute résolution GPM98CR, complet jusqu'au degré 720 (Wenzel, 1998). OSU91A et EGM96 sont assez similaires : ils ont la même résolution (55 km en demi longueur d'onde), ils ont été réalisés par des méthodes assez semblables (mélange d'observations de géodésie spatiale, d'altimétrie par satellite et de gravimétrie), en assimilant à peu près les mêmes données dans la région qui nous intéresse. GPM98CR par contre montre une résolution plus détaillée (22,5 km). Il a été établi par correction et augmentation d'un modèle spatial au moyen de gravimétrie terrestre dense. ■■■

■ ■ ■ Dès lors, on peut s'attendre à des différences par rapport à OSU91A et EGM96. Les deux modèles EGM96 et GPM98CR ont été utilisés lors du calcul du quasi-géoïde BG03.

## Gravimétrie

La première détermination de la pesanteur en Belgique fut effectuée à l'aide d'un pendule à l'Observatoire Royal de Belgique en 1884. Le premier réseau belge fut observé en 1928. Il comprenait 24 stations et sa précision était de 1 à 3 mGal<sup>1</sup>. Dans les années 1947-1948, un second réseau national fut réalisé, celui-ci comprenait 381 stations. La précision était meilleure que 0.7 mGal pour toutes les stations. Depuis 1948, l'IGN et l'Observatoire Royal de Belgique ont travaillé en collaboration étroite pour densifier la couverture gravimétrique de la Belgique. Ce but fut finalement atteint en 2002 (Figure 2). La densité est moindre dans le sud-est (1 station par 2,5 km<sup>2</sup> à 1 station par 5 km<sup>2</sup>) mais plus forte dans le reste du pays (1 station par km<sup>2</sup>). La banque de données de l'Observatoire Royal de Belgique contient actuellement plus de 250 000 points de mesures couvrant la Belgique et les contrées avoisinantes. Il y a plus de 30 000 données pour le territoire Belge qui ont toutes une précision meilleure que 0,1 mGal. Le reste des données a été fourni par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières pour la France, par le BGS pour le Royaume-Uni, par le Rijkswaterstaat pour les Pays-Bas et par H.G. Wenzel (communication personnelle) pour l'Allemagne. Toutes ces données ont été introduites dans le calcul du nouveau quasi-géoïde belge BG03.

## Modèle numérique de terrain

Dans le cadre de ce calcul un nouveau MNT a été préparé afin d'évaluer correctement les effets de terrain. Pour la Belgique le MNT a été fourni par l'IGN-B avec une résolution de 3' x 6'. En ce qui concerne les territoires hors de la Belgique, une grille homogène au pas de 4 km a été obtenue en intégrant les données terrestres du projet *West East Europe Gravity Project* avec la grille bathymétrique de 5' de la *National Oceanic and Atmospheric Administration*. Les MNTs

(1) Le milligal (symbole : mGal) est une unité d'accélération encore utilisée en gravimétrie, valant 10<sup>-5</sup> m/s<sup>2</sup>

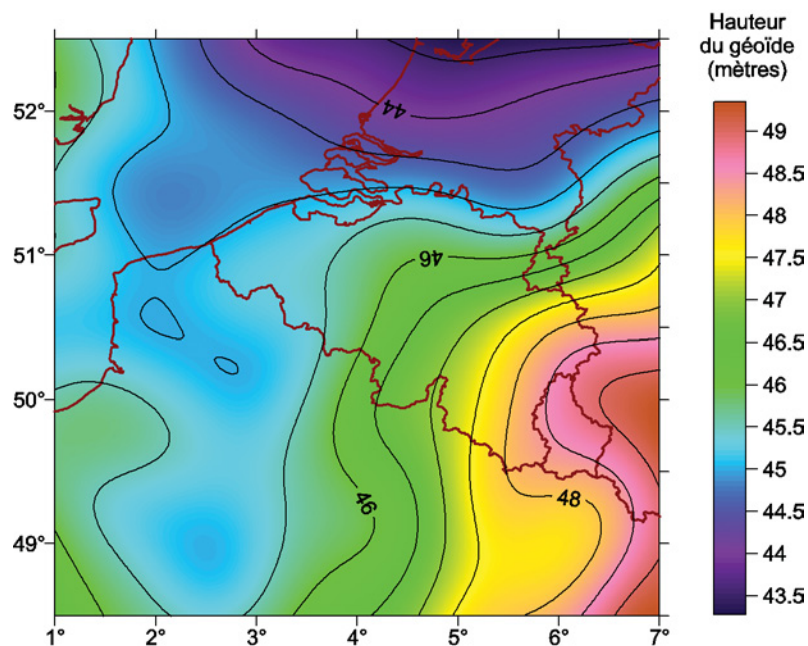


Figure 1. Le géoïde dans la région de la Belgique d'après le modèle global EGM96.

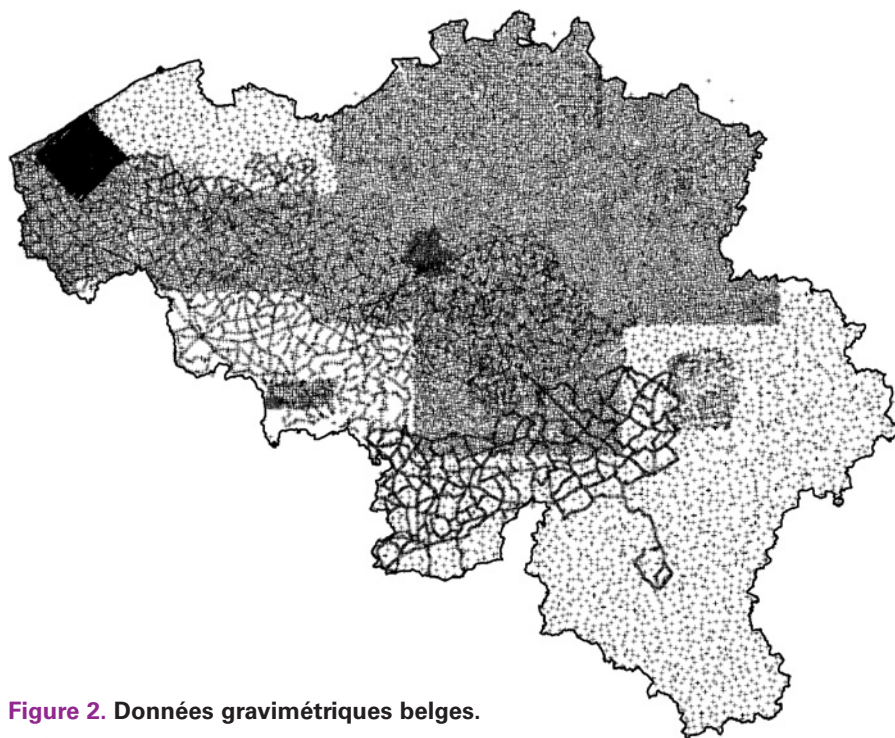


Figure 2. Données gravimétriques belges.

ont été rassemblés en utilisant une interpolation bilinéaire afin d'obtenir un MNT unique avec des pas  $\Delta\varphi = 2.5'$  et  $\Delta\lambda = 3'$ , dans les limites  $47,5^\circ \leq \varphi \leq 53,5^\circ$  et  $0^\circ \leq \lambda \leq 8^\circ$ . De cette façon, le MNT estimé est connu sur une surface étendue à un degré de plus que la zone de couverture gravimétrique (Figure 3).

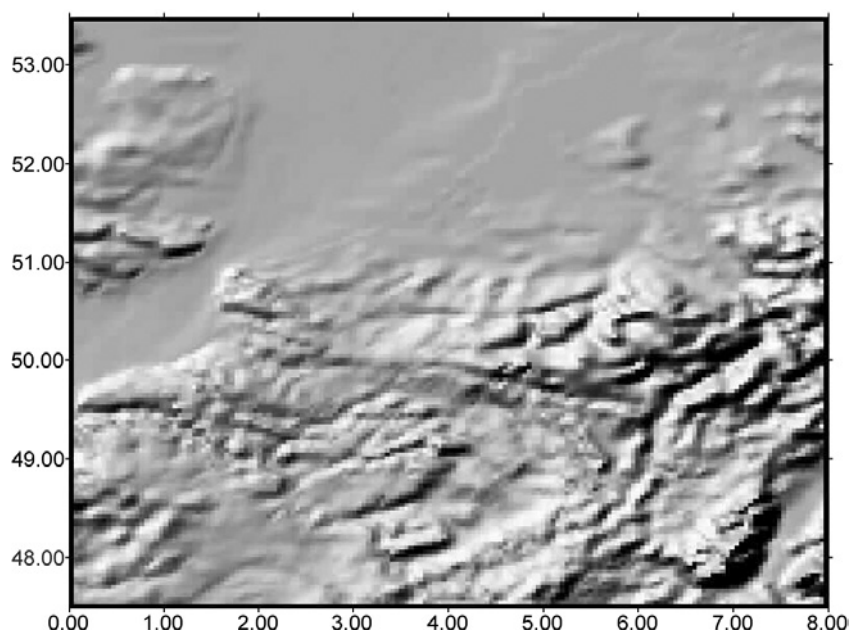
## Géodésie et nivellement

Le département de la géodésie de l'Institut Géographique National belge

a réalisé un nouveau système de référence géodésique, sous-ensemble du système européen EUREF (*European Reference Frame*), dénommé BeRef (*Belgium Reference frame*).

Dans ce système tridimensionnel géocentrique, les coordonnées associées au datum européen ETRS89 (*European Terrestrial Reference System*) et exprimées sous formes de longitudes, latitudes et hauteurs ellipsoïdales, assurent





**Figure 3. Modèle numérique de terrain (image ombrée). La topographie étant faiblement accidentée, il n'est pas nécessaire que la résolution soit très fine.**

une cohérence au niveau centimétrique. La mise en place de cette nouvelle référence commencée en 1988, a été réalisée entièrement avec la technique GPS, et s'est achevée en 2002. Le réseau de référence, constitué de 36 points dont 4 points font partie du réseau EPN (*EUREF Permanent Network*), a été ajusté en un ensemble prenant appui sur sept points EPN. L'écart standard sur les coordonnées varie de 4 à 6 millimètres. La densification de ce réseau est constituée de quelques 4000 points; ceux-ci ont été ajustés en un ensemble prenant appui sur les points BeRef. L'écart-type sur les coordonnées varie de 8 à 17 millimètres.

Chaque point géodésique appartenant à BeRef a été rattaché par nivellement géométrique au réseau de nivellement national DNG (Deuxième Nivellement Général) qui constitue la référence d'altitude belge. Le réseau BeRef offre donc un ensemble de points où sont connues notamment la hauteur ellipsoïdale dans le système de référence ETRS89 et l'altitude orthométrique dans le système de référence DNG.

### ■ Les méthodes de calcul du géoïde gravimétrique

Il existe deux grandes familles de méthodes de calcul du géoïde à partir de données gravimétriques: la méthode de

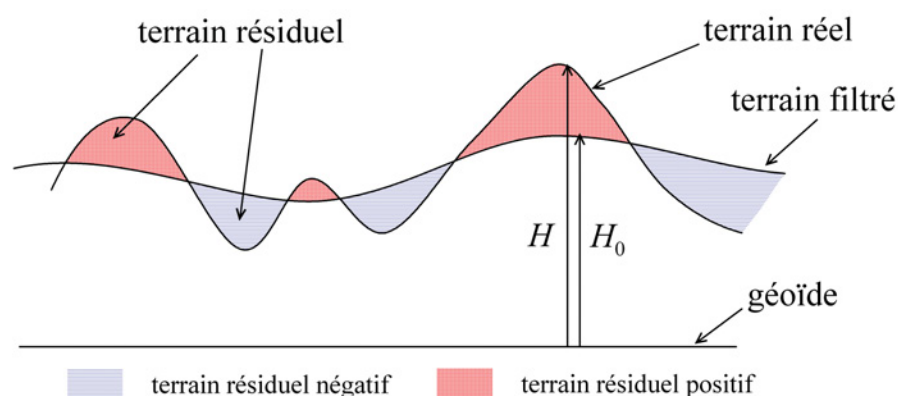
Stokes, qui fait partie des méthodes intégrales, et la collocation, qui est une méthode statistique. Elles ont toutes deux été mises en œuvre pour calculer le modèle BG03, de façon à comparer et valider les résultats. Dans les deux cas, on transforme les valeurs de pesanteur mesurées en anomalies de pesanteur résiduelles  $\Delta g_{res}$  en retranchant la pesanteur vue par le modèle de champ et l'effet du terrain. Cette phase appelée "retrait" permet de rendre les valeurs à traiter plus petites et plus lisses, donc facilement interpolables, et harmoniques, c'est-à-dire indéfiniment dérivables par rapport aux coordonnées. Cette propriété doit en effet être vérifiée pour qu'on puisse appliquer les méthodes de Stokes ou de collocation. En fait, et pour être rigoureux, il

faut remarquer que le modèle global de champ contient déjà une partie des effets du terrain, l'attraction gravitationnelle correspondant aux formes principales de la topographie. Il ne faut donc pas retrancher la totalité des effets du terrain, mais seulement la partie qui n'est pas déjà dans le modèle de champ et qui correspond aux détails de la topographie. On l'appelle "terrain résiduel" (Figure 4).

Dans le cas de la méthode de Stokes, on interpole les anomalies de pesanteur résiduelles aux points de mesure pour obtenir une grille régulière. Celle-ci est utilisée pour calculer la hauteur du géoïde résiduel par la formule:

$$N_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g_{res} S(\psi) d\sigma \quad (1)$$

$S(\psi)$  est une fonction compliquée mais qui ne dépend que de l'angle  $\psi$  sous lequel on voit, depuis le centre de la Terre, le point de calcul et le point courant d'intégration (Figure 5).  $R$  est le rayon de la Terre,  $\gamma$  est la pesanteur normale au point de calcul, ce serait la pesanteur si la Terre était un ellipsoïde de révolution.  $d\sigma$  est l'élément d'angle solide, c'est-à-dire l'élément de surface terrestre divisé par  $R^2$ ,  $\sigma$  est le domaine d'intégration, une calotte sphérique de quelques centaines de kilomètres de rayon. Le calcul direct d'une grille fine du géoïde résiduel par l'équation (1) prend beaucoup de temps, par exemple des dizaines d'heures pour la Belgique avec un ordinateur de bureau. Il est possible de montrer que l'intégrale de Stokes se met sous la forme d'une convolution calculable exactement par transformée de Fourier rapide (FFT). Le gain en temps de calcul est considé-



**Figure 4. La méthode du terrain résiduel.  $H$  est l'altitude du terrain. Par filtrage passe-bas, on obtient le terrain filtré d'altitude  $H_0$ . La différence est le terrain résiduel, dont l'influence n'est pas déjà contenue dans le modèle de champ.**

■ ■ ■ rable (un facteur 100 à 1 000, pour fixer les idées). Cette méthode a été appliquée pour calculer deux des versions tests de BG03.

La méthode de collocation est une généralisation des moindres carrés. Dans notre cas, les observations sont les anomalies résiduelles en  $q$  points et leur matrice est :

$$\ell = \begin{pmatrix} \Delta g_{res,1} \\ \vdots \\ \Delta g_{res,q} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les inconnues sont les hauteurs de géoïde en  $p$  points, leur matrice est :

$$\mathbf{N}_{res} = \begin{pmatrix} N_{res,1} \\ \vdots \\ N_{res,p} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Elles se déduisent des observations par :

$$\mathbf{N}_{res} = \mathbf{C}_{N,\Delta g} (\mathbf{C}_{\Delta g,\Delta g} + \Sigma_{\Delta g})^{-1} \ell \quad (4)$$

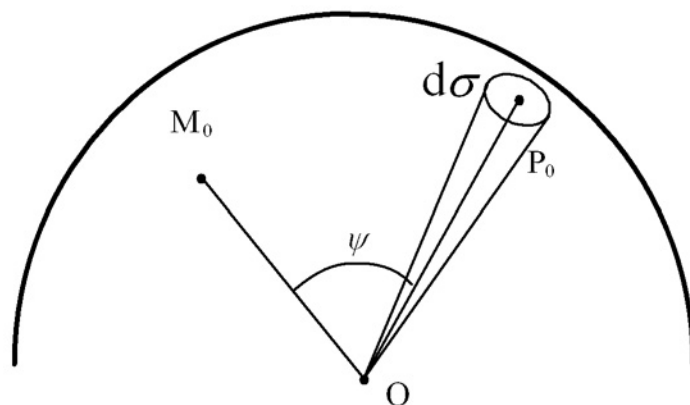
$\Sigma_{\Delta g}$  est la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure de la pesanteur, de dimension  $q \times q$ . On prend généralement une matrice scalaire :

$$\Sigma_{\Delta g} = \sigma_{\Delta g}^2 \mathbf{I}_q \quad (5)$$

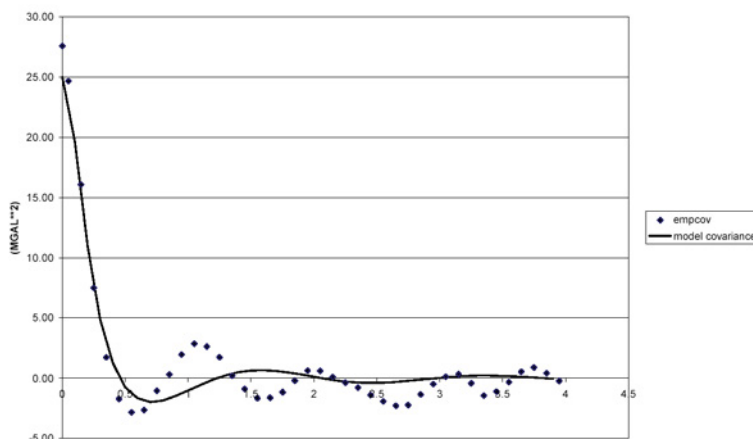
où  $\sigma_{\Delta g}$  est l'écart-type a priori des mesures et  $\mathbf{I}_q$  la matrice unité de dimension  $q \times q$ .

$\mathbf{C}_{\Delta g, \Delta g}$  est la matrice d'auto-covariance des anomalies de pesanteur résiduelles aux points de mesure. Elle traduit le fait que, en deux points voisins, les anomalies de pesanteurs sont statistiquement très voisines, car créées à peu près par les mêmes distributions de masses à l'intérieur de la Terre.  $\mathbf{C}_{\Delta g, \Delta g}$  se calcule à partir d'un modèle de covariance. Dans le cas de BG03, la covariance entre deux points P et Q a été calculée suivant le modèle de covariance (Tscherning et Rapp, 1974) formule (6). Les deux paramètres  $A$  et  $R_B$  sont ajustés aux données

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta g_{res}(P), \Delta g_{res}(Q)) = & \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i \frac{(i-1)^2}{r_P r_Q} \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi_{PQ}) \\ \sigma_i = & \begin{cases} \text{variance pour le degré } i \text{ du} \\ \text{modèle de champ pour } i \leq N_{\max} \end{cases} \quad (6) \\ & \frac{A}{(i-1)(i-2)} \left( \frac{R_B}{R} \right)^2 \text{ pour } i > N_{\max} \\ N_{\max} = & \text{degré maximal du} \\ & \text{modèle de champ} \end{aligned}$$



**Figure 5.** Méthode de Stokes.  $M_0$  est le point où on calcule la hauteur du géoïde.  $P_0$  est le point courant d'intégration, où l'anomalie de pesanteur est  $\Delta g$ .  $O$  est le centre de la Terre.



**Figure 6.** Exemple d'ajustement d'un modèle de covariance des anomalies de pesanteur résiduelles à des données terrain. Modèle ce champ retiré : EGM96. Abscisse : distance angulaire entre deux points, en degrés. Ordonnée : covariance des anomalies résiduelles. L'histogramme des covariances empiriques est représenté par des points. La courbe est le graphe du modèle ajusté. Celui-ci coïncide assez bien avec les données, au moins pour les distances inférieures à 50 km.

terrain (Figure 6). Pour cela, on construit l'histogramme des covariances en fonction de la distance en utilisant tous les couples de points gravimétriques disponibles, puis on cherche les paramètres qui assurent une bonne coïncidence du modèle à l'histogramme.

Toujours dans la formule (4),  $\mathbf{C}_{N,\Delta g}$  est la matrice de covariance croisée des hauteurs du géoïde résiduel aux points de mesure. Elle caractérise la dépendance statistique de la hauteur du géoïde en un point vis-à-vis des anomalies gravimétriques aux points voisins. Les termes de  $\mathbf{C}_{N,\Delta g}$  se déduisent du modèle de covariance ci-dessus, des relations fonctionnelles qui existent entre les  $N$  et

les  $\Delta g$ , du rayon vecteur  $r$  des points et de leur distance angulaire  $\psi$  formule (7)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_{res}(P), \Delta g_{res}(Q)) = & \frac{GM}{R} \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \sigma_i \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi_{PQ}) \quad (7) \end{aligned}$$

En principe, dans la méthode de collocation, il n'est pas nécessaire que les données en entrée (ici les anomalies de pesanteur résiduelles) soient mises en grille. Cependant, l'inversion de la matrice figurant dans l'équation (4) prend un temps considérable ou même est impossible s'il y a beaucoup de données. Une méthode particulière baptisée collocation rapide (fast collocation), décrite dans (Bottoni et Barzaghi, 1993), accélère considérablement les calculs et diminue les



besoins en mémoire. Cependant, elle nécessite l'interpolation des anomalies de pesanteur pour en obtenir une grille régulière. Cette méthode a été utilisée pour calculer deux des versions tests de BG03.

Une fois calculé le géoïde résiduel soit par l'intégrale de Stokes, soit par collocation rapide, il faut procéder à la restauration des effets du terrain résiduel et du géoïde vu par le modèle global de champ.

## ■ Les résultats et leur comparaison

En combinant les deux méthodes décrites ci-dessus (Stokes par FFT et collocation rapide) et les deux modèles de champ disponibles (EGM96 et GPM98CR), quatre solutions de géoïde ont pu être calculées. Pour les départager, on a étudié l'écart entre chacune d'elles et la hauteur du géoïde issue de 35 points GPS nivelés du réseau BeRef. En un point géodésique  $P_i$ , de coordonnées géographiques  $\varphi_i, \lambda_i, h_i$  et d'altitude  $H_i$ , soit  $N_{Gvi}$  la hauteur du géoïde gravimétrique et soit  $N_{GPS-Niv,i} = h_i - H_i$  la hauteur du géoïde déduite de la géodésie et du nivellement. On commence par réduire l'écart en supposant que sa partie principale est due à une translation des références des deux géoïdes, dont on ajuste les composantes  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ , dans un repère géocentrique. L'équation d'observation est :

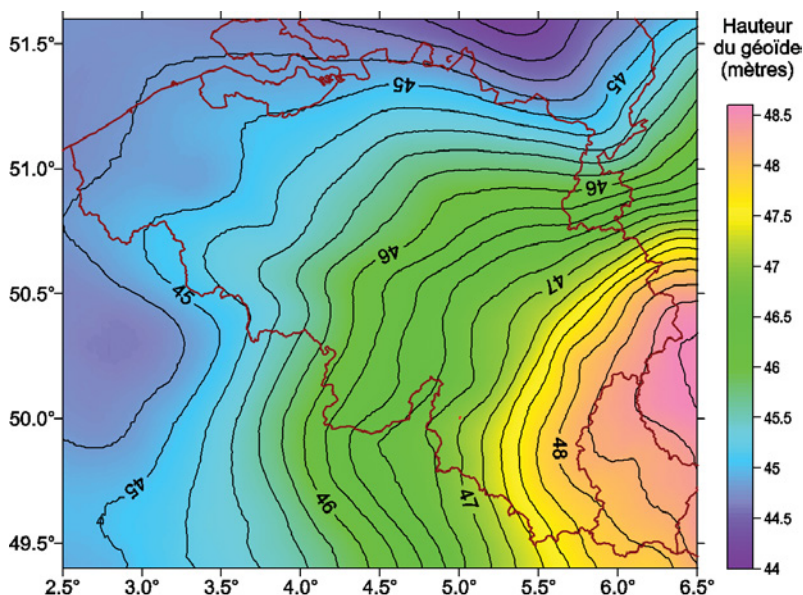
$$N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi} = (\Delta X \cos \lambda_i + \Delta Y \sin \lambda_i) \cos \varphi \quad (8)$$

$v_i$  est le résidu relatif au point  $P_i$ . Il est relativement plus sensible que l'écart brut  $N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi}$  à un changement de méthode ou de données. Les statistiques des résidus obtenues en faisant varier les méthodes de calcul et les modèles de champ sont données dans le Tableau 1. Les quatre modèles de géoïde apparaissent comme équivalents du point de vue de la précision et bien validés. Le modèle calculé par collocation rapide avec le modèle de champ GPM98CR a été finalement choisi, il est dénommé BG03 et est représenté sur la Figure 7.

## La référence d'altitude

**Tableau 1.** Statistiques des résidus des 4 modèles de géoïde, par rapport aux points GPS nivelés. Unité : mètre.

Modèle de champ	EGM96		GPM98CR	
	Collocation rapide	Stokes FFT	Collocation rapide	Stokes FFT
Ecart-type	0.03	0.04	0.03	0.03
Résidu minimal	- 0.07	- 0.07	- 0.07	- 0.07
Résidu maximal	0.07	0.07	0.07	0.07



**Figure 7.** Géoïde gravimétrique de Belgique BG03. Comparer avec la Figure 1 pour estimer le gain en précision et en résolution apporté par la gravimétrie et le MNT.

Lorsqu'un utilisateur du GPS détermine des altitudes, il espère trouver les mêmes résultats qu'en opérant par nivellement classique. S'il désire obtenir un niveau de précision de quelques centimètres, il ne peut pas se servir brutalement d'un géoïde gravimétrique pour effectuer la conversion des hauteurs ellipsoïdales en altitudes. Les raisons sont multiples :

- Les références géodésiques (repère tridimensionnel, ellipsoïde) du réseau d'appui GPS et du géoïde gravimétrique ne coïncident pas nécessairement, leur décalage n'est pas toujours bien connu.
- Les coefficients de bas degrés du modèle global de champ utilisé pour calculer le géoïde gravimétrique peuvent être erronés, mais la gravimétrie, intégrée dans une calotte de rayon trop faible, ne remédie pas complètement à ces erreurs.
- La gravimétrie comporte ses propres erreurs, systématiques (défaut d'étalement des gravimètres, erreurs de

traitement, etc.) ou accidentelles.

- Les méthodes de calcul du géoïde gravimétrique ne sont pas parfaitement rigoureuses.
- Le réseau GPS n'est pas exempt d'erreurs localement corrélées (effets troposphériques) ou non (mesures des hauteurs d'antennes).
- L'altitude du point fondamental du réseau de nivellement est déduite de l'observation du niveau de la mer<sup>2</sup>, qui peut différer du géoïde.
- Le réseau de nivellement, qui réalise de facto la référence des altitudes, est également affecté d'erreurs diverses.

On peut dire que le modèle de champ, la gravimétrie et le MNT d'une part, les réseaux géodésiques et de nivellement d'autre part, conduisent à deux réalisations différentes du géoïde. L'utilisateur doit généralement rattacher ses travaux aux références légales, mais les points GPS nivelés qui les réalisent ne sont pas assez denses et peuvent comporter

(2) En Belgique, le réseau de nivellement se réfère au niveau des plus basses mer pour éviter les altitudes négatives.

■ ■ ■ des fautes. Le géoïde gravimétrique joue le rôle d'interpolateur mais il faut le remettre en référence, le valider et le corriger. Une référence d'altitude utilisable pour le nivellement par GPS peut donc être obtenue en adaptant un modèle gravimétrique du géoïde à un ensemble de points GPS nivelés représentatif des références géodésiques et altimétriques, qui doivent rester virtuellement inchangées.

## ■ Adaptation du géoïde gravimétrique

La comparaison du géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés doit permettre d'une part d'identifier et de localiser les erreurs affectant les données et d'autre part d'adapter le géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés pour en faire une surface de référence des altitudes répondant aux besoins du nivellement par GPS (Duquenne et al., 2005). Soit  $\{P_i, i = 1, \dots, n\}$  un ensemble de points GPS nivelés : leur hauteur ellipsoïdale  $h_i$  et leur altitude  $H_i$  sont donc connues.  $N_{GPS-Niv,i} = h_i - H_i$  est la hauteur du géoïde réalisé par GPS et nivellement au point  $P_i$ . La hauteur du géoïde gravimétrique est  $N_{Gvi,i}$ . On s'intéresse aux écarts :

$$\delta_i = N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi,i} = h_i - H_i - N_{Gvi,i} \quad (9)$$

qu'on partage en trois parties :

$$\delta_i = t_i + s_i + n_i \quad (10)$$

$t_i$  est une tendance qui représente les erreurs globales telles que les écarts entre références géodésiques ou les erreurs sur les coefficients de bas degré du modèle de champ. A l'échelle d'un pays peu étendu, ces erreurs apparaissent comme très peu variables, on les modélise par un polynôme de bas degré ou toute autre fonction "lisse" des coordonnées géographiques.  $s_i$  est la partie corrélée de l'écart : on l'appelle le signal, il contient les erreurs qui, en deux points voisins, ont une forte probabilité d'être proches. Supposons par exemple qu'un levé gravimétrique peu étendu soit affecté d'un biais dû à un mauvais étalonnage d'un gravimètre. L'intégrale de Stokes va propager cette erreur sur le géoïde dans une zone de grande étendue, dans la limite du rayon d'intégration. Dans cette zone, le géoïde gravimétrique présentera des erreurs corrélées. Dans l'équation (10),  $n_i$  repré-

sente la partie non corrélée de l'écart  $\delta_i$ . On l'appelle le bruit. Il représente par exemple les erreurs sur les hauteurs d'antennes GPS ou les petits déplacements fortuits de repères de nivellement qui sont statistiquement indépendants d'un point à l'autre.

Les coefficients  $a, b, c$ , du polynôme de tendance peuvent être déterminés par moindres carrés. Par exemple, dans le cas d'une tendance linéaire, les équations d'observation prennent la forme :

$$N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi,i} = a + b(\varphi_i - \varphi_0) + c(\lambda_i - \lambda_0) \cos \varphi_0 + v_i \quad (11)$$

$a$  est la partie constante de la tendance,  $b$  et  $c$  sont les pentes générales vers le nord et vers l'est du géoïde gravimétrique par rapport à la surface de référence des altitudes,  $v_i$  le résidu au point  $P_i$ . On a évidemment :

$$v_i = s_i + n_i \quad (12)$$

Cette équation ne permet pas à elle seule de séparer le signal du bruit, mais on peut y parvenir par collocation (Moritz, 1989, eq. 14-23 et 14-43) du fait de leurs propriétés statistiques très différentes. On désigne par  $\mathbf{v}$  le vecteur des résidus,  $\mathbf{s}$  le vecteur des signaux et  $\mathbf{n}$  celui des bruits.  $\mathbf{C}_{vv}$  est la matrice de variance-covariance des résidus et  $\mathbf{C}_{ss}$  celle des signaux. On a :

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss} \mathbf{C}_{vv}^{-1} \mathbf{v} \quad (13)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{s} \quad (14)$$

Les matrices de covariances ne sont pas connues a priori, aussi les détermine-t-on en ajustant aux données (les résidus et leur localisation) un modèle de covariance : on suppose que la covariance du signal entre deux points est une fonction de leur distance (éventuellement de leur azimut) dépendant d'un petit nombre de paramètres. On peut par exemple modéliser la covariance du signal entre deux points  $P_i$  et  $P_j$  par une fonction exponentielle :

$$C_s(P_i, P_j) = C_0 \exp(-d_{i,j} \ln 2 / d_{1/2}) \quad (15)$$

$d_{i,j}$  est la distance des deux points,  $C_0$  est la variance du signal (covariance à la distance nulle),  $d_{1/2}$  est la distance pour laquelle la covariance vaut  $C_0/2$ ,  $\ln 2$  est le logarithme népérien de 2. Les fonctions de covariance ne dépendent que de la distance, comme celles proposées dans l'équation (15) et dans le tableau (2), sont dites "isotropes".

La covariance des résidus se déduit de l'équation (10) et du fait que les bruits ne sont par définition ni corrélés entre

eux, ni corrélés avec les signaux. La variance du bruit étant supposée constante égale à  $\sigma_n^2$ , on a : formule

$$C_v(P_i, P_j) = \begin{cases} C_s(P_i, P_j) & \text{si } P_i \neq P_j \\ \sigma_n^2 + C_s(P_i, P_j) & \text{si } P_i = P_j \end{cases} \quad (16)$$

C'est comme des paramètres qu'il faut ajuster aux données. On construit donc un histogramme des covariances des résidus en fonction de la distance en calculant les quantités  $v_i v_j$  pour tous les couples de points  $P_i P_j$  possibles, puis les moyennes de ces quantités par classe de distances. Puis on ajuste les paramètres de la fonction de covariance par moindres carrés.

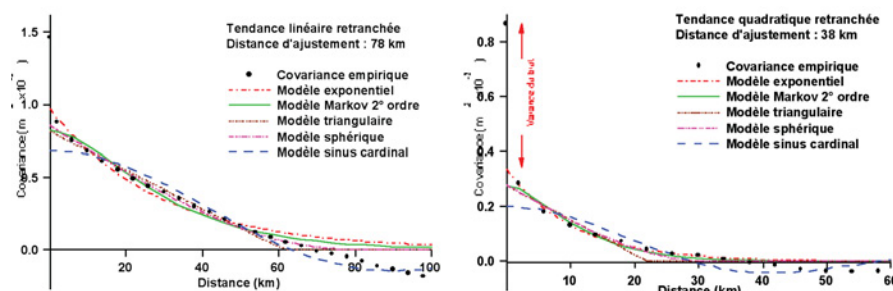
On ne connaît pas actuellement de théorie permettant de choisir les modèles de tendance ou de covariance des écarts  $N_{GPS-Niv,i} - N_{Gvi,i}$ . On en est donc réduit à les choisir empiriquement dans des banques de modèles. Dans le cas de la Belgique, sur plus de 4000 points disponibles, trois modèles de tendance ont été testés : une constante, une fonction linéaire des coordonnées géographiques (comme dans la formule 11 ci-dessus), un polynôme du second degré. On a également essayé cinq modèles de covariance, dont les expressions sont données dans le Tableau 2. Le meilleur couple de modèles (tendance + covariance) est obtenu pour le meilleur ajustement du modèle de covariance à l'histogramme des covariances. La Figure 8 et le Tableau 3 montrent que les meilleurs résultats sont obtenus avec le modèle polynomial du second degré pour la tendance et le modèle exponentiel pour la covariance, pour une distance d'ajustement de 38 km.

La validation des points GPS nivelés résulte de l'analyse des bruits dans un processus itératif. A chaque étape, les paramètres de tendance et de covariance sont recalculés, de même que les matrices  $\mathbf{C}_{ss}$  et  $\mathbf{C}_{vv}$ , dont les coefficients sont donnés par (16). On obtient les signaux et les bruits sur chaque point GPS nivelés par (13) et (14), puis l'écart-type du bruit. Un bruit important (disons supérieur à 2,57 fois l'écart-type) est l'indice d'une faute isolée sur



**Tableau 2. Modèles de covariance du signal, principalement tirés de (Chilès et Delfiner, 1999), légèrement modifiés : le paramètre  $\alpha$  est introduit pour que  $d_{1/2}$  ait toujours la même signification (voir texte).  $r$  est la distance des deux points.**

Modèle de cov.	Fonction	Paramètre spécial
Exponentiel	$C_s(r) = C_0 \exp(-r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha = 1/\ln 2$
Markov 2° ordre	$C_s(r) = C_0 (1 + r/(\alpha d_{1/2})) \exp(-r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha = 1/\ln(2 + 2/\alpha), \alpha \approx 0.59582$
Triangulaire	$C_s(r) = C_0 (1 - r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha = 2$
Sphérique	$C_s(r) = C_0 \left( -0.5 r/(\alpha d_{1/2}) + 0.5 (r/(\alpha d_{1/2}))^3 \right)$	$\alpha : \alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0, \alpha \approx 2.87939$
Sinus cardinal	$C_s(r) = C_0 (\alpha d_{1/2}/r) \sin(r/(\alpha d_{1/2}))$	$\alpha : \alpha \sin(1/\alpha) = 1/2, \alpha \approx 0.52756$



**Figure 8. Exemples d'ajustements de modèles de tendance et de covariance. Le modèle exponentiel semble le plus performant. L'écart entre l'ordonnée à l'origine des courbes et la covariance empirique à la distance nulle est une estimation de la variance du bruit.**

un point, par exemple une hauteur d'antenne GPS erronée ou un repère de nivellement fortuitement déplacé. La convergence est atteinte lorsque le processus ne rejette plus de points, ou lorsque le niveau de bruit est jugé suffisamment faible. Comme on peut le voir sur la Figure 9, le rejet des points se révèle très sensible au choix de la fonction de covariance du signal : le modèle

exponentiel, qui s'ajuste le mieux à l'histogramme des covariances, est aussi plus sélectif que le modèle triangulaire. Il conduit aussi plus rapidement à un écart-type du bruit plus faible : 1,6 cm après 6 itérations au lieu de 2,2 cm après 9 itérations.

Un ensemble de signaux anormalement élevés sur des points voisins doit conduire à incriminer le géoïde gravi-

métrique (donc la gravimétrie... et l'ensemble du calcul !) ou, plus rarement, une erreur sur une session GPS affectant plusieurs points (troposphère anormale...). La méthode permet donc non seulement de détecter et localiser des fautes éventuelles, mais aussi, dans une certaine mesure, d'en préciser la nature.

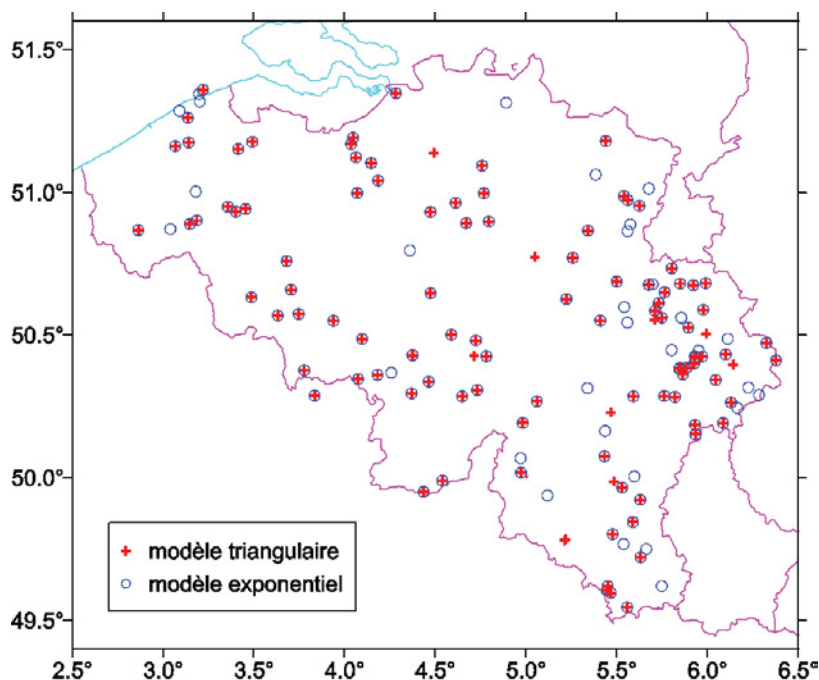
On procède finalement au calcul de la référence d'altitude en modifiant la grille du géoïde gravimétrique : on lui ajoute la tendance et le signal interpolé pour chaque nœud de la grille. On réalise ainsi une fusion de toutes les informations disponibles (modèle de champ, gravimétrie, MNT, géodésie, nivellement) pour obtenir la hauteur du zéro des altitudes au dessus de l'ellipsoïde géodésique. La référence d'altitude a été testée par l'IGN-B en effectuant des opérations de nivellement par GPS (sessions de 2 à 3 heures) sur 109 points rattachés au réseau de nivellement et n'ayant pas participé aux calculs. La moyenne des écarts entre les altitudes vaut 4 millimètres et leur écart moyen quadratique (moyenne non déduite) est inférieur à 21 millimètres.

## Conclusions

Cette étude a permis de déterminer un modèle de géoïde pour la Belgique. Les deux méthodes employées (collocation rapide et Stokes par transformées de Fourier rapide) ont donné des résultats

**Tableau 3. Ajustement des modèles de tendance et de covariance et choix de la meilleure distance d'ajustement. La meilleure combinaison, correspondant aux résidus de covariance les plus faibles, est surlignée.**

Tendance retranchée	Modèle de covariance	Distance d'ajustement	$C_0$ ( $10^{-6}m^2$ )	$d_{1/2}$ (km)	$\sigma_n$ ( $10^{-3}m$ )	Résidus des covariances ( $10^{-6}m^2$ )		
						Min	Max	Écart-type
linéaire	exponentiel	78 km	967.9	20.06	22.24	-49.0	101.4	48.6
linéaire	Markov 2° ordre	78 km	819.2	27.02	25.36	-65.5	71.8	38.2
linéaire	triangulaire	78 km	815.1	30.51	25.44	-90.4	35.5	33.1
linéaire	sphérique	78 km	857.4	27.18	24.60	-54.3	29.0	20.8
linéaire	sinus cardinal	78 km	679.6	38.03	27.98	-200.3	72.0	67.7
<b>quadratique</b>	<b>exponentiel</b>	<b>38 km</b>	<b>337.0</b>	<b>7.28</b>	<b>22.96</b>	<b>-10.7</b>	<b>17.3</b>	<b>9.0</b>
quadratique	Markov 2° ordre	38 km	275.4	10.25	24.27	-19.6	25.9	14.5
quadratique	triangulaire	38 km	278.4	11.00	24.21	-41.7	24.0	25.9
quadratique	sphérique	38 km	280.8	10.82	24.16	-29.2	22.2	18.3
quadratique	sinus cardinal	38 km	199.9	17.45	25.78	-84.8	35.9	41.0
quadratique	exponentiel	78 km	346.3	6.87	22.76	-15.2	42.4	22.6
quadratique	Markov 2° ordre	78 km	277.7	10.06	24.22	-17.8	41.2	23.0
quadratique	triangulaire	78 km	278.4	11.00	24.21	-41.7	40.9	26.8
quadratique	sphérique	78 km	280.8	10.83	24.16	-29.2	40.9	23.9
quadratique	sinus cardinal	78 km	212.2	12.99	25.54	-73.9	67.9	44.7



**Figure 9.** Tests de validation de points GPS nivelés par étude du bruit. Le modèle exponentiel est plus sélectif.

■■■ équivalents, indépendants du modèle de champ. La comparaison des modèles obtenus avec des points GPS nivelés permet une estimation de la précision des méthodes de calcul et une validation croisée des données (gravimétrie, altitude et hauteur des points GPS). Grâce au grand nombre des points GPS nivelés disponibles en Belgique, il a été possible de transformer le géoïde en une référence d'altitude opérationnelle et fiable. Le nivellement par GPS est désormais possible en Belgique avec une précision de 2 centimètres, ce qui couvre la majorité des besoins. ●

## Références bibliographiques

**BARZAGHI R., BORCHI A., DUCARME B., EVERAERTS M.** (2003). Quasi-geoid BG03 computation in Belgium. In: "Newton's Bulletin", J.P. Barriot, F. Sanso ed., BGI and IGeS, pp. 75-88. [http://bgi.cnes.fr:8110/borghi\\_etall.pdf](http://bgi.cnes.fr:8110/borghi_etall.pdf)

**BOTTONI, G., BARZAGHI, R.** (1993). *Fast Collocation*. In: Bulletin Géodésique, Vol. 67, No. 2, pp. 119-126.

**CHILÈS J.P., DELFINER P** (1999). *Geostatistics*. Wiley & Sons, New York, USA.

**DUQUENNE H., EVERAERTS M., LAMBOT**

**P.** (2005) *Merging a Gravimetric Model of the Geoid with GPS/Levelling data: an Example in Belgium*. In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes J. (ed.), *Gravity, Geoid and Space Missions*, IAG symp. n° 129, Springer, pp. 131-136

**LEMOINE F.G., KENYON S.C., FACTOR J.K., TRIMMER R.G., PAVLIS N.K., CHINN D.S., COX C.M., KLOSKO S.M., LUTHCKE S.B., TORRENCE S.H., WANG Y.M., WILLIAMSON R.G., PAVLIS E.C., RAPP R.H., OLSON T.R.** (1998). *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Technical report nr. 206861, NASA/GSFC, Greenbelt, Maryland, USA.

**PÂQUET P., JIANG Z., EVERAERTS M.** (1997). *A new Belgian geoid determination: BG96*. In: *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, J. Segawa, H. Fujimoto, S. Okubo ed., IAG Symposia vol. 117, Springer, pp. 605-612.

**SANSÓ F.** (ed.) (1997). *The Earth Gravity Model EGM96: testing procedures at IGeS*. In: IGeS Bulletin No. 6, DIIAR, Politecnico di Milano, Italy.

**TSCHERNING, C.C., RAPP, R.H.** (1974). *Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies Geoid Undulations, and the Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models*. In:

Reports of the Department of Geodetic Science, No. 208, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.

**WENZEL, G.** (1998). *Ultra high degree geopotential models GPM98A, B and C to degree 1800*. In: Proceedings of the Joint Meeting of the International Gravity Commission and International Geoid Commission, September 7 -12, Trieste 1998. Bollettino di Geofisica teorica ed applicata.

## Contacts

### H. DUQUENNE

Laboratoire de Recherche en Géodésie  
IGN/ENSG - 6 et 8 avenue Blaise Pascal  
77455 Marne-la-Vallée (France)  
[henri.duquenne@ensg.ign.fr](mailto:henri.duquenne@ensg.ign.fr)

### M. EVERAERTS

Observatoire Royal de Belgique  
Av. Circulaire 3 - 1180 Bruxelles (Belgique)  
[everaerts@oma.be](mailto:everaerts@oma.be)

### P. LAMBOT

Institut Géographique National  
13 Abbaye de la Cambre  
1050 Bruxelles (Belgique)  
[pla@ngi.be](mailto:pla@ngi.be)

## ABSTRACT

*This paper presents recent progress made by the Royal Observatory of Belgium and the National Geographical Institute of Belgium, collaborating with the International Geoid Service and the Research Laboratory in Geodesy of the French IGN, in order to achieve a model of the geoid. Several kinds of data have been included in the computation: a global field model, gravity data and a digital terrain model. Two methods of computation have been compared: Stokes' integration by fast Fourier transform and rapid collocation. They appeared to perform equally. The geoid was compared with a set of 4000 GPS leveled points, on one hand to validate data and methods, on the other hand to adapt the geoid to the specific needs of leveling by GPS. An Independent test allows us to conclude to a precision of 2 centimeters.*



# La modélisation des voies routières

■ Claude MILLION



Vue aérienne de l'échangeur du Val Maubuée (A4 / N104) à Noisiel et Lognes / Marne-la-Vallée.

© Iconothèque Epamarne / Eric MORENCY / 1998

*Lorsqu'on modélise une voie routière ou ferrée on cherche à obtenir un résultat meilleur que ce que donne le relevé tel qu'il est obtenu par des mesures brutes en introduisant des connaissances préalables sur la géométrie des voies. C'est pourquoi on a grand intérêt à utiliser des modèles utilisés couramment pour implanter ces voies au moment de leur création à l'exclusion de tout autre modèle qui n'apporterait aucune information.*

**L**a modélisation des voies, que ce soit routières ou ferrées, semble être devenu une pratique courante utilisée afin de conserver des documents numérisés décrivant ces ouvrages, dans le but de disposer d'une documentation permanente. Notre propos n'est pas d'en traiter le mode de lever, cela a déjà été fait avec brio, d'abord pour les voies ferrées [4], puis plus récemment pour les voies routières [8] et [10] avec le lever des détails de la voie. Au demeurant, il est surtout basé sur l'utilisation d'un récepteur mobile GPS, associé ou non à une station totale ou d'un LIDAR, embarqués sur un véhicule ferré ou routier recevant par ailleurs les signaux d'un récepteur fixe [4] ou d'une station d'un réseau géodésique permanent [8].

C'est, tout au contraire, le traitement ultérieur des mesures qui va nous intéresser, il semble en effet que les méthodes divergent singulièrement, et c'est ce qui est intéressant.

Soit on considère que ces ouvrages sont des assemblages de courbes connues parfaitement définies, soit, au contraire, on les modélise à l'aide de courbes pouvant s'appliquer à n'importe quelle circonstance, y compris à des limites naturelles telles que le bord d'un lac ou la limite d'une forêt.

On connaît, certainement, l'utilisation qui est faite de la connaissance *a priori* de la géométrie d'un ouvrage pour en améliorer la description, en introduisant des équations de condition : Citons, notamment, deux exemples

■ ■ ■ très connus: Lorsqu'un photogramètre restitue la limite d'un bâtiment qu'il sait ou juge rectiligne il "redresse" cette limite pour la rendre réellement et parfaitement rectiligne, en cela il améliore sa détermination brute. De même, quand on numérise un bâtiment dont on sait que tous les angles sont droits on introduit des relations d'orthogonalité entre ses limites ce qui en améliore la détermination. En photogrammétrie on fait, fréquemment, les deux opérations simultanément.

Pourquoi ne pas profiter des connaissances qu'on a, *a priori*, de la géométrie des voies de communication pour en améliorer la description numérique ?

## Les modélisations

On se trouve face à deux types de modèles proposés: Le premier est celui des voies ferrées, pour lesquelles on connaît parfaitement les caractéristiques et la nature géométrique des courbes utilisées, il n'y a donc aucun problème: les plans de récolement sont dressés et des repères séparant les différents types de courbes utilisés, lorsqu'ils n'ont pas été détruits et subsistent sur place [4]. Pour le second, on ignore, ou on feint d'ignorer, la nature géométrique de ces courbes [8]. Cette dernière manière de faire est, à notre sens, extrêmement critiquable: En effet, les tracés de voies routières répondent à des impératifs physiques dans les courbes voisins de ceux des voies ferrées: à savoir des règles de rayon minimum fonction de la vitesse de base, du dévers acceptable, et du coefficient de friction limite entre les pneumatiques et la chaussée, de la tolérance des passagers, et de la progressivité des raccordements.

Certes, les chemins vicinaux qui n'étaient, à l'origine, que des chemins muletiers qui ont été empierrés puis revêtus, n'ont évidemment pas fait l'objet d'une étude rationnelle concernant la circulation qu'ils auraient à supporter, mais ses impératifs, notamment la vitesse de base de 90 km/h, ont amené les responsables à se pencher sur les problèmes posés par les tracés "bruts" hérités du passé. Presque toutes les voies de circulation, même rurales, ont

été partiellement ou totalement rectifiées pour leur donner des caractéristiques correctes, au moins dans des passages cruciaux.

## Les règles physiques utilisées

Les règles utilisées sont très simples, voire élémentaires: Un véhicule circulant en courbe est soumis à une accélération horizontale centrifuge donnée par la relation:

$$a = \frac{v^2}{R} = C \cdot v^2$$

avec a: accélération en m/s/s,

v: vitesse du véhicule en m/s,

R: Rayon de courbure en m,

C: courbure en  $m^{-1}$ .

Pour les voies ferrées le dévers d, ou pente transversale de la voie (sans dimension) est donné par:

$$d = \frac{a}{g} = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

avec g: accélération de la pesanteur 9,81 m/s/s. En effet le convoi ne doit pas exercer d'effort transversal sur la voie qui ne le supporterait pas. En revanche, si le convoi est arrêté en courbe le dévers ne doit pas gêner les passagers et ne pas exercer un effort trop élevé sur le rail intérieur [2], [3]. D'où, pour une vitesse de base v et un dévers limite d, on a, par conséquent, une courbure limite C en  $m^{-1}$ . Donc, pour une vitesse de base v, les graphes de C et d sont identiques à l'échelle près: Courbure proportionnelle à dévers  $C \propto d$ . Le dévers limite fixe la courbure limite  $C_l \propto d_l$ .

Pour les voies routières les relations sont à peine plus compliquées. D'autres impératifs s'ajoutent à ceux qui affectent les voies ferrées, notamment dans les carrefours en virage, lorsque la voie qui recoupe celle qui est étudiée se raccorde sur le côté opposé au virage. Dans ce cas il est impossible de créer un dévers, pire, parfois ce dévers doit être négatif. On admet alors que l'accélération centrifuge peut être encaissée par le frottement du pneumatique sur la chaussée et par la tolérance de la sensation de dérapage des passagers. On admet la relation:

$$d + f = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

f est un coefficient de frottement sans dimension. Si le dévers est nul on a:

$$f = C \cdot \frac{v^2}{g}$$

c'est ce coefficient qui, pour une vitesse de base donnée: v, fixe la courbure limite:

$$C_l = \frac{(f_l + d_l) \cdot g}{v^2}$$

avec  $C_l$ : courbure limite en  $m^{-1}$ , et  $f_l$ : coefficient de frottement limite, sans dimension. Certains auteurs donnent les valeurs suivantes pour  $f_l$  en fonction de la vitesse de base v:

40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	vitesse en km/h
0,19	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11	$f_l$ , sans dimension.

La variation de  $f_l$  avec la vitesse est due au fait que les passagers accepteraient une sensation de "dérapage" plus importante à faible vitesse qu'à une vitesse plus élevée.

On remarquera immédiatement que pour une vitesse de base de 90 km/h, si le dévers est nul, on a:

$$C_l = \frac{0,13}{25^2} \cdot 9,81 = 0,002$$

soit un rayon limite de 490 m! Ce qui montre, à l'évidence, que les anciens chemins ont été ou seront rectifiés.

*L'usage des splines cubiques ne permet pas de maîtriser aisément la condition de courbure maximale.*

On a longuement expliqué, en [2] et [3], que pour passer d'un alignement à un cercle comment et pourquoi on utilisait des courbes à courbure progressives dont la courbure était une fonction linéaire de l'abscisse curviligne: c'est-à-dire des clothoïdes, et que pour raccorder les cercles aux clothoïdes on avait intérêt, pour les voies ferrées, d'utiliser des **clothoïdes doubles** ou spirades.

On s'en tiendra à l'usage des clothoïdes simples pour les voies routières. On a donc trois types de courbes routières: L'alignement droit, le cercle de rayon minimum d'après

(1) On a

$$S(t) = 0,3333 \cdot t^3 - 0,2381 \cdot t^7 + 0,000758 \cdot t^{11} -$$

$$C(t) = t - 0,1 \cdot t^5 + 0,00463 \cdot t^9 - 0,000107 \cdot t^{13} +$$

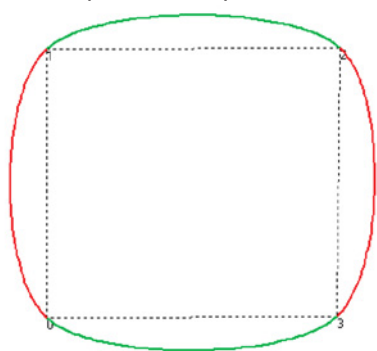
aucun terme d'exposant pair !



$Cl$ , ou bien un cercle de rayon plus grand  $C_l \geq C$ , et les clothoïdes pour les raccordements progressifs, ces dernières sont définies par  $C = k \cdot s$ , avec  $s$  abscisse curviligne variant linéairement de  $C = 0$  alignement droit, à  $C = Cl$  courbure limite puis  $Cl =$  constante, c'est-à-dire dans un cercle. Ce sont des courbes de courbure connue et seulement définies par leurs courbures, fonctions de leur abscisse curviligne. La longueur développée de la clothoïde:

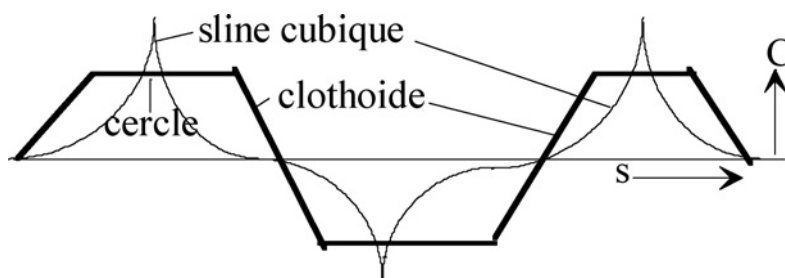
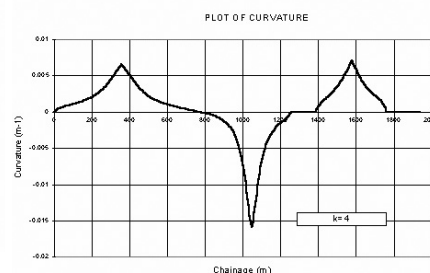
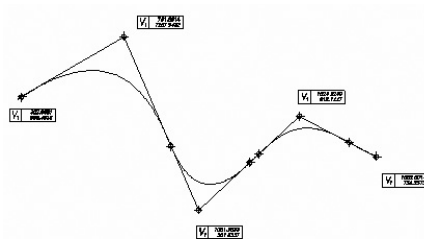
$s$ , fixe le paramètre  $k; k = \frac{C_l}{s}$  de dimension  $m^{-2}$ .

Si les clothoïdes ont pu être assimilées à des splines cubiques, elles ne sauraient en aucun cas pouvoir remplacer un cercle, or c'est l'association de la clothoïde et du cercle qui satisfait les exigences de courbure limite. **Une spline, seule, ne les respecte pas.** On a tenté de tracer, ci-dessous, un cercle à l'aide de splines cubiques:



On voit que c'est tout à fait impossible! Les courbures aux points de définition 0, 1, 2, 3 ne respectent pas les limitations dont on vient d'exposer les raisons et ne sont pas maîtrisables selon les méthodes proposées en [6] et [8]. Il n'y a donc aucun avantage à modéliser une voie routière à l'aide de splines. Certains ont proposé l'association de splines cubiques et de cercles [10]. C'est en effet possible, mais on préférera modéliser les voies relevées par leur courbures, et les restituer sous la forme d'alignements, de clothoïdes, et de cercles, comme cela se fait tous les jours au moment de l'implantation des ouvrages.

En outre, la **continuité en courbure** ne saurait être assurée par des splines cubiques leur degré est trop faible. Selon les auteurs le degré de la courbe devrait être égal à six pour assurer une



"douce" continuité, à cinq pour une rude continuité.

Sur la figure suivante inspirée de [10] on a porté le tracé d'un avant-projet sur un diagramme d'abscisse curviligne  $s$ , la courbure  $C$  étant en ordonnées, matérialisé par des alignements droits  $C = 0$ , des clothoïdes sont des droites inclinées, ou des cercles des droites parallèles à l'axe qui ont des tracés évidemment rectilignes, puis le même tracé approché cette fois-ci par des splines cubiques; on remarquera que les conditions de courbures ne sont alors pas satisfaites à "la pointe des virages".

## Modélisation des voies routières par la courbure

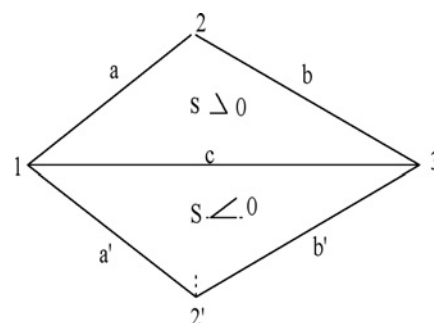
On suppose que les points des courbes routières sont relevés par les moyens décrits en [4] et [6], c'est-à-dire à l'aide d'un récepteur GPS associé à une station de base ou à une station du RGP avec un pas d'un mètre, on peut même relever la voie directement en même temps qu'on relève son axe [6] et [11]. Il s'agit de calculer la courbure en chaque point relevé pour dresser un diagramme comme celui qu'on vient présenter tout au long du tracé. On doit, à l'aide des coordonnées des points relevés, calculer la courbure, avec son signe, en

chaque point. Pour cela, après plusieurs essais, on a adopté les deux formules suivantes:

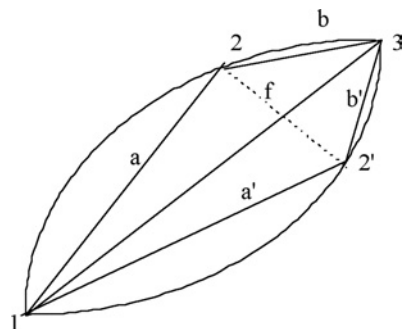
$$C = \frac{1}{R} = \frac{4.S}{a.b.c}$$

$S$  étant la surface du triangle formé du point précédent le point où est calculée la courbure, et de celui qui lui fait suite.  $a, b, c$  étant les trois côtés de ce triangle dont  $a$  et  $b$  sont sur le parcours et  $c$  est le côté qui joint le premier et le troisième point. Pour obtenir le signe de la courbure on doit adopter une formule du calcul de  $S$  qui le donne, par exemple: (voir formule en bas de page)

Si le parcours est dextrogyre (sens des gisements croissants) la surface sera positive et la courbure le sera aussi, dans le cas contraire, avec un parcours senestrogyre, elles seront toutes deux négatives. (voir figures)



$$2.S = x_1.y_2 - x_2.y_1 + x_2.y_3 - x_3.y_2 + x_3.y_1 - x_1.y_3$$



Toutefois, définir une courbe par sa courbure, peut entraîner des imprécisions importantes. En admettant, ce qui est généralement le cas, que :  $b \approx a$ , et  $c \approx 2.a$

on aura alors,  $S = f.a$

avec  $f$  : flèche de l'arc circulaire entre deux points. Par conséquent on aurait :

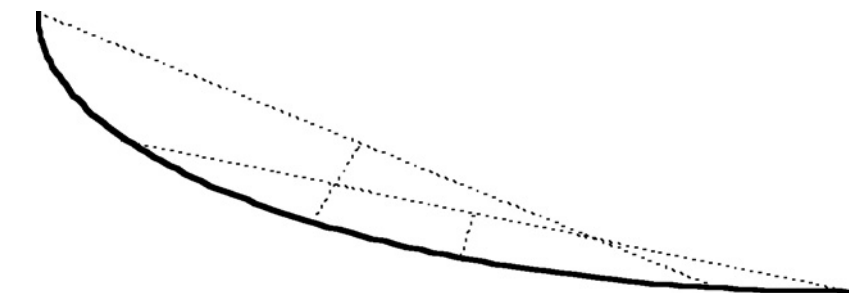
$$C \approx \frac{2.f}{a^2}$$

Toute erreur sur la flèche sera directement proportionnelle à l'erreur qui sera commise sur la courbure calculée.

Les différents auteurs qui ont traité des mesures, et qui sont plus nombreux que ceux strictement cités en référence [4], admettent une erreur relative entre des points voisins de 3 à 5 mm pour, les mesures faites sur les voies ferrées, là où la définition du point mesuré ne pose aucun problème, puisque c'est un équipement roulant sur la voie qui effectue la mesure. Il n'en est pas de même pour les voies routières l'axe n'est défini que par les tracés faits sur la voie et que pointe le véhicule (trait continu de non dépassement, trait double de dépassement d'un seul côté, ou axe tireté sur l'axe de la voie), dans ces cas favorables on peut estimer l'imprécision globale de l'ordre de un à deux centimètres, on doit également pouvoir traiter le cas où aucun tracé dessiné sur la voie ne peut guider le relevé, dans ce cas il faudrait relever un bord de chaussée et l'imprécision pourrait sans doute atteindre cinq cm, ou plus. Dans le premier cas l'imprécision sur la courbure entre deux points consécutifs relevés serait de :

$$\varepsilon_c = \frac{2 \times 0,02}{1} = 0,04 \text{ et } \varepsilon_R = 25m$$

le bruit de la mesure rendrait la courbure inutilisable pour caractériser la



courbe. Il n'en est plus de même si on calcule la courbure en un point en adoptant un côté de 10 m on aurait alors :

$$\varepsilon_c = \frac{2 \times 0,02}{10 \times 10} = 0,0004 \text{ et } \varepsilon_R = 2500m$$

$\xi_R = 2500 m$   $\xi_C$  et  $\xi_R$  étant respectivement l'erreur sur la courbure et sur le rayon.

## Calculs

A l'aide d'un fichier des points relevés les calculs sont simples. Il s'agit de repérer les différents types de courbes utilisés à l'aide du graphe des courbures en fonction de l'abscisse curviligne. On n'a pas rendu cette fonction automatique car les résultats obtenus, au cours des essais, étaient discutables, ce qui ne signifie pas du tout que cela soit impossible !

En revanche, l'interprétation visuelle du graphique est des plus simples : les alignements droits sont à courbure nulle, et comme les cercles, leurs tracés, aux erreurs près, sont parallèles à l'axe de l'abscisse curviligne, ces deux caractéristiques les distinguent des courbes progressives qui font la liaison entre elles. On doit tracer une plage d'indécision, d'abord pour les alignements, ce qui permet, aisément, de les distinguer (deux parallèles équidistantes autour de l'axe des abscisses). Pour distinguer les cercles on trace une parallèle à l'axe des abscisses passant par les points les

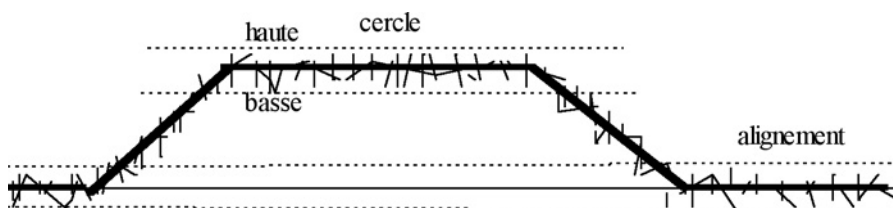
plus hauts du graphique, puis une seconde parallèle correspondant à l'indécision la plus basse. On découpe ainsi les limites des arcs de cercle. Les clothoïdes raccordent ces deux tracés.

On restitue par le calcul les tracés de ces courbes idéales par les méthodes indiquées en [2] et [3], puis on les cale sur le réseau des points mesurés par une transformation de similitude (translation, rotation, mise à l'échelle, quatre inconnues à déterminer). Rappelons que la solution des moindres carrés de cette transformation n'implique pas la résolution d'un système linéaire, car des simplifications d'écriture allègent le calcul qui devient fort simple.

## Tests de précision

Afin de vérifier que ce que l'on avance est exact on devait disposer d'un fichier jouant le rôle de "vérité terrain". Pour cela on a créé un tracé idéal à l'aide d'une méthode courante de tracé des voies routières comme le Manuel de [12]. On a calculé les points de l'axe de l'ouvrage à l'équidistance d'un mètre. Ce sera le fichier de "vérité terrain". A partir de ce fichier on dressera un fichier "mesures" en le "bruitant".

On introduisit deux types d'erreurs : une erreur accidentelle moyenne [7] de 2 cm gaussienne à l'aide de générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur en utilisant la relation de Box-Müller, puis une erreur systématique variant de 0 à 20 cm tout au long du tracé pour





simuler les erreurs de mesure de GPS qui sont souvent proportionnelles au temps et à la distance, ou pour aussi simuler un défaut de détermination de l'ambiguïté, ce qui revient au même dans le cas traité.

Puis on mène les calculs comme indiqué au paragraphe immédiatement précédent. On remarque l'amélioration des résultats en les comparant à la fois au fichier "mesures" et au fichier "vérité terrain" les résultats se situent bien entre ces deux termes de comparaison.

Le test de précision est aussi constitué par la position des points de tangence des courbes: Ces points ont été calculés avec une erreur moyenne [7] de dix mètres. Cela peut paraître médiocre, il n'en est rien, car les points de tangence entre une clothoïde et un cercle ou un alignement sont, de toute façon, physiquement très mal définis en raison de la progressivité et de la continuité de la courbure.

## Conclusions

Il est exact que les splines, notamment les splines de Catmull-Rom [5], sont des courbes très agréables à utiliser pour modéliser une courbe **quelconque**, voir figure, définie par quelques points de passage **obligés** [8]. Si les points sont serrés la différence avec des segments de droites n'est effectivement pas très grande!

Il n'en est plus de même si on connaît a priori la nature des courbes à modéliser et s'il s'agit d'ajuster comme le fait K. Atkinson [6] une courbe de nature prédéfinie à un nuage de points. Dans la mesure où les courbes des voies routières ou ferrées sont bien connues, et parce que les splines sont incapables de les remplacer, en raison de l'impossibilité de respecter la condition de courbure minimum et de se raccorder

en continuité de courbure, il est plus simple de revenir aux premières.

La tentative élégante de K. Atkinson [6] était vouée d'avance à l'échec, il suffisait soit de comparer les équations des deux types de courbes pour voir que cela était impossible, et/ou simplement d'avoir quelques notions de technique routière. Si comme en [10] on plante les courbes progressives à l'aide de splines, de cercles et d'alignements notre méthode reste encore la meilleure, car il est évident qu'on **ne peut pas** modéliser un arc de cercle de rayon minimal à l'aide d'une spline cubique sauf à multiplier les points, car alors entre une spline et une droite la différence est faible, en outre, comme plus haut, le raccordement en continuité de courbure reste impossible. ●

## Bibliographie

- [1] 1986 - José F. Zélaco : *Clothoïde unique de raccordement entre deux cercles* in XYZ n°16
- [2] 1992-1 Claude Million : *La clothoïde dans tous ses états* in Géotop n°124
- [3] 1998-4 Claude Million : *Mieux que la clothoïde, la spirale adoucie* in XYZ n°77
- [4] 2000-4 Philippe Halle : *Analyse qualitative d'une voie ferrée par levé dynamique GPS* in X Y Z n°85
- [5] 2001-1 Claude Million :  
- *Des courbes et des lignes* in XYZ n°86  
- Les courbes in <http://perso.wanadoo/claude.million/articles/>.
- [6] 2002 - Kendall Atkinson :  
- *Modelling a Road Using Spline Interpolation in Report of Computational Mathematics Department of Mathematics*, University of Iowa, Iowa 52242. USA  
- *Robust and Efficient Computation of*

*the Closest Point on a Spline Curve* in Curve and Surface Design at Saint Malo 2002

[7] 2003-3 Michel Kasser, Patrick Sillard : *les nouveaux textes réglementaires français en matière de précision des levés* in XYZ n°96

[8] 2005-2 Hervé Gontran : *Technique de lever par véhicule équipé de récepteurs GPS et d'une station totale* in XYZ n°103.

[9] 2005 <http://perso.wanadoo/claude.million/articles/>.

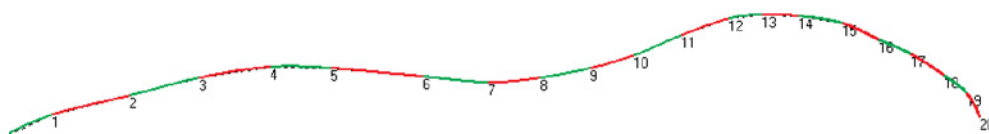
[10] 2005 A. Fracassa A.Scalamandrè : *The use of Rational B-spline Curves* in Geometrical Design of Road Alignments in <http://xoomer.virgilio.it/antfraca/spline>.

[11] 2005 Simon Newby Paul Mrstik : *LIDAR on the Level in Afghanistan GPS, Inertial Map the Kabul Road* in GPS World - July

[12] 2005 HighRoad6.0 User Manual in <http://www.createng.com.au/HighRoadHTMLMan/HR6Manual-Ch9.html/>

## ABSTRACT

*When we modelise a road or railway track we seek to obtain a result better than what is obtained by the rough measurements themselves, by introducing the knowledge of the geometry of the road or track. This is why it is always beneficial to get the models currently used to design these roads or tracks at the time of their staking, instead of all other "smart" models which would not bring any information at all.*



# La 3D au service des collectivités

■ Philippe BOUR

*La commune de Baillargues dans le département de l'Hérault a lancé au deuxième trimestre 2005 une consultation pour acquérir des bases de données géographiques, réaliser une maquette numérique en 3D et l'exploiter avec une offre logicielle. Elle marque la volonté de la collectivité de se doter d'un outil d'aide à la décision, à la concertation et à la communication pour l'aménagement de son territoire. Elle a fait le choix d'une solution 3D innovante, proposée par la société EEE et l'offre i.g.o (prononcé igéo) accessible et compréhensible par l'ensemble des citoyens de la commune grâce à l'utilisation de photos aériennes de très hautes résolutions. En effet, la résolution des photos aériennes est de 5cm par pixel (soit un plan au 1/500<sup>e</sup>) ce qui constitue une première en France.*

## Description technique des réalisations

La création des bases de données s'est effectuée à partir d'une prise de vue aérienne spécifique sur le territoire communal d'une superficie de 800 ha. L'échelle de prise de vues retenue par le maître d'ouvrage est le 1/2500<sup>e</sup>. Elle permet de réaliser par restitution photogramétrique le modèle numérique de terrain (MNT), le modèle numérique d'élévation (MNE) et l'orthophotographie couleur à l'échelle du 1/500<sup>e</sup> (soit une résolution de 5 cm/pixel).

## ■ Les caractéristiques de la prise de vues aériennes sont les suivantes :

- Prise de vue argentique à partir d'une caméra calibrée RC10 Leica
- Focale 152 mm
- Format des clichés 24 x 24 cm
- Recouvrement stéréoscopique longitudinal de 60 % et 25 % en latéral
- Avion bi-moteur (PIPER)

La phase de stéréopréparation, première étape de la restitution photogramétrique, a consisté à déterminer sur le terrain 120 points XYZ judicieu-

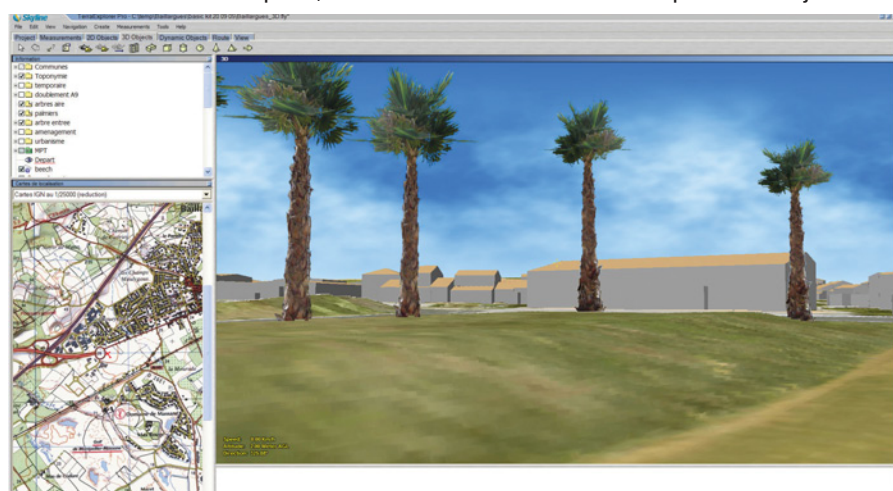
sement répartis. La précision des points en planimétrie est de + - 3 cm et en altimétrie + - 2 cm. Ils sont issus d'une acquisition GPS (leica 500). Ils sont ensuite utilisés dans l'étape d'aérotriangulation qui consiste, à partir de mesures très précises faites dans les modèles stéréoscopiques, à déterminer les coordonnées spatiales des points de calage nécessaires à l'exploitation des modèles photogramétriques.

## ■ Les éléments constitutifs du relief (MNT) sont définis par les données suivantes :

- Un semis régulier sous forme de maille (pas de 10 m)
- Les points côtés remarquables (sommet, dépression, etc.)
- Les lignes de rupture en 3D des éléments structurants du relief (route, bord trottoir, pont, talus, fossé, etc.).
- Toutes ces données sont saisies sous forme de points 3D et de polygones 3D. Le Modèle Numérique d'Élévation (MNE) est une description 3D très précise des bâtiments et de la végétation. Il est obtenu par restitution photogramétrique. Le travail principal de cette prestation est de relever sous forme de vecteurs surfaciques (ensemble de plan 3D) l'ensemble des bâtiments en vue de disposer d'objets 3D permettant d'être visualiser et texturer.

## ■ Les bâtiments sont décomposés en 3 parties :

- Les pentes du toit (surface définie par l'égout du toit et les lignes faîtères)
  - Les façades du bâti (projection orthogonale du contour de l'égout du toit sur le MNT)
  - Les surfaces des éléments additifs du toit (chien-assis, cheminée, etc.).
- La fabrication du MNT et du MNE res-



Logiciel Terra Explorer Pro®. visualisation 3D de la maquette communale.



pectent un cahier des charges très précis en vue de leur exploitation dans une maquette 3D. La projection des données est le Lambert 3 sud.

### ■ La fabrication de l'orthophotoplan est réalisée à partir :

- Du scannage des négatifs originaux au pas de 20 microns (soit une taille pixel-terrain de 5 cm pour un vol au 1/2 500°).
- D'un calcul à l'aide du MNT issu de la restitution dans la zone d'étude.
- Des corrections radiométriques afin d'améliorer l'uniformité des teintes.
- Du mosaïquage des clichés entre eux afin de disposer d'une image en continuité géographique.

L'orthophotoplan de résolution 5 cm/pixel de la commune de Baillargues est découpé en dalles élémentaires au format TIFF avec fichiers de géoréférent TFW. Soit environ 8Go de données images.

Le surcout de la constitution de ces bases de données à 5 cm par rapport à des données à 20 cm est d'environ 20 % sur une superficie de 800 ha. Il évite dans le cadre de la réalisation de la maquette 3D de la commune un travail d'infographie au niveau de l'habillage du sol pour un rendu réaliste en mode piéton. Cette économie compense le surcoût et au final représente un gain financier sur la maquette 3D globale.

### ■ Le concept de maquette numérique globale 3D :

C'est une représentation en trois dimensions homogène, cohérente, réaliste et précise sur l'ensemble d'un territoire (commune, département, région, ..) et qui doit assurer une parfaite interopérabilité avec le SIG et la CAO/DAO du maître d'œuvre. La maquette numérique globale est livrée par "i.g.o" dans deux formats, un format 3D standard (DXF/DWG/3DS) et un format 3D temps réel (technologie Skyline) pour une exploitation optimisée. Le maître d'œuvre est en mesure de mettre à disposition de ses fournisseurs (bureaux d'études, aménageurs...) la maquette 3D et d'exiger en retour la livraison des études, des prestations en 3D pour mieux décider, mieux concerter, mieux communiquer avec les citoyens. Ainsi, cette approche globale apporte une vraie économie d'échelle dans l'usage de la 3D.

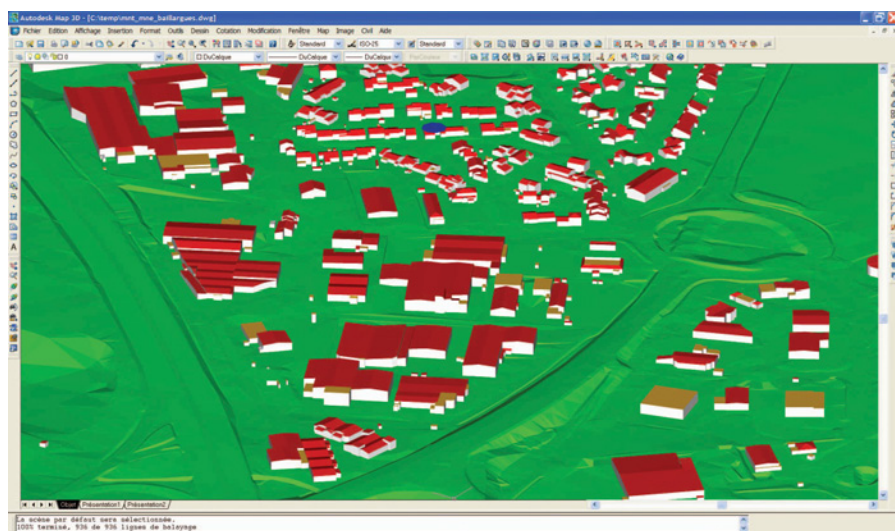
### ■ La méthode de modélisation développée par "i.g.o" se compose de quatre étapes :

**La première étape** intègre le MNT et l'orthophotoplan afin d'obtenir la base de données terrain 3D (le socle 3D). Cette prestation consiste à draper l'orthophotoplan (image 2D) sur le MNT (relief 3D) par projection planaire.

Cette méthode est aujourd'hui très classique et très répandue. Toutefois, très peu de prestataires maîtrisent cette méthode sur des données très précises, très volumineuses et sur de grandes superficies. Et encore beaucoup moins pour une visualisation 3D temps réel (l'utilisateur navigue librement en 3D y compris à travers Internet). C'est la valeur ajoutée d'i.g.o.

**La deuxième étape** intègre le bâti sur le socle 3D : cette étape est simplifiée car les spécifications 3D ont été prises en compte dès la restitution photogrammétrique. Le bâti est organisé suivant un découpage choisi par le maître d'œuvre. La commune de Baillargues a choisi un découpage conformément au Plan local d'Urbanisme (PLU).

**La troisième étape** modélise la végétation en 3D à partir d'une bibliothèque d'arbres. La commune de Baillargues a choisi 5 essences caractéristiques. Les textures des arbres sont extraites des

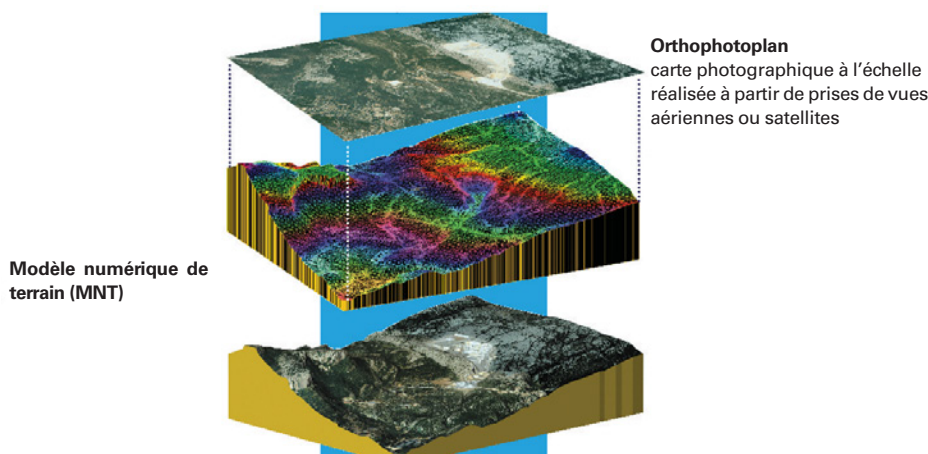


Logiciel Autocad Map®. visualisation du MNT et du MNE.



Extrait de l'orthophotoplan.

## Modélisation de l'espace géographique en 3D



## Usages

### ■ Les premiers usages de l'outil 3D interactif et évolutif sont :

- l'aide à la décision
- la concertation
- la communication (promotion - mise en valeur - meilleure compréhension)
  - PLU
  - cadastre en 3D (couplage avec l'outil SIG de la commune)
  - visualisation des futurs projets immobiliers
  - doublement de l'A9 et de la LGV en 3D
  - borne interactive en mairie
  - analyse des risques hydrauliques. ●

## Contact

### Philippe BOUR

Responsable d'affaires  
Société EEE i.g.o  
tél : 04 66 63 75 47  
www.igo.fr

■■■ photographies prises sur le terrain. Le modèle géométrique 3D de chaque arbre est optimisé pour une navigation temps réel (2 à 3 polygones). Les hauteurs précises des arbres sont apportées par la restitution photogrammétrique (le MNE). L'orthophotoplan et un repérage terrain sont utilisés pour affecter les essences dominantes. Une procédure automatique permet d'insérer sur le socle 3D l'ensemble de la végétation.

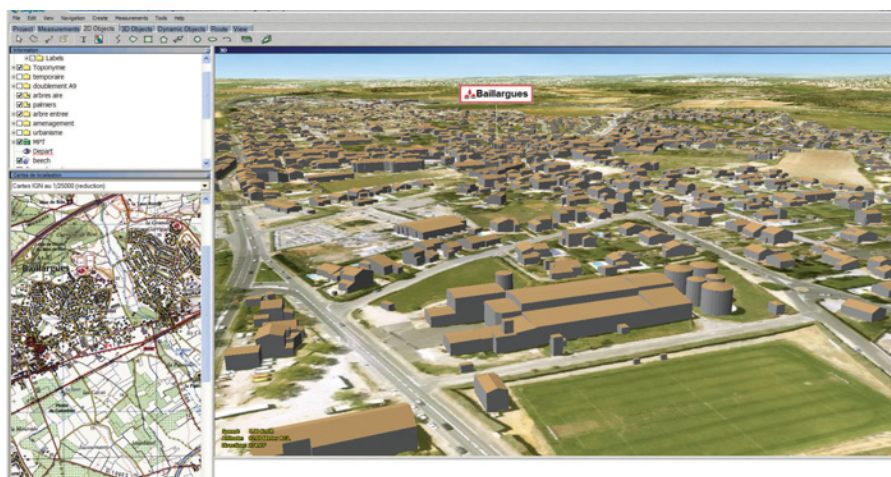
**Enfin la dernière étape** modélise le paysage environnant la commune de Baillargues. Ce travail est réalisé à partir des bases de données IGN (BD ORTHO 50 cm et BD TOPO Pays) et à partir de données satellitaires (LANDSAT 7 et MNT 90 m). Une harmonisation des couleurs est également réalisée par rapport à la donnée la plus précise. La solution logicielle 3D livrée à la commune de Baillargues est l'offre Skyline. Elle permet de construire, de gérer et de diffuser

des maquettes 3D géoréférencées temps réel. Skyline diffuse sa technologie sur tous les continents depuis 1997 et est membre du consortium OpenGIS (définition des normes et formats standard SIG). La société EEE est le distributeur de la technologie Skyline sur la France.

Le logiciel Terra Explorer Pro permet de naviguer en 3D temps réel dans la maquette numérique et de l'enrichir en superposant, en créant des couches d'informations (bâtiments 3D, objets 2D/3D...) en liaison ou non avec une application SIG et des SGBDR. Terra Explorer Pro bénéficie d'une grande richesse fonctionnelle et d'une simplicité d'utilisation. Il apporte une très forte autonomie pour gérer les maquettes 3D. Le logiciel gère des bases de données terrain 3D de taille et de résolution illimitées. Vous trouverez plus d'informations sur le site internet [www.igo.fr](http://www.igo.fr).

## ABSTRACT

*The community of Baillargues situated in the administrative district of Hérault – France- has launched an invitation to tender during the second term of 2005 in order to purchase geographical database, create a 3D numerical environment including the corresponding data set. A determined decision that high lightens the willingness of the community to work with the adequate decision, consultation and communication tool as far as city planning is concerned. The community has chosen to go for an innovating, accessible and understandable 3D solution: all citizens can then have a fast and easy understanding via networks of 5cm/pixel high resolution aerial images (scale 1/500), which is a brand new experience in France! The community of Baillargues has naturally decided to go for EEE-i.g.o offer with a 4-month delivery schedule.*



Logiciel Terra Explorer Pro® : visualisation 3D de la maquette communale.



# Elaboration d'un SIG pour la gestion du domaine portuaire de Mostaganem

■ Mohand Ameziane CHERIFI - Djillali BENNEDJEMA - Saiah Mohammed BOURAS

*L'ouverture de l'Algérie vers l'économie de marché et les échanges commerciaux internationaux a incité les ports d'Algérie à améliorer la qualité de leurs infrastructures portuaires en rénovant les différents réseaux ainsi que l'offre de service pour ses utilisateurs étrangers et locaux.*

*L'objectif de notre projet consiste à réaliser pour le compte de l'entreprise portuaire de Mostaganem (350 km à l'Ouest d'Alger) une base de données portant sur l'apport des systèmes d'informations géographiques pour l'analyse, l'exploitation, la gestion à court, moyen et long terme de l'ensemble du domaine portuaire des entités apparentes tels que : bâtis, aires de stockage, jetées, routes, chemin de fer... et des réseaux souterrains tels que : assainissement, eau potable, téléphone, gaz, électricité...*

**L**es besoins en espaces, fluides, moyens de communications et énergies augmentent constamment entraînant ainsi des problèmes de maîtrise de la gestion du patrimoine.

Les travaux de rénovation des réseaux, des surfaces, des bâtis ; les entraves à la circulation, la nécessité économique d'une bonne gestion des infrastructures sont quelques-unes des préoccupations quotidiennes des gestionnaires.

En parallèle, la rapidité du développement provoque des retards dans la tenue à jour des plans d'exécution et le report de nouvelles installations sur ces plans, alors que les besoins en informations deviennent de plus en plus importants, celles-ci sont toujours difficiles à obtenir.

Les méthodes d'approche traditionnelles devenant de plus en plus inadaptées et fastidieuses, le recours à des méthodes modernes de gestion et l'appel à l'outil informatique sont absolument essentiels. Par suite de l'augmentation du volume d'information, il y a un besoin accru d'organiser leurs données en un système approprié pour garantir l'efficacité d'une telle gestion.

Figure 1. Port de Mostaganem

Ce projet relatif au port de Mostaganem a pour objectif de fournir un système d'informations géographiques de l'aire portuaire de Mostaganem permettant l'analyse de la situation actuelle pour une gestion et une exploitation quotidienne et projections futures (rénovations, extensions, etc.) tout en offrant aux exploitants un outil de gestion performant, rapide et économique.

Notre première intervention au sein du port de Mostaganem remonte à 1996 par l'élaboration d'un plan topographique (piquage et habillage du plan par la méthode classique), suivi par des études de voirie, plates-formes et réseaux divers tels que, l'alimentation en eau potable, l'assainissement et l'éclairage de la jetée. Lors des travaux de réalisation qui ont démarré en 1998, des problèmes ont surgi sur le terrain tel que le passage d'anciennes canalisations souterraines et de câbles électriques enterrés qui ne sont mentionnés sur aucun plan ou document quelconque ; la nécessité alors d'introduire l'outil informatique a été ressentie en commençant par l'élaboration d'un plan multiréseaux en 2001, pouvant ainsi résoudre une partie des préoccupations.

■ ■ ■

- ■ ■ L'évolution du port dans le temps, les difficultés d'archivage, de mise à jour des plans, les demandes accrues de l'information géographique nous ont poussés à leur proposer en 2003 la mise en place d'un SIG pour la gestion du port.

Des séances de sensibilisation ont commencé dès lors par la présentation des projets déjà réalisés en matière de SIG dans les Daïra d'Arzew et de Bethioua parmi les-quels nous citons, système d'aide à la gestion technique des réseaux d'eau potable et d'assainissement de la Daïra de Bethioua et gestion technique des réseaux du centre ville d'Arzew à l'aide d'un SIG. L'idée se concrétisera en 2004 et actuellement ce projet commence à intéresser les ports d'Algérie et en particulier ceux de la côte ouest.

A travers ce travail original, pris comme projet pilote, des présentations, expositions et opérations de sensibilisation ont eu lieu au niveau des ports d'Arzew et de Bethioua pour lesquels nous avons déjà élaboré un plan de circulation.

## Planning de mise en place du projet

Pour bien mener cette étude, un travail par étape est nécessaire: Réf [1]

1. Concertation et sensibilisation,
2. Collecte et analyse des données,
3. Conception et réalisation du modèle conceptuel des données,
4. Choix du logiciel et intégration des données,
5. Implémentation du système au niveau du port et formation de l'utilisateur.

ETAPES DU PROJET	ANNEE 2003 - 2004											
	JUI	AOT	SEP	OCT	NOV	DEC	JAN	FEV	MAR	AVR	MAI	JUIN
1												
2												
3												
4												
5												

## Besoins exprimés par les responsables du port

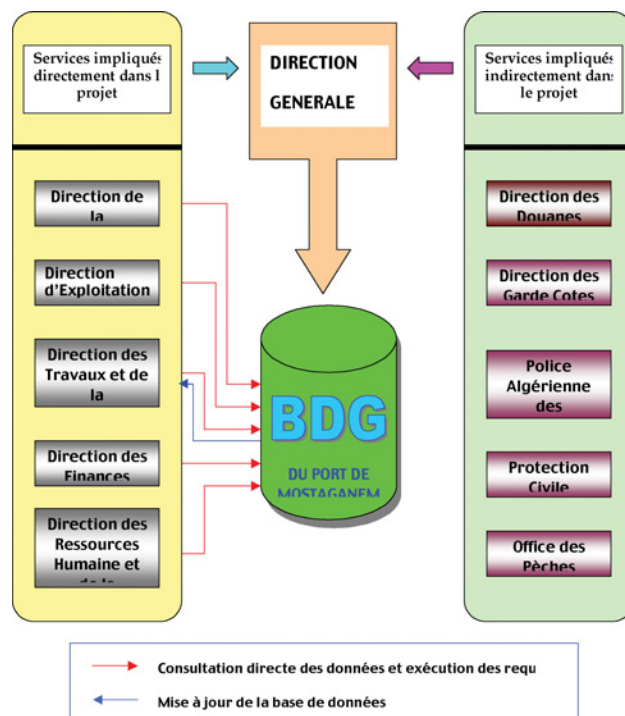
- Nécessité d'avoir une cartographie de l'ensemble du port rattaché dans un système de projection unique Lambert Nord Algérie,
- Avoir une information complète de tous les objets graphiques,
- Avoir un plan multiréseaux avec une information détaillée;
- Extraction d'information par croisement de plusieurs couches d'informations,
- Faciliter l'accès à l'information,
- Résultats sous plusieurs formes:
  - numériques en différents formats,
  - graphes pour l'analyse thématique,
  - documents graphiques en différentes échelles.

## Difficultés rencontrées

- Difficultés de sensibiliser les responsables du port pour la mise en place d'un SIG.

- Absence d'anciens plans des réseaux souterrains,
- Absence d'informations exactes sur les différents réseaux existants tels que: diamètre, nature, profondeur, date de pose des canalisations, pression, etc.
- Absence de plans d'architecture des anciens bâtis,
- Encombrement des réseaux divers souterrains,
- Absence de relevés bathymétriques servant à déterminer la valeur du tirant d'eau qui est essentielle pour l'accostage de bateaux,
- Documents graphiques récupérés, réalisés dans des systèmes de projections et des échelles différentes,
- Absence d'information géotechnique.

## Organigramme des services impliqués dans le projet



## Présentation du port de Mostaganem: Réf [6]

Mostaganem, ville du Nord-ouest d'Algérie sur le golfe d'Arzew, au bord de la mer Méditerranée près d'Oran, possède un important port maritime de pêche, de commerce et d'industrie ainsi qu'un centre de transit du matériel de prospection et de forage pétroliers et gaziers vers le sud Algérien. La ville est bien desservie par un réseau de transport ferroviaire, autoroutier, dense et moderne, bénéficiant ainsi d'une situation géographique stratégique.

A cet effet, au cours des dernières années, le port de Mostaganem (figure 1), a consenti d'énormes efforts d'investissements par la réalisation d'un ambitieux programme en autofinancement de plusieurs projets, susceptibles de générer une grande fluidité du trafic et d'améliorer toutes les conditions générales de l'exploitation portuaire.





Figure 2. Extrait des bassins et quais

### ■ Infrastructures Portuaires

- Jetée: 1 830 m de longueur
- Plan d'eau: 30 hectares
- Bassins: (figure 2)
  - 1<sup>er</sup> bassin: 14 ha de 6,77 m à 8,22 m de profondeur.
  - 2<sup>e</sup> bassin: 16 ha de 6,95 m à 8,32 m de profondeur
- Postes à quai commerciaux: 10 postes dont 4 postes spécialisés: céréales, sucre roux, bitume, vin
- Postes de servitude: 2 postes X et Y de 80 m chacun
- Quai de pêche: 130 m de longueur.
- Appontement de pêche: 2 appontements de 90 m.

### ■ Zones d'exploitation

- Surfaces non couvertes: 69 000 m<sup>2</sup> de terre-pleins dont 65 000 m<sup>2</sup> à usage commercial.
- Surfaces couverte: 17 Docks-magasin d'une superficie de 9 300 m<sup>2</sup> dont 6 300 m<sup>2</sup> à usage commercial.
- Voies de desserte: Les voies de desserte existantes dans le port sont de 4 805 m de route.

Les quais et terre-pleins sont desservis par un réseau rénové de voie ferrée de 3 747 m relié à la gare de Mostaganem.

### ■ Installations spécialisées

Silo de céréales - station de bitume - silo à sucre - calle de halage - pont bascule et scanner.

### ■ Perspective de développement

Un projet d'extension du Port vers l'Ouest par la création d'un 3<sup>e</sup> bassin est en cours d'étude.

## Collecte et analyse des données

Cette phase servira entre autre à:

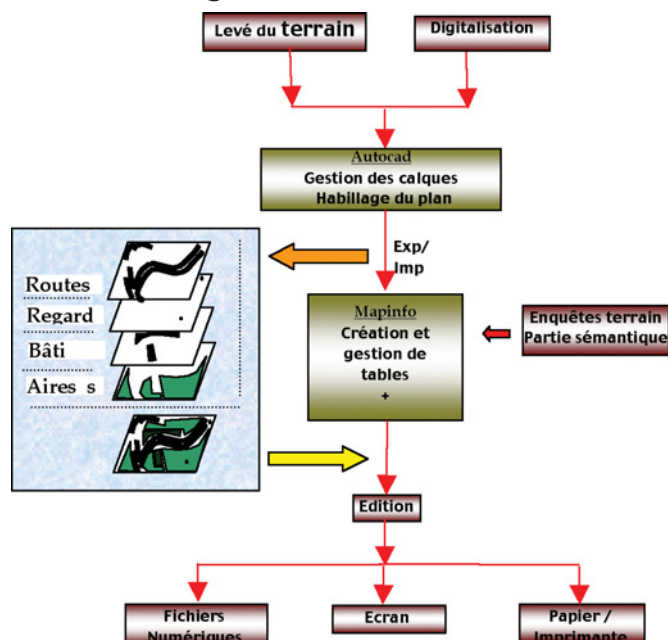
- Dresser un inventaire détaillé de la documentation existante relative à tout le domaine portuaire et établir un dictionnaire de données,
- Vérifier l'homogénéité de l'information,
- Examiner la cohérence des réseaux,
- Définir les besoins réels en informations des gestionnaires
- Choisir un plan de référence et un système de projection unique.

Le document de base qui a servi pour la partie graphique est un levé topographique du port au format Autocad réalisé par une équipe de topographes du Centre National des Techniques Spatiales d'Arzew et rattaché au système Lambert Nord Algérie. Cependant des compléments et enquêtes sur terrain ont été effectués pour la collecte de toutes les informations manquantes et indispensables à la mise en place de la base de données. Ces données se présentent sous forme de documents cartographiques (plans, schémas cartes, diagrammes, etc.) introduits par des opérations de digitalisation; et rapports descriptifs (diagnostic de l'existant, description exhaustive structurée et non redondante, objets associations et requêtes sur lesquels le gestionnaire souhaite être informé).

## Différents documents utilisés

Désignation	Echelle	Date d'établissement	Maitre d'œuvre	Observations
Plantopographique	1/1000 1/500	Septembre 1996	CNTS	Levé classique (angles & distances) Numérisé en 2003 avec autocad
Renforcement du réseau d'assainissement	1/1000	Février 1997	CNTS	Etude et suivi fait par l'équipe de la BDG avec autocad
Plan de l'éclairage public de la jetée	1/1000	Juin 1997	CNTS	Etude et suivi fait par l'équipe de la BDG avec autocad
Plan du réseau d'A.E.P	1/1000	Juin 1998	CNTS	Etude et suivi fait par l'équipe de la BDG avec autocad
Plan voiries et platesformes	1/1000	Septembre 1999	CNTS	Etude et suivi fait par l'équipe de la BDG avec autocad
Plan des lignes moyenne et haute tension	1/2000	-	Sonolgaz	Digitalisation sous autocad
Plan du réseau téléphone	1/1000	-	P. & T	Digitalisation sous autocad
Plan du réseau principal d'eau potable	1/1000	-	A.D.E	Digitalisation sous autocad
Plans de recouvrements	1/500	2003	CNTS	Réalisé par l'équipe topographique du CNTS
Enquêtes sur site	-	2003	CNTS	Faites par l'équipe de la BDG

## Chaîne d'intégration des données



## Conception et réalisation du modèle

Cette phase consiste à élaborer:

- Le modèle conceptuel des données par discrétisation du monde réel en couches d'information ayant chacune les

mêmes caractéristiques descriptives et le même type de géométrie (objets ponctuels, linéaires et surfaciques). Il est basé sur deux niveaux à savoir le niveau géométrique désignant la localisation spatiale des objets et le niveau sémantique désignant leur description.

- la base de données : les différentes couches d'information qui ont constitué notre base de données sont :
  - Surfaces et bâtis : bâti, aire de stockage, bassin, quai, jetée.
  - Réseau d'eau potable : tronçon, réservoir, station de pompage, poteau incendie, bouche incendie, bouche à quai.
  - Réseau assainissement : tronçon, regard-ass, avaloir, rejet
  - Réseau éclairage : candélabre, réseau éclairage, câble haute tension, câble moyenne tension, poste transformateur
  - Réseau gaz : réseau gaz, regard gaz
  - Réseau téléphonie : réseau téléphone, chambre téléphone.
  - Couches d'appui : limite portuaire, limite mer, mur clôture, station polygonale, talus, mur de soutènement, point topographique, toponymie.
  - Couches accessoires : cartouches, cadres, flèche du nord, grille, légende.

## Choix du logiciel et intégration des données

Le fond topographique numérique du port est obtenu par intégration des carnets d'observations via TOPOCAD un logiciel de topographie installé sous le logiciel universel AUTO CAD version 14 (figure 3).

La digitalisation des documents graphiques récupérés des différents services est faite directement sous AUTO CAD.

Pour la partie SIG, notre choix s'est porté sur le logiciel MAPINFO PROFESSIONAL 7 (Réf [5]) qui est un produit de Map Info Corporation et distribué en France par Claritas (Réf [3]). Il est considéré comme un SIG vectoriel avec un module de saisie intégré, performant et évolutif, largement diffusé

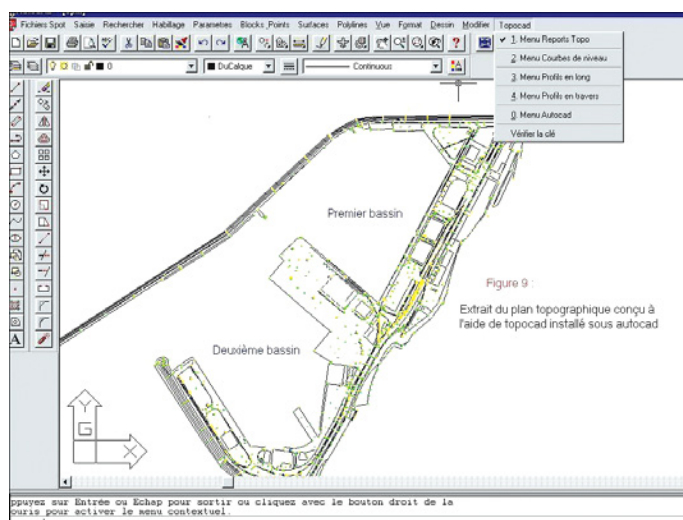


Figure 3

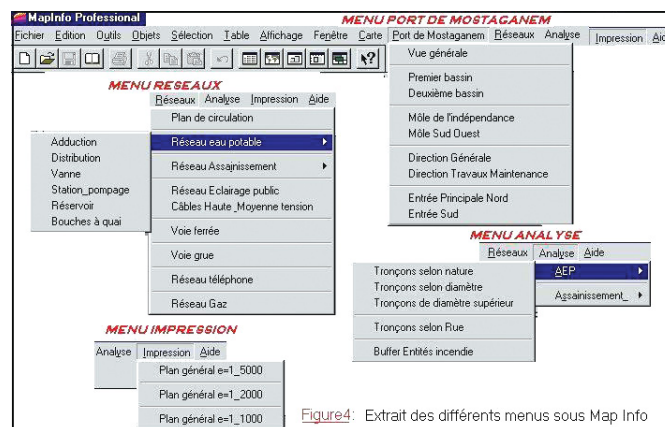


Figure 4

auprès des utilisateurs, ses principales caractéristiques se résument comme suit :

- Choix important de projections et création de système de coordonnées utilisateurs,
- Opérations de superposition de couches thématiques,
- Analyse thématique et traitement statistique,
- Disponibilité d'une bibliothèque de symboles modifiable d'une façon interactive,
- Echange de données avec d'autres logiciels SIG et CAO/DAO,
- Intégration du langage standard de requêtes SQL,
- Disposition d'un moteur de gestion de BD et accès direct au BD compatibles ODBC,
- Intégration du module de digitalisation propre à Mapinfo,
- Gestion des images raster,
- Exécution des applications en langage Mapbasic pour personnaliser et automatiser le fonctionnement de Mapinfo,
- Type de sortie : valeurs textuelles ou numériques, histogramme, graphique, représentations cartographiques.
- Possibilité d'intégrer des Modules optionnels tels que :
  - Vertical Mapper pour la création des profils et génération des MNT,
  - ChronoWay pour le calcul et l'optimisation d'itinéraires,
  - ChronoMap pour l'élaboration des cartes d'accessibilité routière, en fonction temps, distance et coût d'accès.

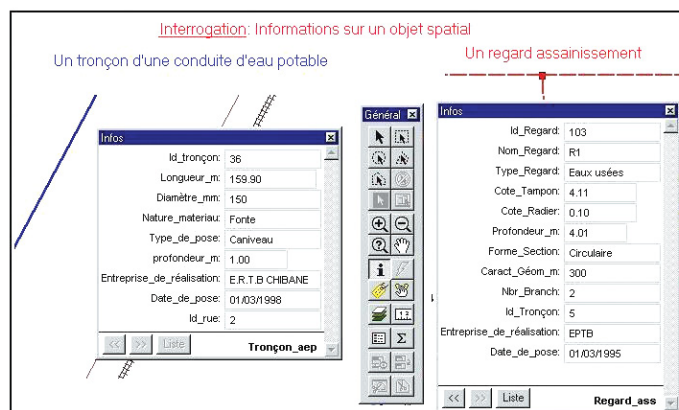


Figure 5



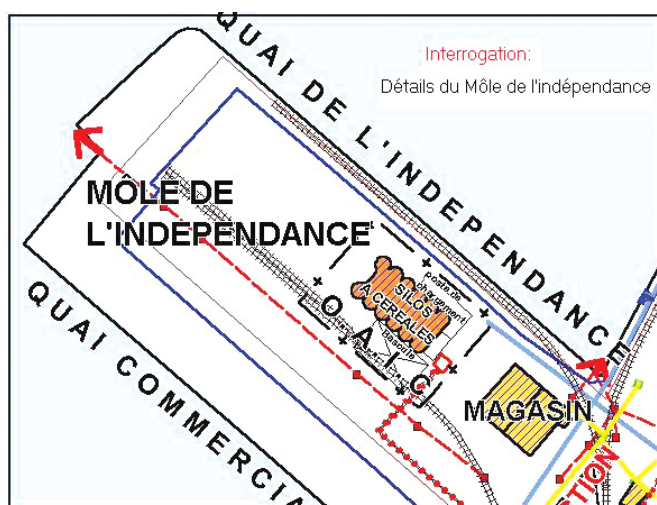


Figure 6

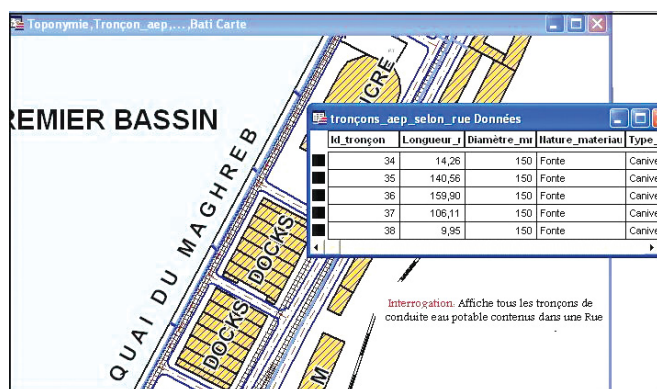


Figure 7

## Fonctionnement sous Mapinfo: Réf [4]

Pour concrétiser notre travail, un programme en langage Mapbasic a été élaboré par insertion de quatre menus déroulant (figure 4) permettant de:

- Faciliter l'accès à l'information,
- Assurer une communication rapide et conviviale entre l'utilisateur et le logiciel,
- Exécuter quelques requêtes spatiales personnalisées par simples clics (figure 5 à figure 8).

Ces nouveaux menus sont "Port de Mostaganem, Réseaux, Analyse, Impression" et sont à leur tour composés de sous menus, présentés de la manière suivante:

- Menu "Port de Mostaganem" : composé de sous menus :
  - Vue générale,
  - Premier bassin,
  - Deuxième bassin,
  - Môle de l'indépendance,
  - Môle Sud - Ouest,
  - Direction Générale
  - Direction Travaux & Maintenance,
  - Entrée principale Nord,
  - Entrée Sud...

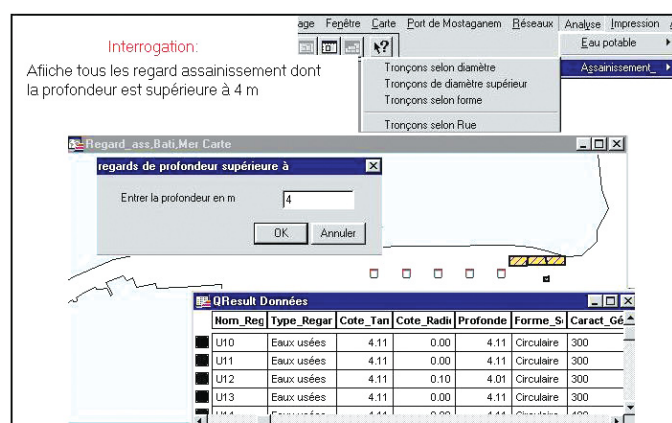


Figure 8

- Menu "Réseaux" : composé de sous menus :

- Plan de circulation,
- Réseau eau potable : composé de sous menus :
  - Adduction,
  - Distribution,
  - Vanne,
  - Station de pompage,
  - Réservoir,
  - Bouche à quai.

- Réseau assainissement : composé de sous menus :

- Réseau,
- Tronçon,
- Regard,
- Avaloir,
- Rejet,
- Réseau éclairage,
- Réseau téléphone,
- Réseau gaz,
- Voie ferrée...

- Menu "Analyse" : composé de :

- Eau potable : composé de sous menus :

- Tronçon selon nature,
- Tronçon selon diamètre,
- Tronçon de diamètre supérieur,
- Tronçon selon rue,
- Buffer entité incendie,

- Assainissement : composé de sous menus :

- Tronçon selon diamètre,
- Tronçon de diamètre supérieur,
- Tronçon selon forme,
- Regard selon profondeur,
- Regard de profondeur supérieur,

## ■ ■ ■ Implémentation du système et formation

Cette phase est consacrée au transfert du savoir faire à l'équipe concernée qui prendra en charge ce travail. Le programme est basé essentiellement sur la formation de l'équipe sur les systèmes d'informations géographiques en général et la manipulation du système sous le logiciel Mapinfo. Cette formation est utile pour une meilleure prise en charge du produit.

## Conclusion

La réussite d'un tel projet réside dans la collecte de l'information géographique tels que les archives, les plans existants, les enquêtes, les relevés topographiques et les compléments sur terrain.

Ce projet a permis d'apporter un certain nombre de résultats essentiels parmi lesquels nous retiendrons :

- Elaboration d'une base de données du domaine portuaire de Mostaganem (données disponibles) qui étaient disparates chez les différents détenteurs d'informations.
- Formation d'une équipe projet avec tous les profits méthodologiques voulus afin d'assurer le suivi et la mise à jour de la base de données au niveau du port de Mostaganem. La formation a été organisée de telle manière à aller jusqu'au bout de l'analyse des données et représentations cartographiques souhaitées.

Ce projet pourrait être amélioré dans le futur pour permettre :

- Le suivi des mouvements des bateaux,
- Le suivi des mouvements de la marchandise à travers les aires de stockage,
- La gestion du personnel, et des biens immobiliers du port, etc.

Ce projet pilote a permis la diffusion de la culture SIG pour les entreprises portuaires. ●

## Mots clés et Abréviations

**ADE** : Algérienne des eaux

**AEP** : Alimentation en eau potable

**BD** : Base de données

**BDG** : Base de données géographiques

**CAO/DAO** : Conception Assisté par Ordinateur et Dessin Assisté par Ordinateur

**CNTS** : Centre National des Techniques Spatiales

**MNT** : Modèle Numérique du Terrain

**ODBC** : Open Data Base Connectivity

**P & T** : Poste et télécommunications

**SIG** : Système d'informations géographiques

**SQL** : Structured Query Language

## Références bibliographiques

[1] **E.DIDON (90)** *Systèmes d'informations géographiques : Concepts, fonctions et applications*. Laboratoire commun de télé-détection CEMAGREF/ENGREF- Montpellier.

[2] **R.LAURINI & F.MILLERET (93)** *Base de données en géomatique*. Edition HERMES. 1993.

[3] **CLARITAS France** *Map Info Professional 7.0*. Manuel de référence. Juillet 2002.

[4] **Map basic Development Environment Reference**. *Map info Corporation* Troy New York

[5] **Pascal BARBIER** *Cours Map Info V7.0 Livrets 1 & 2*. IGN-E NSG-CERSIG juillet 2003.

[6] **Site du port de Mostaganem** : <http://www.mosta-port.com>

## Contacts

**Mohand Ameziane CHERIFI**

Ingénieur principal (CNTS) Arzew Algérie,  
PGS (poste de graduation spécialisée) en géomatique  
[cherifim@ifrance.com](mailto:cherifim@ifrance.com)

**Djillali BENNEDJEMA**

Ingénieur principal (CNTS) Arzew Algérie, PGS  
(poste de graduation spécialisée) en géomatique  
[benedjmad@yahoo.fr](mailto:benedjmad@yahoo.fr)

**Saiah Mohammed BOURAS**

Ingénieur principal (CNTS) + D.E.A. Arzew Algérie,  
Ancien élève IG2 de L 'ESTP Paris Promotion 1979  
[bouras-saiah@caramail.com](mailto:bouras-saiah@caramail.com)

**Centre National des Techniques Spatiales,**

1, avenue de la Palestine ARZEW - ORAN - ALGERIE  
Tél. : 213 41 47 25 83 - Fax : 213 41 47 36 65

## ABSTRACT

*The involvement of Algeria in the market economy and world-wide commercial exchanges has aroused the ports of Algeria to improve the quality of their infrastructure by the refurbishment of different networks and the improvement in the provision of services for both national and international users. Our project is aiming at realizing a database for the account of Port Authorities of Mostaganem (350 km west of Algiers) dealing with the contribution of Geographic Information Systems into the analysis, operation and management on short, medium and long terms of the global port site on both over ground such as frame, storage areas, jetties, roads and railways... and underground, such as cleaning up, fresh water, telephone, gas and electricity networks.*



# Le point sur les traitements de données GNSS en réseau pour un positionnement centimétrique temps réel de meilleure qualité

■ Romain LEGROS - Frédéric MOLLE - Nicolas BALARD

*Depuis les années 80 et la mise en place du système GPS, les recherches dans le domaine du radiopositionnement par méthodes GNSS n'ont cessées de s'étendre et il est aujourd'hui possible de se positionner en temps réel avec une précision centimétrique de manière totalement transparente en traitant les données d'observation en réseau afin de résoudre de manière satisfaisante la majorité des problèmes rencontrés en mode RTK. D'une manière générale, il s'agit de modéliser les erreurs spatialement corrélées (ionosphère, troposphère et éphémérides) sur chaque station avant de mettre en place des modèles de propagation en réseau (plans, polynômes ou modèles d'interpolation plus ou moins complexes) et de diffuser les données nécessaires aux utilisateurs (corrections et/ou observations) pour qu'ils puissent se positionner par double différence avec la précision escomptée suivant diverses approches. L'enjeu est de taille puisqu'il s'agit, au moment où plusieurs réseaux sont en passe de couvrir le territoire (ORPHEON, TERIA, etc.), de démocratiser l'utilisation de l'information géographique en favorisant son accès.*

## ■ mots-clés

GNSS, GPS, stations permanentes, erreurs d'éphémérides, erreurs ionosphériques, erreurs troposphériques, multitrajets, ambiguïtés entières, modélisations en réseaux, surfaces paramétrées, continuité spatiale, continuité temporelle, interpolation, RTCM, NTRIP, MAC, FKP, PRS, RRS, VRS.

**D**epuis le début des années 1980 et la mise en place du système GPS (Global Positioning System), les techniques de positionnement par satellites n'ont cessées de progresser pour obtenir la place prépondérante que nous leur connaissons aujourd'hui. Elles interviennent en effet aussi bien dans le domaine du positionnement (navigation terrestre, maritime et aérienne, topographie, géodésie, sciences de la terre, surveillance d'ouvrage d'art, guidage d'engins, agriculture de précision, etc.) que dans celui de la météorologie ou de la synchronisation temporelle.

Les systèmes de radiopositionnement par satellites sont en fait à décomposer en deux grandes familles en fonction du caractère "ascendant" ou "descendant" de la mesure, étant entendu que

nous laisserons de côté les systèmes ascendant de type DORIS (*Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite*) pour uniquement nous intéresser aux systèmes descendant de type GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*) comme le GPS de l'armée américaine, le GLONASS (*GLObal'naya Navigatsionnaya Spunikovaya Sistema*) de l'armée russe ou encore le futur système civil européen GALILEO prévu pour la fin 2010.

Durant les vingt dernières années, le perfectionnement des techniques de positionnement GNSS a permis d'une part leur ouverture à de nouvelles applications temps réel pouvant parfois requérir une très forte dynamique (positionnement centimétrique temps réel à des fréquences pouvant atteindre les 20 Hz pour

du guidage d'engins ou de la surveillance d'ouvrages d'arts) tout en permettant d'autre part d'en améliorer encore la précision. Dans le domaine du positionnement statique et pour certaines applications scientifiques bien particulières telles que la géodésie ou la surveillance des déformations ductiles de l'écorce terrestre appliquées à la prédiction des séismes, il est ainsi possible d'obtenir une précision de quelques millimètres au prix de nombreux efforts (éphémérides précises, modèles ionosphériques et troposphériques fins, observations sur des séries temporelles longues pouvant parfois atteindre plusieurs années, prise en compte des surcharges océanographique et atmosphérique, etc.).

L'apparition, au milieu des années 1990, du mode de positionnement cinématique temps réel ou RTK (*Real Time*

■ ■ ■

■ ■ ■ *Kinematic*), couplé à la mise en place de référentiels géodésiques compatibles GPS (RGF93 en France), révolutionna les méthodes de production de données géographiques. Cette innovation permit non seulement d'ouvrir de nouveaux horizons en terme de précision et d'homogénéité des levés, mais s'accompagna aussi et surtout d'une réduction des coûts et de gains de productivité sans précédents relativement aux méthodes optiques classiques prévalant jusqu'alors.

Depuis ces dernières années, la principale innovation en terme de positionnement temps réel consiste à traiter les données GNSS en réseau pour fournir aux utilisateurs un service centimétrique totalement transparent, reléguant ainsi le RTK "classique" au second plan en libérant l'utilisateur des contraintes techniques et opérationnelles inhérentes à ce mode de positionnement (mise en place, rattachement et surveillance d'une station de référence pseudo permanente). Il est alors probable que cette innovation technologique permette de démocratiser plus rapidement le positionnement centimétrique temps réel en rendant la technique plus accessible que jamais (simplicité, réduction des coûts), lui permettant par là même de prendre son plein essor.

Au final, l'enjeu est énorme dans la mesure où ces réseaux temps réels, couplés à l'augmentation du nombre de satellites (GLONASS, GALILEO), permettront sûrement de favoriser l'utili-

sation de l'information géographique dans tous les domaines (travaux publics, VRD, aménagement, environnement etc.) dans la mesure où il n'aura jamais été aussi simple et peu onéreux d'accéder à un jeu de coordonnées précises dans un référentiel homogène, aussi bien dans le temps (répétabilité de la mesure) que dans l'espace (cohérence de levés décorrélés).

A l'heure où la France est en passe d'être couverte par plusieurs réseaux centimétriques temps réel (ORPHEON, TERIA etc.) il nous apparaît essentiel, au regard des maintenant presque deux années d'expérience d'ORPHEON dans le domaine, et surtout du retour d'expérience acquis dans la trentaine de pays où de tels services existent déjà, de faire le point autour de ces évolutions techniques afin que chacun puisse y voir un petit peu plus clair.

Alors évolution ou révolution?

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous supposons que le lecteur possède les pré-requis nécessaires sur les principes inhérents au radiopositionnement par méthodes GNSS, étant entendu que nous l'encourageons vivement à se référer au fascicule intitulé *"Quelques brefs rappels sur le positionnement de précision par méthodes GNSS - Application au système GPS"* spécialement préparé pour l'occasion afin de compléter cet article et bientôt téléchargeable sur le site web du projet ORPHEON (<http://www.orpheon.biz>), rubrique *"Téléchargements"*.

## Intérêts et concepts généraux sous-jacents à l'utilisation de données GNSS en réseau

Le mode de positionnement RTK est idéal pour se positionner avec une grande précision tant que la distance séparant le mobile de sa station de référence (ligne de base) reste relativement courte. Dès que la longueur des lignes de bases augmente, les erreurs corrélées dans l'espace liées aux perturbations atmosphériques (erreurs ionosphériques et troposphériques) ainsi qu'à l'incertitude portant sur la position des satellites au moment de l'émission du signal (erreurs d'éphémérides) ne sont plus les mêmes sur la station de référence et sur le mobile, entraînant des problèmes de résolution des ambiguïtés entières sur le mobile.

Ces erreurs corrélées dans l'espace induisent en fait, lorsqu'elles ne rendent pas impossible la mesure (impossibilité de fixer les ambiguïtés entières), une perte de précision comprise entre 1 et 10 ppm en fonction des conditions météorologiques [Wübbena et al., 1996], la longueur des lignes de bases utilisables pour un positionnement de précision pouvant parfois se trouver limitées à moins de 10 km durant les périodes d'intense activité ionosphérique [Vollath et al., 2002].

D'une manière générale, les réseaux de stations permanentes permettent alors de pallier ce problème d'éloignement à la référence rencontré avec les stations permanentes "isolées". Les recherches dans le domaine du traitement de la phase des signaux GNSS en réseau s'étant multipliées ces dernières années, il est en effet aujourd'hui possible de se positionner n'importe où au sein d'un réseau de stations permanentes avec une précision centimétrique sans que l'utilisateur n'ait à se soucier de la distance le séparant de la station la plus proche.

Pour entrer un peu plus dans le détail, les performances du mode RTK dépendent en fait de l'aptitude du mobile à résoudre les ambiguïtés entières et à modéliser les résidus des erreurs corrélées dans l'espace dans le calcul par doubles différences de la ligne de base le séparant de



© LEICA GEOSYSTEMS



© BERGERAT MONNOYEUR

**Figure 1.** Exemples d'application du positionnement GPS centimétrique temps réel au sein d'un réseau de stations permanentes.



sa station de référence et le traitement des données en réseau permet de résoudre de manière satisfaisante la majorité des problèmes rencontrés [Lachapelle et al., 2000]. Il est en effet possible de fixer les ambiguïtés entières sur chaque station du réseau puis de modéliser ponctuellement les retards ionosphérique et troposphérique ainsi que les erreurs d'éphémérides [Fotopoulos et al., 2001]. En combinant les observations sur les stations du réseau, la résultante de ces erreurs spatialement corrélées peut être modélisées sur toute la région couverte par diverses techniques de paramétrisation tandis que la répétitivité de la mesure permet de moyenner ou même filtrer les erreurs spatialement décorréliées comme les multitrajets ou les bruits de mesure portant sur les stations de référence [Lachapelle et al., 2000].

Le fait d'envoyer ces informations au mobile lui permet alors de s'initialiser (résolution des ambiguïtés entières) plus rapidement indépendamment de sa position [Roberts, 2000] pour fournir un positionnement de meilleure qualité au sens large. Wübbena et al. [1996] ont ainsi montré en simulant un réseau de stations permanentes par post-traitement qu'il était possible de limiter les erreurs à moins d'un centimètre quelle que soit la position du mobile dans le réseau (meilleure précision) tandis que Fotopoulos et al. [2001] ont montré que les traitements en réseau permettaient d'accroître l'intégrité et la disponibilité du positionnement comparativement à un calcul ne faisant intervenir qu'une seule station de référence.

Vollath et al. [2002] ont enfin démontré que le positionnement RTK en réseau

ne faisait pas que réduire les erreurs mais en changeait les caractéristiques intrinsèques pour aboutir à une augmentation significative des performances comparativement à une solution RTK classique.

A travers cet article, nous allons tenter de mettre en lumière les principales étapes nécessaires au traitement des données GNSS en réseau en illustrant certains principes ou concepts à partir d'expérimentations effectuées sur l'îlot francilien du réseau ORPHEON. Pour rendre le discours plus parlant, nous nous arrêterons régulièrement sur les concepts et méthodes de traitement repris dans les concepts VRS, FKP et MAC ainsi que sur certains détails d'implémentation des différentes solutions commerciales associées, notre but n'étant pas de classer ces solutions ou de porter un quelconque jugement de valeur, mais plutôt d'apporter des éléments constructifs aux lecteurs.

Pour simplifier, les opérations à réaliser pour permettre à un mobile de se positionner en temps réel avec une précision centimétrique sont reprises dans la figure 2 dont nous allons expliciter chacune des composantes tout au long de notre exposé.

## Récupérer les données d'observation et calculer les erreurs ponctuellement

Toutes les stations permanentes d'un réseau sont connectées par l'intermédiaire d'un réseau de télécommunication à un centre de contrôle qui va se charger de récupérer toutes les données d'observation à une fréquence de 1 Hz.

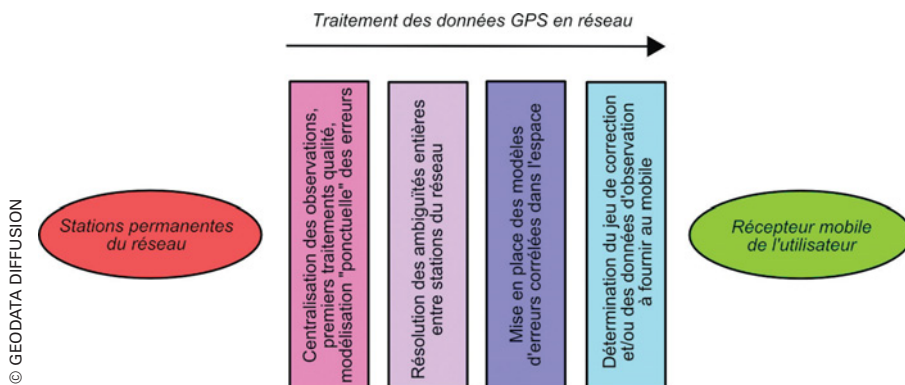
Il est alors important de noter que la latence d'un tel réseau est un élément important à prendre en compte dans la mesure où moins elle sera importante, plus les modèles d'erreurs seront à jour et moins la latence finale du positionnement côté utilisateur sera grande. Dans le cas de la solution GPSNet commercialisée par la société TRIMBLE-TERRASAT, les modèles en question sont renseignés toutes les secondes et perdent leur limite de validité s'ils ne sont pas alimentés de manière suffisamment régulière pendant 30 secondes, période au-delà de laquelle les erreurs corrélées dans l'espace à un instant donné atteignent leur limite de validité.

La fiabilité et la performance du réseau de télécommunication utilisé sont donc une issue importante dans la mesure où une perte de données se traduira directement par un manque de disponibilité du service (époques manquantes).

Il est donc important de bénéficier d'un réseau disponible, à très faible latence et relativement bon marché pour limiter les coûts de fonctionnement. Il s'agit vraiment d'une issue importante et l'émergence des réseaux de type TCP/IP et des nouvelles technologies associées sont une véritable aubaine dans ce domaine même si l'Internet classique (ADSL) ne suffit souvent pas dans la mesure où ses performances sont trop dépendantes de l'état de charge du réseau.

## Fixer les ambiguïtés entières

La résolution des ambiguïtés entières est une issue fondamentale pour se positionner avec précision par méthodes GNSS et il s'agit vraiment d'un sujet de recherche important au regard des 300 papiers scientifiques consacrés au sujet depuis les années 1990 [Kim et Langley, 2000]. Ce sujet est donc bien documenté et les dernières approches se basent sur la théorie des moindres carrés [Teunissen, 1993] pour estimer les ambiguïtés entières en temps réel comme paramètres dans le calcul d'une ligne de base par double différence au même titre que les coordonnées en elles-mêmes. Dans ces méthodes de résolution dites "OTF" pour "On the Fly", les



**Figure 2.** Les différentes étapes d'un traitement GPS en réseau modifiées d'après Euler [2005].

ambiguïtés sont donc estimées comme des réels avant d'être fixées à leur valeur entière.

Les moteurs de résolution des ambiguïtés entières en réseau peuvent alors travailler suivant deux approches temps réel bien différentes, pour chaque ligne de base pour tous les satellites, soit en les calculant par double différence [Landau et al., 2001 ; Rizos et al., 2002], soit en les estimant après modélisation des erreurs ionosphériques, troposphériques, d'éphémérides, voire des multitrajets, les coordonnées précises des stations étant déjà connues avec une très bonne précision dans les deux cas.

Si nous considérons un réseau minimaliste de trois stations sur lequel les ambiguïtés portant sur l'une des lignes de base ne pouvaient être fixées, les observations des satellites incriminés pour les époques en question ne seraient pas prises en compte dans la solution réseau. Sur le même principe, et de manière très liée à la résolution des ambiguïtés, si la fermeture du triangle formé par ces trois lignes de base excédait les 20 mm dans la solution GPSNet, les signaux correspondant ne seraient pas pris en compte pour la génération de la solution réseau.

La résolution des ambiguïtés entières réalisée, une première approche consiste à envoyer au mobile de l'utilisateur les observations de la station de référence la plus proche, appelée "station maîtresse", accompagnées des corrections de différences de phases calculées

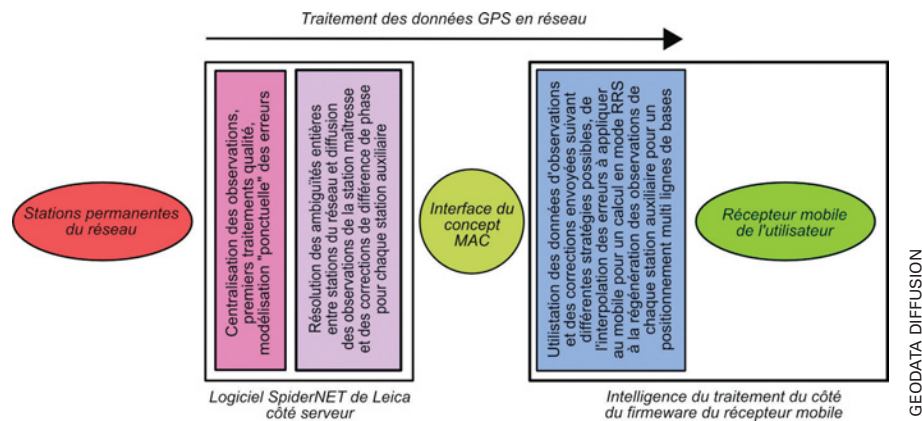


Figure 3. Schéma de principe du concept MAC modifié d'après Euler [2005].

lées pour chaque station environnante jouant le rôle de "station auxiliaire". Il s'agit du concept MAC (*Master Auxiliary Concept*) normalisé par le comité RTCM 3.0 (cf. figure 3).

Disposant des ces corrections de différences de phases pour chaque station auxiliaire et des observations en provenance de la station maîtresse, le mobile est capable de régénérer les observations de chaque station pour potentiellement calculer plusieurs lignes de base en temps réel. En fait, toute l'intelligence du traitement se trouve du côté du mobile qui peut également choisir d'interpoler les corrections de différences de phases représentant la résultante de toutes les erreurs sur chaque station auxiliaire relativement à la station maîtresse selon diverses stratégies de pondération [Euler et al, 2001] (cf. figure 4).

Pour ceux qui souhaiteraient aller un petit peu plus loin, la mise en équation et le détail de la méthode seront bientôt disponibles sur le site web du projet ORPHEON ([www.orpheon.biz](http://www.orpheon.biz)), toujours dans la rubrique "Téléchargements" où vous pourrez accéder à une version plus complète de cet article.

L'ensemble formé par les stations auxiliaires et la station maîtresse est appelé "cellule", la propriété d'une cellule étant d'avoir un niveau d'ambiguïté commun (normalisation des ambiguïtés à

celles de la station maîtresse pour réduire le volume de données échangées).

Du point de vue des implémentations existantes, seule LEICA GEOSYSTEMS a pour l'instant retenu ce principe à travers son produit SpiderNET, plusieurs modes étant disponibles en fonction du type de message utilisé (RTCM 2.3 ou 3.0) et du type de communication utilisé.

## Modéliser les erreurs en réseau

Comme nous l'avons déjà évoqué, les sources d'erreurs affectant la précision du positionnement par méthodes GNSS ont plusieurs origines et il est possible de distinguer les erreurs liées aux satellites (erreurs d'orbites et correction d'horloge du satellite), de celles liées à la propagation du message (erreurs atmosphériques), des erreurs liées à la station en elle-même ou à son environnement immédiat (correction d'horloge du récepteur, variation du centre de phase de l'antenne, bruit électronique du récepteur, multitrajets et sauts de cycles lors d'une perte du signal).

Une première étape va alors consister à traiter chaque ligne de base entre station par simples, doubles et triples différences afin de respectivement éliminer les décalages d'horloges des satellites, les décalages d'horloges des récepteurs, ainsi que les sauts de cycles sur chaque station. Après double différenciation, pourvu que les sites et matériels utilisés soient de bonne qualité (migration du centre de phase des antennes

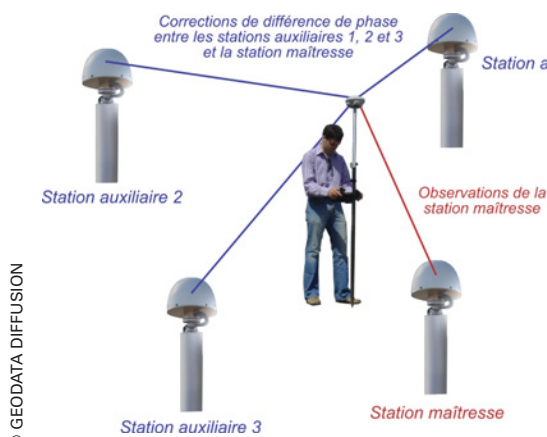
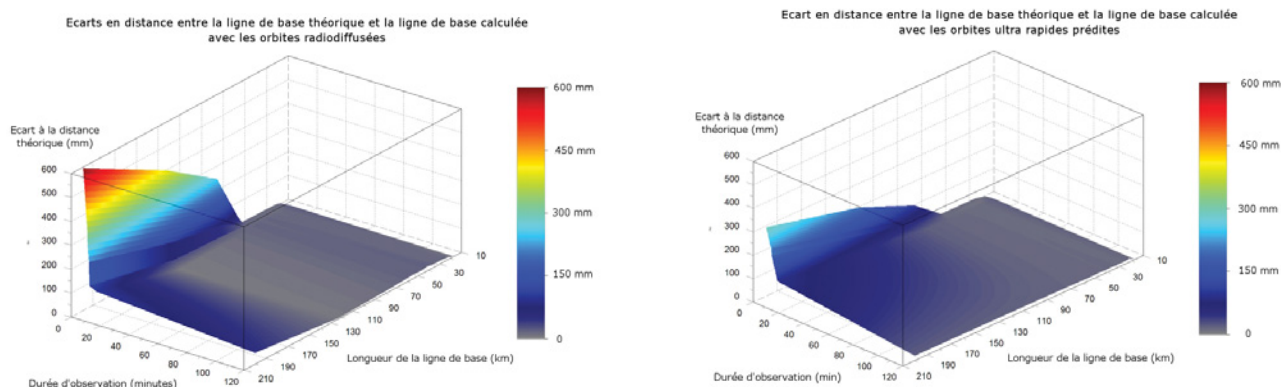


Figure 4. Principe de fonctionnement du concept MAC.





**Figure 5. Comparaison entre orbites radiodiffusées et orbites ultra rapides prédites. [Molle, 2005]**

GPS calibrées, peu ou pas de sources de multitrajets, peu de biais d'électronique des appareils) il est possible de calculer une ligne de base en temps réel avec une précision centimétrique. Pour plus de précisions, n'hésitez surtout pas à vous référer au fascicule prévu en complément de cet article.

Dans la littérature, les erreurs restantes après double différentiation sont en fait traditionnellement séparées en deux catégories en fonction de leur caractère dispersif (variant avec la fréquence des signaux utilisés) ou non dispersif. Le distinguo est ainsi fait entre les erreurs ionosphériques, dispersives, qualifiées de non géométriques, et les erreurs troposphériques, d'éphémérides et liées aux multitrajets dépendant uniquement de la position des satellites à un instant donné, et donc qualifiées de géométriques.

Mise à part les multitrajets modélisables dans le temps comme la composante de l'erreur géométrique se répétant pour une configuration satellitaire donnée, toutes ces erreurs possèdent la propriété importante d'être corrélées dans l'espace et des interpolations spatiales entre stations permanentes permettent d'obtenir des résultats plus que pertinents même si ces corrélations diminuent lorsque la longueur de la ligne de base augmente [Fotopoulos, 2000].

La multiplicité de ces erreurs nécessite alors plusieurs approches et il est parfois simple de s'en affranchir, au moins partiellement. L'IGS (*International GPS Service for Geodynamics* (<http://www.igsb.jpl.nasa.gov>)), propose en effet gratuitement et en temps réel des

orbites ultra rapides prédites toutes les 6 heures échantillonnées à 15 minutes dont l'étude complète sur l'ensemble de la constellation GPS montre des écarts moyens voisins de 10 cm en lieu et place des 2 m des orbites radiodiffusées contenues dans le message de navigation. L'amélioration de la précision du positionnement est illustrée sur la figure 5 représentant les écarts entre lignes de bases théoriques et lignes de bases calculées avec des éphémérides radiodiffusées ou ultra rapides prédites pour différentes durées d'observation et différentes longueurs de lignes de bases.

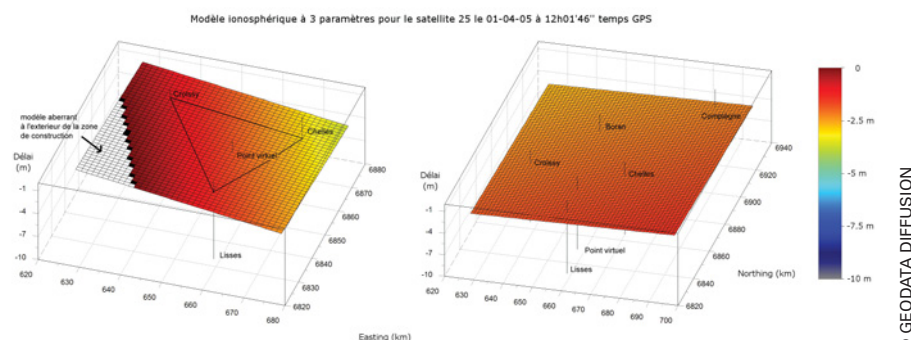
Le gain est en fait localisé sur les courtes durées d'observation. Dès que l'observation dépasse 20 minutes (1 200 points dans l'étude), les résultats sont similaires. Il faut en fait 1 200 points en mode "orbites radiodiffusées" pour obtenir une précision comparable à 60 points en mode "orbites prédites". L'éloignement est lui largement moins dimensionnant puisque, pour des durées d'observation supérieures à 20 minutes, les écarts croissent peu en éloignement et sont surtout bien modélisables [Molle, 2005].

Dans d'autres cas, l'absence de données

exogènes nécessite la construction de modèles géométriques de retards ionosphériques et troposphériques à partir des retards déterminés sur chaque station du réseau, le nombre de paramètres de ces modèles croissant proportionnellement avec le nombre de stations. Les modèles surfaciques simples, triangles par triangles donnent déjà de très bons résultats et le fait de les étendre à plus de trois stations en réalisant un ajustement par moindres carrés permet de réduire les effets de bord tout en améliorant les interpolations hors maille, la contrepartie étant de lisser les résultats à l'intérieur du réseau [Fotopoulos, 2000] (cf. figure 6).

Le retard ionosphérique est alors le plus facilement modélisable car inversement proportionnel au carré de la fréquence.

L'équilibre à rechercher se situe donc entre la taille de la maille et le nombre de paramètres du modèle surfacique, un triangle de stations fixes de 70 km de côté (erreurs orbitales acceptables et limite de décorrélation spatiale des erreurs atmosphériques) avec des modèles simples à 3 paramètres aboutissant déjà à des précisions de positionnement de l'ordre de



**Figure 6. Modèle de correction ionosphérique plan ajusté sur 3 ou 5 stations. [Molle, 2005]**

■ ■ ■ quelques centimètres [Molle, 2005].

A l'inverse, un modèle unique pour un réseau entier doit comporter un nombre plus important de paramètres, l'idée générale consistant à effectuer un développement limité d'ordre 2 ou 3 du modèle surfacique [Fotopoulos, 2000] (cf figure 7).

La qualité des modèles repose également sur leur stabilité dans le temps et plus le modèle est paramétré finement, plus sa stabilité est caractérisée. Les résultats témoignent, pour des triangles de 70 km de côté avec des modèles à 3 paramètres, de durées de stabilité pouvant atteindre la minute pour les erreurs ionosphériques [Molle, 2005], les valeurs standards de rafraîchissement des modèles ionosphériques et troposphériques proposées par le comité RTCM66 (2002) étant de respectivement 2 et 30 secondes [Euler, 2004]. Les modèles troposphériques, plus complexes, suivent les mêmes logiques mais nécessitent souvent plus de données en entrée dans la mesure où ils dépendent des conditions météorologiques des basses couches atmosphériques (modèles de Hopfield, Goad et Goodman ou encore Saastamoinen pour les plus utilisés).

Du point de vue des implémentations existantes, la solution GNSMART de chez GEO++ s'appuie sur la modélisation d'un vecteur d'état du système tandis que la solution GPSNet utilise les orbites ultra rapides prédites, un polynôme à 2 paramètres (latitude de l'utilisateur et angle zénithal du soleil) pour modéliser les erreurs ionosphé-

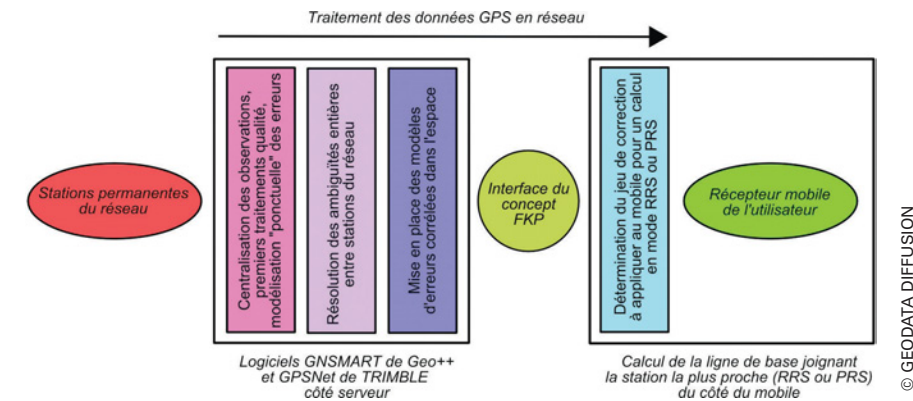


Figure 8. Schéma de principe du concept FKP modifié d'après Euler [2005].

riques, les erreurs troposphériques étant estimées à partir d'un modèle géométrique de Hopfield modifié.

Une autre approche consiste à prendre en compte la variation spatiale des erreurs corrélées dans l'espace par l'intermédiaire de corrections surfaciques ou FKP pour *Flächenkorrekturparameter* (cf. figure 8). Cette méthode consiste à créer autour de chaque station du réseau une surface plane correspondant à la variation de l'erreur autour de cette station, les pentes de cette surface étant déterminées à partir des observations sur les stations voisines. Pour déterminer les corrections à appliquer à sa mesure, le récepteur du mobile a seulement besoin de récupérer les coefficients de pentes pour les erreurs dispersives et non dispersives, ces derniers pouvant être transmis par radio. Pour plus de précisions, vous trouverez également des compléments dans la version plus complète de cet article librement téléchargeable sur le site [www.orpheon.biz](http://www.orpheon.biz).

icients de pente étant véhiculés par la composante 59 du message RTCM.

## Interpoler les erreurs et diffuser un jeu de corrections et/ou d'observations

Les modèles de propagation des erreurs mis en place, qu'il s'agisse de corrections de différences de phase, de plans ou encore de surfaces polynomiales prenant en considération plus ou moins de stations, reste à calculer la position du mobile par double différence. Plusieurs stratégies sont alors envisageables en fonction de la nature unie ou bidirectionnelle du lien de communication reliant l'utilisateur au réseau.

En effet, si le récepteur mobile est capable d'envoyer sa position approchée en mode naturel via la trame GGA du message NMEA (GSM ou mieux pour des raisons économiques par Internet via GPRS à travers le protocole NTRIP (*Networked Transport of RTCM via Internet Protocol*)), il est possible de générer une station virtuelle à proximité de l'utilisateur qui lui servira de référence pour se positionner par double différence, la ligne de base utilisée étant toujours très courte afin de limiter les erreurs résiduelles corrélées dans l'espace.

Le principe de ce mode VRS (*Virtual Reference Station*, ©TRIMBLE) va en fait consister à générer les données d'observations qu'il serait effectivement possible d'observer à l'endroit de l'initialisation du mobile en y plaçant une station de référence bien réelle (cf. figure 9). Connaissant les coordonnées de la station du réseau la plus proche, les coordonnées des satellites

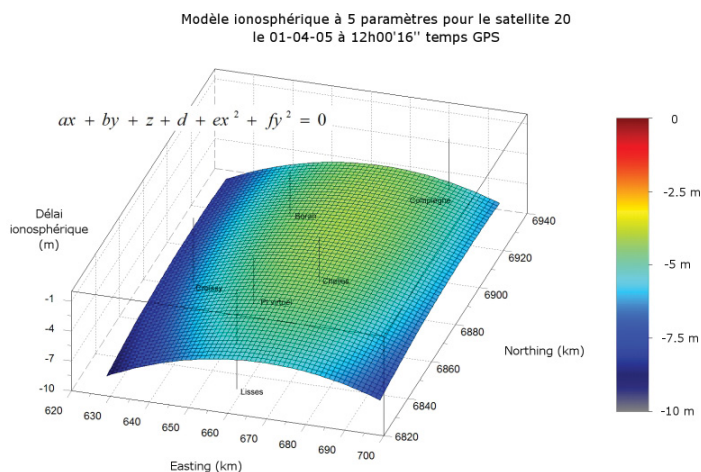


Figure 7. Modèle ionosphérique à 5 paramètres. [Molle, 2005]



nées de la station du réseau la plus proche, les coordonnées des satellites en vue à cet instant ainsi que les coordonnées de cette station virtuelle, la construction des observations (pseudo distances et phases) revient à faire la somme de deux vecteurs en prenant en compte les erreurs dispersives et non dispersives précédemment modélisées.

A partir des données d'observation de cette station virtuelle (messages RTCM 3 et 18, 19 ou 20, 21), le récepteur mobile est alors en mesure de calculer sa position par double différence sans même savoir qu'il s'agisse d'une station virtuelle, rendant la solution parfaitement compatible avec tous les récepteurs du marché, même les plus anciens. Or ce qui peut s'avérer être un avantage non négligeable peut également se transformer en inconvénient dans certains cas dans la mesure où la ligne de base utilisée peut parfois être tellement courte que certains mobiles pourraient ne pas calculer correctement les résidus des erreurs corrélées dans l'espace calculés de manière stochastique (réduction du nombre de mesures servant à approximer la résultante des erreurs modélisée par méthodes de Monte Carlo, ces méthodes reposant sur la loi des grands nombres pour approcher la vraie valeur d'un phénomène observé pour lequel il n'existe pas de formule fermée, mais uniquement des approximations numériques.)

Dans les dernières versions de la solution GPSNet, les coordonnées de la station la plus proche (contexte réseau) sont ainsi également envoyées au mobile via la composante 59 du message RTCM dans un mode intitulé "VRS High Precision" pour palier ce problème.

Dans la solution GNSMART, une station virtuelle peut être créée sur le segment de droite reliant la station la plus proche à la position de l'initialisation du mobile à une distance de l'utilisateur paramétrable par le gestionnaire du réseau (mode PRS pour *Pseudo Reference Station*), le problème se posant alors de savoir quelle distance utiliser (a priori entre 5 et 10 km), étant entendu qu'il est également possible de travailler en mode RRS (*Real Reference Station*) à partir de la station la plus proche.

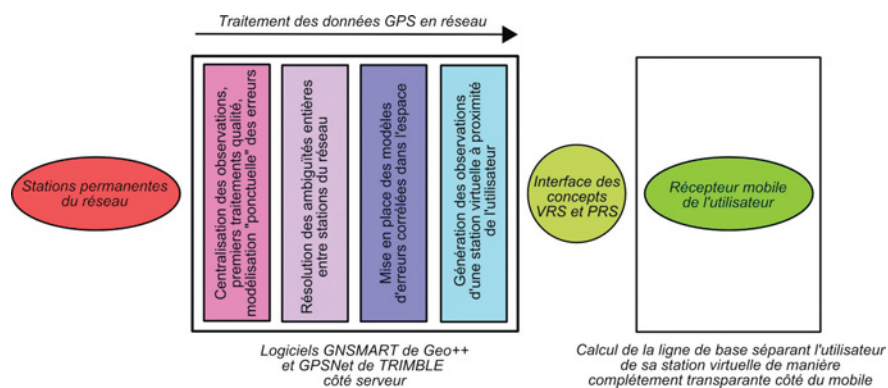


Figure 9. Schéma de principe du concept VRS modifié d'après Euler [2005].

Dans la solution SpiderNET, le RTCM 2.3 ne permettant pas d'envoyer les corrections de différences de phases, une solution transitoire dénommée "*i-Max*" a été mise au point. Le mobile commence alors par envoyer sa position au système qui lui attribue une cellule de 6 stations, la station maîtresse étant définie comme étant la plus proche de l'utilisateur. Les erreurs dispersives et non dispersives sont alors modélisées sur la position du mobile par interpolation des corrections de différences de phases calculées pour cette cellule et les observations de la station maîtresse sont ensuite modifiées afin de prendre en compte ces erreurs dans le calcul de la ligne de base la reliant à l'utilisateur.

## Synthèse et conclusion

Comme expliqué dans cet article, plusieurs approches sont possibles pour traiter la phase des signaux GNSS en réseau suivant que l'interface utilisateur, c'est-à-dire le lien de communication permettant de fournir les corrections et/ou données d'observation d'une station virtuelle (VRS, PRS) ou réelle (RRS), soit plus ou moins en amont de la chaîne de traitement décrite figure 2 pour calculer une position centimétrique.

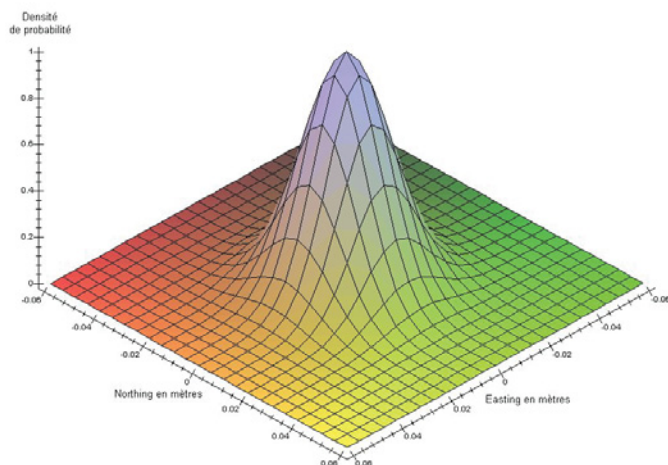
Il s'agit vraiment d'une issue importante, au moins en terme d'interopérabilité, dans la mesure où plus l'interface utilisateur du réseau sera en aval de cette chaîne de traitement, plus l'intelligence se situera du côté du serveur et moins la solution sera ouverte.

En effet, si la structure du message 59 RTCM servant à diffuser des informations propriétaires (paramètres FKP,

mode VRS HP) est parfaitement connue de tous afin que chaque constructeur de matériel GPS puisse lire ce message et rendre son matériel compatible avec une solution donnée, seul l'éditeur du logiciel connaît le détail des calculs effectués et peut donc proposer une solution cohérente à ses clients. C'est pour cette raison que la solution MAC, seule à être normalisée par le comité RTCM 3.0, se limite à résoudre les ambiguïtés entières sans s'occuper de paramétrer la moindre surface d'interpolation afin de laisser toute l'intelligence du traitement au mobile, et donc à la sagacité des constructeurs de matériels.

Pour pousser la réflexion un petit peu plus loin, le jour où les médiums de communication seront suffisamment performants pour l'autoriser, nous pourrions même envisager de directement transférer les données d'observations des stations du réseau au mobile pour lui laisser toute la charge du calcul, ce qui nécessiterait d'ailleurs d'y embarquer des moyens de calcul plus conséquents que ce que nous trouvons actuellement, ou a contrario de récupérer les observations du mobile pour ne lui renvoyer qu'une position centimétrique (augmentation de la charge de calcul côté réseau cette fois-ci).

Quoi qu'il en soit, tout le monde s'accorde aujourd'hui sur le fait qu'il soit possible d'atteindre une précision constante voisine de 2 cm en planimétrie et 3 cm en altimétrie (cf. figure 10), quelle que soit la solution utilisée et la marque du récepteur pourvu que la distance entre les stations du réseau ne dépasse pas les 70 km (limite de corrélation spatiale des sources d'erreurs atmosphériques), d'où l'intérêt manifeste pour



© GEODATA DIFFUSION

**Figure 10.** 16 septembre 2004: PARIS - Point RBF "La Vilette" (point A du site 7505603) - mode VRS - 160 mesures indépendantes de 3 époques - Résultats à  $1\sigma$  : 0,8 cm en X et 1,3 cm en Y (coordonnées géographiques Lambert 93) et 2,4 cm sur l'altitude IGN69

■ ■ ■ tiale des sources d'erreurs atmosphériques), d'où l'intérêt manifeste pour l'utilisateur (simplicité d'utilisation accrue, limitation considérable des coûts dans un rapport d'au moins deux relativement au mode RTK "classique") et donc indirectement pour une véritable démocratisation de l'utilisation de l'information géographique dans tous les domaines d'activité où la composante spatiale est importante (aménagement, travaux publics, VRD, environnement etc.). ●

## Contacts

**Romain LEGROS**, Ingénieur Géographe ENSG, Maître spécialisé d'Architecture des Systèmes d'Information Géographiques (ENSG), DESS d'Application de l'informatique aux Sciences de la Terre (Paris VI, ENSG) - Responsable du projet ORPHEON

**Frédéric MOLLE**, Ingénieur Géographe ENSG, Maître spécialisé de Photogrammétrie, Positionnement et mesures de Déformation (ENSG), Ingénieur Ecole de l'air. Officier de l'armée de l'air, Directeur Technique adjoint de l'Établissement de Production des Données Géographiques (EPDG) - Stagiaire de fin d'étude sur le projet ORPHEON

**Nicolas BALARD**, Ingénieur ETP, Maîtrise au Centre de Recherche en Géomatique de l'Université LAVAL (Canada) - Enseignant-chercheur au Laboratoire de Topographie

à l'Ecole Spéciale des Travaux Publics du Bâtiment et de l'Industrie (ESTP)

## Bibliographie

**Euler, H.-J., S. Seeger, O. Zelzer, F. Takac, B.E. Zebhauser** (2004) - *Improvement of Positioning Performance Using Standardized Network RTK Messages* - Published in proceedings of ION NTM, January 26-28, 2004, San Diego, California, USA.

**Euler, H.-J., R. Keenan, B. Zebhauser, G. Wübbena** (2001) - *Study of a Simplified Approach in Utilizing Information from Permanent Reference Station Arrays* - Published in proceedings of ION GPS 2001, September 11-14, 2001, Salt Lake City, Utah, USA.

**Fotopoulos, G.** (2000) - *Parameterization of DGPS Carrier Phase Errors over a Regional Network of Reference Stations* - Thesis submitted to the faculty of graduate studies in partial fulfilment of requirements for the degree of master science, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Alberta, Canada

**Hong Diep Dao, T.** (2005) - *Performance Evaluation of Multiple Reference Station GPS RTK for a medium Scale Network* - Thesis submitted to the faculty of graduate studies in partial fulfilment of requirements for the degree of master science, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Alberta, Canada

**Kim, D., R.B. Langley** (2000) - *GPS Ambiguity Resolution and Validation: Methodologies, Trends and Issues* - Presented at the 7th GNSS Workshop - International Symposium on GPS/GNSS,

November 30 - December 2, 2000, Seoul, Korea

**Legros, R.**, (2005) - *Quelques brefs rappels sur le positionnement de précision par méthodes GNSS - Application au système GPS* - White Paper ORPHEON, Lisses, France.

**Molle, F.**, (2005) - *Evaluation de la précision globale d'un positionnement GPS en réseau* - Rapport de stage de fin d'études, Maître spécialisé de Photogrammétrie, Positionnement et Mesures de Déformations, Cycle des Ingénieurs Géographes de l'ENSG, Champs-sur-Marne, France.

**Wübbena, G., A. Bagge** (2002) - *RTCM Message Type 59-FKP for transmission of FKP-Geo++* - White Paper Geo++, Garbsen, Germany

**Wübbena, G., A. Bagge** (2002), **M. Schmitz** (2001) - *RTK Networks based on Geo++ GNSMART - Concepts, Implementation, Results* - Presented at the International Technical Meeting ION GPS, 2001, September 11-14, 2001, Salt Lake City, Utah, USA.

## Sites Web

<http://www.igsb.jpl.nasa.gov>

<http://www.orpheon.biz>

## ABSTRACT

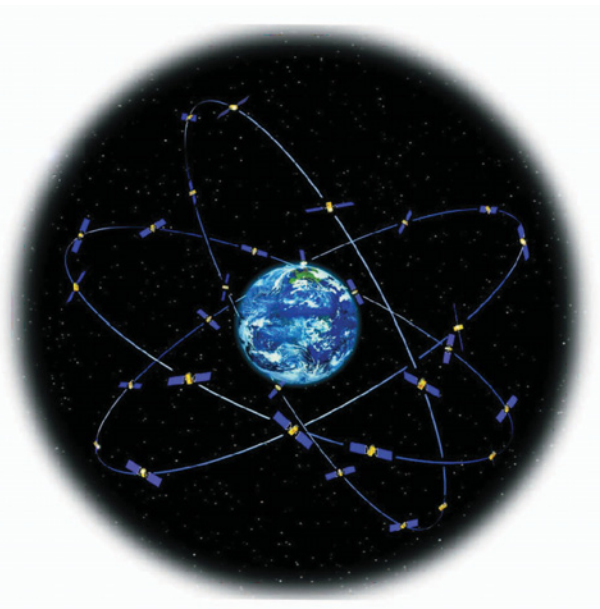
*Since the 80's and GPS's emergence, researches in the field of GNSS techniques became more and more important and it's nowadays possible to obtain very simply a set of coordinates with a centimeter level in real time through a network of reference stations to resolve RTK problems principally due to bad modeling of space dependent errors existing on the baseline used. In a general approach, it consists to calculate ionospheric, tropospheric and ephemerid errors on each station before propagate those errors in all the network (plan, polynomial or interpolation models) and broadcast necessary data to users (corrections and/or observations) to obtain precise positioning by double difference with various methods. At this very present time where country will be covered by those kind of networks (ORPHEON, TERIA etc.), this issue is very important to democratize the access, and so the use, of geographical information.*



# La modernisation du GPS

■ Bryn FOSBURGH - Bruce PEETZ

*La technologie évolue et ce faisant, influence nos méthodes de travail. Ainsi, lorsque le GPS devint accessible aux géomètres, au début des années 1980, personne n'imaginait la place prépondérante qu'il occuperait un jour dans leur équipement. Les premiers récepteurs GPS destinés aux topographes étaient encombrants (de la dimension d'une valise), devaient être transportés sur des véhicules et la réception des signaux des satellites n'était possible que durant quelques fenêtres horaires dans la journée. Avec ses récepteurs de la taille de téléphones portables et ses signaux disponibles en continu dans la plupart des régions du monde, le système GPS d'aujourd'hui semble bien futuriste, en comparaison. Et il l'est, en vérité.*



Dans l'espace – à 20 200 kilomètres de notre planète – les 10 satellites initiaux du Bloc I, lancés entre 1978 et 1985, ont été remplacés par 24 satellites du Bloc II, lancés entre 1989 et 1997, et 5 satellites du Bloc IIR (réapprovisionnement) lancés depuis 1997. La constellation actuelle de 29 satellites comprend 20 satellites du Bloc II et 9 satellites du Bloc IIR. Et elle va prochainement connaître des modifications importantes dans le cadre d'un programme dit de "modernisation du GPS" financé par le gouvernement américain. La modernisation du GPS sera source d'avantages appréciables pour les professionnels de la topographie, de la cartographie et du BTP mais bénéficiera aussi à d'autres types d'utilisations civiles du système, comme la navigation aérienne, maritime et terrestre, l'agriculture ou la gestion de biens d'équipement. Les mesures seront alors plus précises et plus robustes, la productivité croîtra et la technologie des récepteurs pourra connaître des progrès considérables. Aujourd'hui, les utilisateurs du GPS sont à l'aube d'une époque passionnante. Pour bien comprendre les enjeux de la modernisation du GPS, il est utile de nous souvenir d'où nous venons - et pourquoi. Nous nous limiterons ici à la composante civile du processus de modernisation du GPS.

La constellation GPS Développé en 1973 par le ministère de la défense des Etats-Unis (DOD) pour son propre usage, le système GPS fournit des signaux de positionnement, de synchronisation et de navigation à des utilisateurs militaires et civils dans le monde entier. Chaque satellite émet deux signaux – L1 et L2 – incluant chacun des codes pseudo-aléatoires dont se déduisent les informations de positionnement, de synchronisation et de navigation. Grâce à ces codes, les récepteurs GPS peuvent poursuivre simultanément plusieurs signaux de satellites différents, puis procéder à des calculs

délivrant des informations de position précises, en tout endroit du globe et à tout moment. Le signal L1, radiodiffusé à 1575,42 MHz, met le code C/A (coarse acquisition) à la disposition de tous les utilisateurs ; le signal L2, auquel est associé le code P/Y, est émis à 1227,6 MHz et est réservé à un usage militaire.

Au départ, les récepteurs commercialisés pour des applications topographiques étaient monofréquences, n'utilisant que le signal L1, civil, pour les observations. Un post-traitement des mesures effectuées par ces récepteurs monofréquences était donc nécessaire pour obtenir une précision de positionnement de niveau topographique. Les scientifiques et les topographes ont cependant uni leurs efforts et sont parvenus, en l'espace d'une décennie, à développer des possibilités d'utilisation du signal militaire L2 codé ; des méthodes innovantes ont ainsi été mises au point pour exploiter les informations du code L1 de sorte que le signal L2 puisse être utilisé de façon optimale. Les récepteurs bifréquences ont alors pu déterminer l'heure d'arrivée de deux signaux et corriger les mesures des erreurs ionosphériques et troposphériques commises durant le trajet parcouru. Les récepteurs bifréquences étaient initialement réservés aux mesures sur de longues distances, avant de servir aux mesures en temps réel, en raison des progrès technologiques accomplis.

Si ce mode d'exploitation de L2 conduit à des résultats probants, les mesures qui en découlent présentent un niveau de bruit supérieur à celles résultant d'une utilisation directe du signal L1. Et les travaux sur de longues distances en deviennent donc plus ardues. Aussi, le recours à une autre option était nécessaire pour obtenir des réponses plus robustes avec des récepteurs bifréquences : lancer la modernisation du GPS.



Trimble R3 (Antenne Zephyr avec carnet Recon, logiciel Trimble Fieldbook).

### ■ ■ ■ M = Modernisation

En 1998, le gouvernement des Etats-Unis a officiellement annoncé qu'un effort de modernisation allait être entrepris afin d'étendre les possibilités du système GPS. La modernisation du GPS, étalée sur plusieurs années, allait se traduire par l'adjonction de deux nouveaux signaux d'une intensité supérieure pour les utilisateurs civils et par des fonctions avancées et de nouveaux signaux pour répondre aux besoins militaires.

Le premier des nouveaux signaux civils ajoutera un nouveau code à usage civil (baptisé CS, Civil Signal) sur L2, désigné par l'abréviation L2C. Les récepteurs seront ainsi en mesure d'accéder à deux signaux "propres" pour les corrections d'erreurs requises par les fonctions RTK (cinématique en temps réel) de pointe. Le signal L2C inclura également un code plus sophistiqué que les récepteurs de technologie actuelle seront capables d'exploiter, délivrant des résultats potentiellement plus robustes. Le signal L2C sera radiodiffusé à un niveau d'intensité supérieur à celui du signal L2 actuel, mais légèrement inférieur à celui du signal L1.

Le lancement du premier satellite intégrant cette technologie sophistiquée - Bloc IIR-M (modernisé) - s'est effectué le 26 septembre dernier. Les satellites du bloc IIR-M ont été "modernisés" par l'intégration du nouveau code civil et de deux nouveaux codes militaires ; le DOD prévoit de moderniser jusqu'à 12 satellites du Bloc IIR actuellement en phase de stockage. Il s'agit là de la première étape d'une série d'avancées bien planifiées en matière de technologie des satellites.

## L5

L'autre nouveau signal civil, baptisé L5, constituera une totale nouveauté ; radiodiffusé à 1176,45 MHz, L5 sera émis à un niveau d'intensité plus élevé que les autres signaux. Il présentera aussi une largeur de bande supérieure, permettant des codes plus longs facilitant l'acquisition et la poursuite de signaux de faible intensité. L5 n'ayant pas pu être intégré sur les satellites du Bloc IIR-M, une quatrième génération de satellites du Bloc II, intitulée Bloc IIF, est en cours de développement. Ces nouveaux satellites du Bloc IIF disposeront de toutes les fonctions modernisées des

satellites du Bloc IIR-M et en plus, du troisième signal civil, L5. Le lancement du premier satellite IIF est prévu pour 2006.

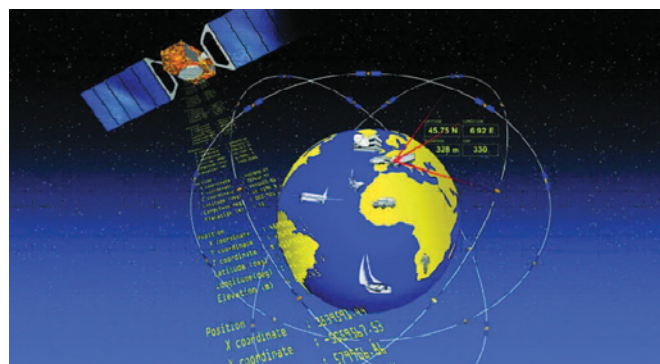
## Quel profit les topographes peuvent-ils en retirer ?

En adjoignant le signal civil L2C à la constellation, le DOD adresse un message fort aux utilisateurs civils, en particulier aux géomètres. Ces derniers ont exploité le signal L2 plus que tout autre utilisateur civil afin d'atteindre une précision de niveau centimétrique en RTK. En intégrant un signal civil sur ce qui était prévu pour être un canal strictement militaire, le DOD reconnaît le poids et l'influence de la communauté des utilisateurs civils dont les géomètres constituent un groupe très important. Aujourd'hui, le GPS ne peut vraiment plus être considéré comme un système principalement militaire. Si les récepteurs actuels rempliront leur mission comme auparavant – le système GPS modernisé ayant été conçu dans l'optique d'une totale compatibilité descendante pour les équipements GPS existants voire plus anciens des utilisateurs –, la technologie dont sont équipés les nouveaux récepteurs désormais commercialisés permettra aux topographes de tirer avantage des nouvelles possibilités offertes dès leur mise en service.

Et aujourd'hui ? La majorité des géomètres acquérant leurs équipements en vue de les utiliser durant plusieurs années, ceux d'entre eux envisageant des achats dans un futur proche peuvent tenir compte de cet état de fait et protéger leurs investissements pour quelques années. Les nouvelles solutions disponibles actuellement peuvent potentiellement accroître leur productivité de façon considérable : il est primordial de garantir qu'un équipement acquis aujourd'hui - que ce soit pour une utilisation sur le terrain ou dans le cadre d'une infrastructure - intègre déjà la technologie permettant de tirer profit des possibilités offertes demain par le signal L2C.

## Utilisations concrètes

L'institut des sciences géologiques et nucléaires (GNS) néo-zélandais a récemment décidé d'acquérir des instruments supplémentaires pour étendre ses réseaux GPS continus (CGPS) implantés sur les îles du Nord et du Sud de la Nouvelle-Zélande. Les considérations relatives à la modernisation du GPS ont lourdement pesé dans la décision prise



Satellite Galileo.



d'opter pour 40 récepteurs GPS de type CORS (stations de référence en fonctionnement continu) prêts pour L2C. *"Le GNS avait besoin d'un récepteur adapté pour des sites éloignés fonctionnant à l'énergie solaire, présentant une faible consommation électrique et une interface de communication Internet à base Linux"* précise John Beavan, docteur en géophysique, l'un des responsables du projet au sein du GNS. *"En outre, les récepteurs NetRS Trimble de la prochaine génération seront capables d'exploiter les possibilités offertes par les nouveaux signaux GPS civils, ce qui les rend idéaux pour une utilisation dans le cadre de projets à long terme."*

Le département des transports de l'Ohio (Etats-Unis) a pris une décision similaire en choisissant des récepteurs GPS de type CORS prêts pour L2C pour le réseau de stations de référence virtuelles (VRS) qu'il met en place. Les stations de référence d'un réseau d'infrastructure étant d'ordinaire implantées à demeure sur un site et n'étant donc pas aussi aisées à déplacer qu'un simple récepteur mobile, les topographes et les scientifiques investissant dans des composants d'infrastructure GPS pourront tirer un profit encore supérieur d'une technologie d'ores et déjà prête pour la modernisation du GPS.

## Autres avancées en cours

Il est fort probable que les géomètres bénéficient également d'autres développements dans les années à venir en matière de technologies de positionnement, à base spatiale ou non. Car outre la modernisation du GPS désormais imminente, le programme Galileo conduit conjointement par la Commission européenne (CE) et l'Agence spatiale européenne (ESA) progresse lui aussi, sa mise en service devant intervenir vers la fin de la décennie. Ces programmes promettent tous deux d'accroître la productivité et d'ouvrir de nouvelles perspectives encore insoupçonnées actuellement. Conscients de ces potentialités, les fabricants investissent constamment dans la recherche et le développement afin d'être prêts à utiliser chacune de ces technologies dès sa mise en service.

De plus, les nouvelles solutions résultant de la combinaison de systèmes de navigation inertielle (INS) et de systèmes à base de satellites tels que GPS et Galileo fourniront des performances optimales aux utilisateurs au sein d'une large gamme d'environnements et d'applications. L'alliance du GPS et de la navigation inertielle devrait permettre de proposer un positionnement

robuste en RTK dans des situations dans lesquelles la réception des signaux des satellites GPS est ardue (dans les centres urbains, aux abords d'immeubles élevés ou dans des zones fortement boisées). Les fabricants cherchent à développer des produits intégrant la technologie inertielle et susceptibles de profiter aussi bien aux géomètres qu'à d'autres utilisateurs.

## GPS III

Du fait du temps requis pour développer une nouvelle génération de satellites, le DOD mène dès aujourd'hui une réflexion sur le système à l'horizon 2030. Actuellement, une équipe de scientifiques conduit des recherches portant sur la prochaine génération de satellites, baptisée GPS III. Dans l'état actuel des choses, le GPS III devrait comporter peu d'améliorations par rapport au système IIF pour les utilisateurs civils. Le principal avantage que les géomètres devraient en retirer est le renouvellement progressif de la constellation par des satellites aptes à émettre le signal L5 avec un réapprovisionnement en continu du système jusqu'en 2030. Si l'on s'en tient toutefois à l'usage que les topographes ont fait du GPS depuis ses débuts, il semble bien difficile de prévoir les progrès que la technologie des récepteurs est susceptible de connaître d'ici à cette date ou les avantages imprévus et les nouvelles applications qui peuvent en découler pour les topographes. Tout est possible. Réellement. ●

**Bryn Fosburgh** est vice-président de la division Géomatique & Génie civil de Trimble.

**Bruce Peetz** est vice-président de la division des technologies et des systèmes avancés chez Trimble.

## Contact

**Emmanuelle TARQUIS**

MarCom Specialist  
Survey Division Europe  
[www.trimble.com](http://www.trimble.com)



Trimble R8.

## ABSTRACT

*Technology changes, impacting the way we work. In the early 1980s, when the Global Positioning System (GPS) first became available to surveyors, no one knew it would become such an integral part of a surveyor's toolbox. The first GPS receivers for surveyors were as large as suitcases and had to be transported in trucks - and satellite signals were only available during a few windows of time each day. GPS Modernization offers significant benefits to surveyors, mappers and construction workers- as well as other civilian users of the system, including aviation, marine and automobile navigation, agriculture and asset management. Increased accuracy and robustness of measurements, enhanced productivity and the potential for extensive advances in receiver technology lie just ahead. It's an exciting time for GPS users.*

■ par Raymond D'HOLLANDER

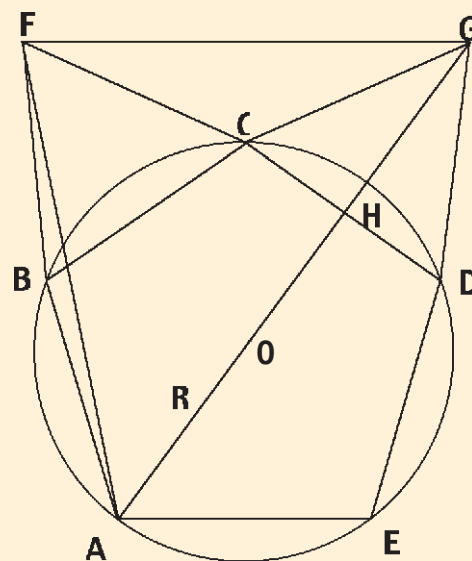
On considère un pentagone régulier convexe  $ABCDE$ , inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . A l'extérieur du pentagone on construit sur le côté  $BC$  le triangle équilatéral  $BCF$ , et sur le côté  $CD$  le triangle équilatéral  $CDG$ . On joint  $AF$ ,  $FG$  et  $GA$ , matérialisant ainsi le triangle  $AFG$ .

On demande de calculer les angles de ce triangle et les longueurs de ses côtés en fonction de  $R$ .

On pourra se reporter à l'article de XYZ n° 102 : "Le nombre d'or et la divine proportion", où l'on trouvera les valeurs du côté de l'apothème du pentagone régulier convexe (pages 55 à 58).

**Application numérique : si  $R = 4$  cm calculer les longueurs des côtés au dixième de millimètre près.**

*Solution dans le prochain numéro de XYZ.*



## Le Caousou - Toulouse

### BTS Géomètre - Topographe

Les inscriptions sont ouvertes à partir de janvier 2006

- ➔ Recrutement post Baccalauréat (série S, STI Génie Civil) sur dossier.
- ➔ Entraînement aux examens et concours.
- ➔ Internat permanent filles et garçons.

### 3<sup>ème</sup> année de préparation à l'ESGT

Un minimum de 12 candidats admis est nécessaire pour l'ouverture de cette classe hors contrat.

- ➔ Recrutement post BTS Géomètre Topographe sur dossier.
- ➔ Dossiers à retirer dès janvier 2006.

**Journée Portes ouvertes : Samedi 18 mars 2006**

**Le Caousou**



Etablissement d'enseignement privé sous contrat d'association  
42, Av. Camille Pujol - Enseignement Supérieur - BP 15210 - 31079 TOULOUSE Cedex 5  
Tel : 05.62.47.48.43. - Fax : 05.62.47.48.50.  
Site internet : [www.caousou.com](http://www.caousou.com) - Email : [d-hombourg@caousou.com](mailto:d-hombourg@caousou.com)



# L'extraction des racines carrées dans le manuscrit de l'arpenteur arlésien Bertran Boysset (~1350 - 1415)

■ Magdeleine MOTTE

*L'auteur du manuscrit 327 de la Bibliothèque Inguimbertaine de Carpentras – dit "Traité d'Arpentage" – l'arpenteur arlésien Bertran Boysset, qui écrit en provençal, a donné, pour plus de cent superficies, décrites à la fois par leur mesure en unité agraire, la séterée, et en unités linéaires d'Arles (destre de 16 palms), la mesure en destre, palm et fraction de palm, du côté du carré équivalent. Il a donc calculé plus de cent racines carrées. Comme il a souvent précisé le défaut ou l'excès des carrés, nous pouvons déduire de l'examen des données numériques : la méthode utilisée, celle de Héron, la précision qu'il recherchait ( $\pm 1 \text{ m}^2$  et les calculs approchés qui ont facilité ses calculs. Nous avons là un témoignage du passage de la méthode de Héron des mathématiciens aux utilisateurs à une date plus haute (avant 1415) que celle avancée jusque ici (XVI<sup>e</sup> siècle).*

**A**u XIV<sup>e</sup> siècle le travail de l'arpenteur provençal ne consiste pas seulement à mesurer les superficies des biens vendus, échangés ou lotis. Un travail important de mise en valeur de domaines en friche, voire de parcours pastoraux, va exiger de lui de *metre per quasens* (en quartiers) ces terres et, par conséquent, de calculer au préalable le côté des lots carrés auxquels le seigneur, ou les co-seigneurs, ont assigné telle superficie. C'est pourquoi plusieurs folios du manuscrit de Bertran Boysset (B.M. Carpentras, n° 327) sont consacrés à donner en destres les mesures des côtés de carrés dont les superficies sont, dans l'usage, comptées en séterées.

## Unités d'Arles du XIV<sup>e</sup> au XVIII<sup>e</sup> siècle<sup>(1)</sup>

**de longueur** : 1 destre = 2 canne = 16 palm (d = 2c = 16p)

**de superficie** : d<sup>2</sup>, dp (nommée palm carré), p<sup>2</sup> (palm simple)

**agaires** : l'éminée, la séterée, la carterée pour les vignes  
1 séterée = 2 éminée = 625 c<sup>2</sup> = 156d<sup>2</sup> 4dp



Nous trouvons dans ces folios 200 résultats numériques : les surfaces mesurées en séterées (par les entiers de 1 à 100 et les fractions binaires de 1/2 à 1/128) sont converties en unités d'arpentage (d<sup>2</sup>, dp) et, pour chacune d'elles, est donné le côté du carré équivalent avec, parfois, le défaut ou l'excès de surface qu'aurait le carré construit sur le côté proposé. Boysset a donc calculé 107 racines carrées. Sur les 85 que j'ai contrôlées, soit à la plume, soit à la calculette, 69 sont justes et 14 fausses, dont 8 probablement par erreur de copie. Dans deux cas – 48 et 50 séterées – il y a incertitude, car la fraction de palm manque.

(1) La canne d'Arles mesurait 2,047 186 m ; 175 palms mesuraient le côté du carré unité agraire des "peuples des mégalithes", soit 54 "mégalithic yard" ou "mètre mégalithique". Cette unité était une des séterées de l'Aveyron jusqu'à l'introduction du système métrique (cf. Motte Magdeleine, La Cana e lo destre : essai d'histoire métrologique des Pays occitano-catalans. à paraître).

■ ■ ■ Mais, c'est la possibilité de connaître la méthode de calcul utilisée par cet artisan, à la fin du XIV<sup>e</sup> siècle, qui fait l'intérêt de ces pages.

Pour la commodité de l'exposé rappelons :

**T<sub>1</sub>**, si  $a$  est une racine carrée par défaut, à une unité près, de l'entier  $A$ , c'est à dire  $a^2 < A < (a+1)^2$ , laissant un reste ( $r = A - a^2$ ), alors  $[a + r/(2a+1)]$  est aussi racine carrée par défaut de  $A$ .

**T<sub>2</sub>**, si  $a$  est une racine carrée par excès, à une unité près, de l'entier  $A$ , c'est à dire  $(a-1)^2 < A < a^2$ , laissant un reste ( $r = A - a^2$ ), alors  $[a + r/(2a)]$  est aussi racine carrée par excès de  $A$ .

Par itération  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) fournit une suite croissante (resp. décroissante) convergeant vers  $\sqrt{A}$ .

L'usage de  $T_2$  est bien attesté au Moyen Âge<sup>(2)</sup>. Du procédé  $T_1$  J. Sésiano écrivait en 1988 : *"on considère qu'il a du être utilisé par les Grecs, mais les textes attestant de son emploi n'apparaissent qu'au X<sup>e</sup> siècle, chez les Arabes. On ne le trouve pas en Europe au XI<sup>e</sup> siècle, ou dans l'œuvre de Léonard de Pise. Et, en dépit d'une occurrence précoce dans un manuscrit (B.M. Colmar) écrit autour de 1300, il apparaît que ce procédé n'est entré dans l'usage commun qu'au XVI<sup>e</sup> siècle"*

Je me propose de montrer que l'étude des folios 66 à 87 permet d'assurer que Boysset utilisait  $T_1$ , tout en sachant minorer par la soustraction de  $[r/2a]$  lorsqu'il avait été amené à retenir une v.a.e<sup>(3)</sup> visiblement plus proche de la racine. On peut donc avancer d'un siècle et demi l'entrée de  $T_1$  dans l'usage commun, si l'on remarque que Boysset l'a probablement appris de ses maîtres vers 1360-1365, ou guère plus tard, lors de son séjour à Avignon. Il restera à préciser le cheminement de la connaissance, des Arabes (de l'Espagne ?) vers la Provence.

On observe que les mesures des côtés des carrés étudiés sont données, en destre et palm, par trois entiers positifs  $x, y, z$  sous la forme : côté =  $xd, yp/4, \pm 1/zp$ . Le second terme souligne un arrondi proche, bien visible sur les graduations du destre d'arpentage<sup>(4)</sup>.

Je ne détaillerai pas les observations qui permettent d'assurer que Boysset recherchait une précision négligeant au plus une surface de un "palm carré", soit  $pd = d^2/16 \approx 1,05 m^2$ .

J'appelle 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> étape, respectivement, la recherche de  $x, y, z$ . Deux lignes ajoutées par Boysset au paragraphe consacré à **7 séterées** retiennent l'attention. Après avoir donné la v.a.p.d. 33d 1p 1/7p et le défaut *"il manque alors au carré 3 parties d'un palm, faisant 7 parties d'un palm"*, il ajoute *"si tu les veux fais de ces 3 parties 67 parties et ce sera fait; sinon restes-en là."*

Entendre : il manque au carré 3/7 dp ; pour les retrouver divise 3/7 par 67.

Dans 3/7 on reconnaît, très légèrement minoré, le reste laissé par la racine carrée approchée  $a$ , soit  $r_2 = 3/7dp + 48/49p^2$ .

Et dans 67, la mesure  $(2a+1)$  minorée :

$$2a+1 = 2(33+8/(7 \times 16))+1 = (67+1/7) \text{ destre}$$

On peut voir qu'il suggère ainsi l'accroissement de  $1/160 p$ , ce qui ramènerait le déficit à  $0,08dp$ .

Boysset utilise donc  $T_1$  ; le lecteur pourra vérifier qu'en utilisant  $T_2$  il aurait trouvé

$$34d - 14\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p = 33d + 1\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p$$

et, à la troisième étape, un reste de  $(-1dp)$  au lieu de  $3/7dp$ , donc une v.a.p.e. moins précise que la v.a.p.d. donnée par  $T_1$ . On peut également vérifier qu'il n'a pas cherché la racine carrée de l'entier mesurant cette superficie avec la plus petite unité disponible ( $p^2$ ) - soit 280 000. Avec  $T_1$  il aurait trouvé  $(529+3/20)p$ , c'est-à-dire  $(33d 1p 3/20p)$ . Il aurait pu, certes, substituer à  $3/20$  la fraction  $3/21$  et trouver ainsi  $1/7$ , mais il n'avait aucune raison de le faire ; l'examen de l'ensemble des résultats montre qu'il n'a privilégié aucun entier pour le choix de  $z$ . On relève, entre autres, les entiers 6, 7, 11, 17, 19, 43, 48.

Comme nous venons de le voir Boysset sait s'il donne une valeur approchée par défaut ou par excès ; il précise 50 fois le défaut ou l'excès de superficie. Au nombre des cas où ce para-

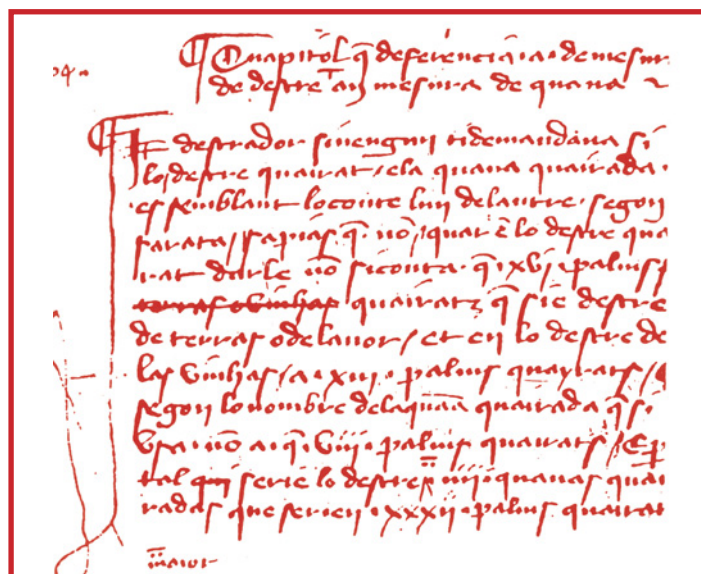
(2) Sésiano Jacques, "On an algorithm for the approximation of surds from a Provençal treatise" in Mathematics from Manuscript to Print (1300-1600), Clarendon Press, Oxford, 1988, pp. 30-55.

(3) Valeur approchée par excès ; v.a.p.d.... par défaut.

(4) Cette observation ne nous autorise pas à assurer qu'aucun des palms du destre ne portait huit graduations d'environ 3,2 cm. Les dessins du manuscrit montrent le destre avec 16 divisions peintes alternativement en noir et blanc.

	1093 d <sup>2</sup> 12 dp	33d 1p 1/7 p
	193	63 x 3 = 189      76/67 = 1 + 9/67
$r_1 =$	004 x 16 + 12 dp	(66 d 1 p) 1 p = 66 dp 1 p <sup>2</sup>
$r_1 =$	76 dp	$\frac{10 - 1/16}{67 + 1/8} \rightarrow \frac{10 - 1/16}{70 - 7/16} = 1/7$
$r_2 =$	10 dp - p <sup>2</sup> = (10 - 1/16) dp	(66 d + 15/7 p) 1/7 p = 9 dp + 3/7 dp + 15/49 p <sup>2</sup>
	- 10 dp + 4/7 dp - 15/49 p <sup>2</sup>	= 10 dp - 4/7 dp + 15/49 p <sup>2</sup>
$r_3 =$	4/7 dp - 64/49 p <sup>2</sup>	
$=$	3/7 dp + 48/49 p <sup>2</sup>	Calcul du côté d'un carré de 7 séterées par le procédé $T_1$





#### XIV de la différence entre la mesure avec le destre, long ou court et la mesure avec la canne

De plus, arpenteur, si quelqu'un te demandait si le calcul en destres carrés est semblable à celui en cannes carrées, toutes proportions gardées, sache que non.

Car le destre carré d'Arles ne contient que 16 empan carrés, qu'il s'agisse du destre des terres ou des labours.

Quant au destre des vignes il contient 13 empan carrés.

Et le mode de calcul avec la canne carrée, lorsqu'on l'utilise, veut qu'elle ne contienne que 8 empan carrés. Si bien que le grand destre vaut (alors) 4 cannes carrées ou 32 empan carrés.

C'est pourquoi retiens qu'il ne revient pas au même de mesurer en destres ou en cannes, car 16 empan carrés du grand destre ne valent que un empan carré et 13 empan carrés du petit font un empan carré (alors que) 8 empan carrés d'une canne valent un empan carré, d'après le calcul des charpentiers et des artisans.

graphe ne figure pas, on trouve les 12 cas de racine exacte, mais aussi des cas où l'écart, de l'ordre de  $p^2$ , est négligeable.

Comment Boysses a-t-il choisi l'entier  $z$  ? Un certain nombre de valeurs de  $z$  m'ont longtemps intriguée et j'ai pataugé avant de comprendre sa démarche, très sûre, pour substituer au quotient compliqué à considérer à la troisième étape un minorant de la forme  $1/z$ .

Observant le cas de 87 séterées, soit  $13593d^2$  12dp, pour lequel il donne un côté de  $116d$  ( $9\frac{1}{2}-1/43$ )p j'étais très surprise qu'il ne propose aucune des deux fractions  $1/41$ ,  $1/42$  que suggérerait le décimal donné par la calculette. Certes, en majorant  $z$ , et donc en minorant  $|r/2a|$ , il conservait une v.a.p.e. à peine moins précise.

En fait l'explication est très simple. Boysses ayant vu qu'il était intéressant de retenir la valeur par excès  $116d$   $91/2p$  devait, à la 3<sup>e</sup> étape, appliquer  $T_2$  en retranchant la valeur absolue du quotient  $r/2a$ , soit  $q = (5+5/8+1/64)/(233+3/16)$ , ou un de ses minorants. Sans calculette, il lui fallait être plus habile que moi, qui avais consciencieusement calculé

$$q = 361/14924 \approx 1/(41+123/361) > 1/42,$$

et il aura probablement choisi la minoration de  $q$  par  $q' = 5\frac{1}{2}/234 = 11/468$ . Alors, la division euclidienne de 468 par 11, de calcul mental aisé, faisait apparaître le quotient 42 et le reste 6, et dictait le choix de 43. Le reste est alors peu différent de  $(-0,2dp)$ .

On explique de même les réponses qu'il donne pour 30, 31 et 34 séterées :

30 séterées :	côté proposé	68 d	$(7\frac{1}{2} - 1/19)p$
31 séterées :	côté proposé	69 d	$(9\frac{1}{2} + 1/19)p$
34 séterées :	côté proposé	72 d	$(14\frac{1}{4} - 1/17)p$

**30 séterées :** la correction  $(-1/19)$  est excellente ; elle résulte de trois minoration qui maintiennent une solution par excès. Minoration du quotient à retrancher  $q = |r/2a| = (7\frac{1}{2} + 1/64)/(137-1/16)$ . A ce quotient Boysses aura substitué le rapport plus maniable  $(7\frac{1}{2}/137 = 15/274)$  et

la division euclidienne de 274 par 15 aura entraîné la troisième, avec le choix de 19, car  $274 = 15 \times 18 + 4$ .

**31 séterées :** dans ce cas, où il convenait de calculer  $r/2a + 1$ , avec  $r = 7 + 3/8 - 1/164$  et  $2a + 1 = 140 + 3/16$ , Boysses aura probablement osé la majoration très faible du numérateur, qui lui donnait alors un rapport très simple après multiplication des 2 termes par le binaire 16 :  $r/2a + 1 \approx 118/2243$ . Le reste de la division euclidienne ( $2243 = 118 \times 19 + 1$ ) autorisait la majoration très faible substituant  $(1/19$  à  $1/19 + 1/118)$ , et refusait le choix de  $1/20$  beaucoup moins précis.

**34 séterées**, soit  $5312,50 d^2$  : dans ce cas, l'entier  $z$  proposé par Boysses – très satisfaisant – semblait d'abord avoir échappé à un traitement aussi simple. En effet, en appliquant  $T_1$  on est conduit à choisir, à la 3<sup>e</sup> étape, la valeur approchée par excès  $72d$   $(14+1/5)p$  de précision acceptable (excès  $\approx 1,4dp$ ). Cette mesure s'écrivant aussi  $72d$   $(14\frac{1}{4}-1/20)p$ , on en déduit que  $(72d$   $14\frac{1}{4}p)$  assurant une v.a.p.e., la substitution de  $1/17$  à  $1/20$  ne pouvait que fournir une meilleure v.a.p.e., ou une excellente v.a.p.d. La calculette vérifie la première éventualité, avec un excès de superficie négligeable ( $1/10dp$ ).

Ce qui précède suggérerait que Boysses, ayant reconnu avec le premier reste l'intérêt de prendre dès la deuxième étape  $14\frac{1}{4} p$ , soit  $y = 57$ , aurait calculé

**Bertran Boysses** (prononcer Bouissé) est un arpenteur arlésien du XIV<sup>e</sup> siècle. Il aurait vécu de 1350 à 1415. Il nous a laissé un manuscrit en provençal connu aujourd'hui sous le nom de "traité d'arpentage" et conservé à la bibliothèque Inguimbertaine à Carpentras. Une partie de ce manuscrit de 315 folios (folios 33 à 65) que son auteur nommait "la siensa de destrar", la science de "destrer" (mesurer avec une règle de 1 destre araduée en empan) a été transcrite une première fois par P. Pansier et publiée dans "Annales d'Avignon et du Comtat Venaissin" en 1926.

■■■ alors  $r_2 = -(8+177/256)dp$  et le rapport  $q = r_2 : (144+57/32)$ , d'où la soustraction de valeur absolue de  $q$  ou d'un de ses majorants :  
 $(8+3/4)/(145+3/4+1/32) = 35/(583+1/8) = 1/(16+23/35+1/280) \approx 1/17$ .  
 D'autres cas confirment sa démarche et permettent de préciser l'attitude de Boysset dans sa recherche d'une bonne valeur approchée.

**40 séterées**, soit  $6250 d^2$  : on trouve  $79d (1-1/11)p$  avec un reste  $r_3 = 4/11dp + 10/11p^2$ . Boysset ayant donné  $79d (1+1/11)p$  et un défaut de  $4/11dp$ , on doit conclure à une simple distraction, l'écriture de mais *au lieu de mens*.

**99 séterées**, soit  $15468 d^2 12 dp$ . On trouve  $124d (6-1/40)p$ . Boysset propose pour le troisième terme  $(-1/41)$ . Le nôtre est déduit du calcul de  $q = |r/2a|$ , où  $r_2 = -(6^3/4)dp$  et  $2a = 248^3/4$ . D'où :  
 $q = 25/995 = 5/199 = 1/(39+4/5)$

qui indique que  $z = 39$  donnerait une v.a. moins précise que la v.a.p.e. donnée par ( $z = 40$ ) avec un excès de  $0,03dp$ .  
 Le choix de Boysset me surprenait et tenait en échec. Jusqu'à ce qu'il m'apparaisse qu'il fallait exclure une erreur de calcul, mais qu'on pouvait envisager l'oubli de  $1/4$  au numérateur de  $q$ . En effet, on a alors  $q' = |6/248^3/4|$  et  $1/q' = (248^3/4) : 6$ , de calcul mental aisé :  $248^3/4 = 240+6+2^3/4 = 6(41+11/24)$   
 L'inverse de 41 étant plus proche de  $q'$  que celui de 42, le choix de Boysset, qui privilégie, ici aussi, la précision, devait être 41.

La démarche de Boysset est sûre, et son attitude pragmatique :  
 - il utilise  $T_1$  mais n'oublie pas d'ajouter  $r/2a$  chaque fois que  $r$  est négatif ;  
 -  $q$  étant le dernier quotient de la forme  $r/2a + 1$  ou  $|r|/2a$  et  $1/q$  étant encadré par les entiers  $n$  et  $(n + 1)$ , il retient pour  $z$  celui qui minimise la différence  $|q-1/z|^{(5)}$ .

Bien que Boysset nous ait fait savoir, dans le seul passage en latin de son manuscrit – que l'on doit prendre au sérieux<sup>(6)</sup> – qu'il tenait son savoir d'arpenteur du notaire Arnaut Delpuey et d'un livre de celui-ci ayant appartenu à Arnaut de Villeneuve, il est évident qu'il n'a pu trouver dans le livre du célèbre médecin des calculs et des mesures dont l'usage ne pouvait guère dépasser la vaste communauté d'Arles. En effet, à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, aucune commune de Provence ou du Languedoc n'a déclaré la canne et la séterée de cette ville.

Pour l'acquisition de ses connaissances en arithmétique et cosmographie on peut penser, soit à un enseignement reçu d'un membre de la communauté juive, soit qu'il ait mis à profit son séjour à la Cour Pontificale d'Avignon pour compléter la solide instruction de base reçue à Arles, qui lui avait ouvert les portes de l'administration pontificale.

Ses "Chroniques" ont depuis longtemps retenu l'attention des historiens. Il est temps qu'ils sachent ce que le TRAITE D'AR-PENTAGE nous apprend de ses connaissances scientifiques : en arithmétique, on vient de le voir, en cosmographie<sup>(7)</sup>, en géométrie. En géométrie, il est très remarquable pour son temps qu'il propose un seul calcul pour la surface de tout quadrilatère (on ne trouve nulle part le vocabulaire des quadrilatères particuliers)<sup>(8)</sup> : le double du produit de deux mesures - la distance des milieux de deux côtés opposés et celle d'un des

autres milieux à la "médiane" que l'on vient de jalonner.

Remarques. Il m'a paru indispensable, pour alléger l'écriture et en accroître la lisibilité, de revenir à l'écriture  $3^1/4$ , désuète, non pédagogique, mais que suit l'expression orale.

Compléments. Après avoir observé ci-dessus ma présentation du calcul du côté du carré de 7 séterées – qui ne préjuge en rien de celle des calculs de Boysset, que nous ignorons – le lecteur pourra s'exercer à calculer celui du carré de 6 séterées, d'abord par cette méthode (il trouvera alors celui que donne Boysset  $30d (10-1/10)p$ ), puis par la méthode de l'arithmétique en langue occitane dite "de Pamiers"<sup>(2)</sup>, par exemple avec la suite décroissante  $1/2, 1/3, 1/4...$  et à partir de l'entier mesure de la surface en canne carrée (il trouvera alors  $30d (10-2/25)p$ ). ●

**Magdeleine Motte**, agrégée de mathématiques et membre de l'Institut d'Etudes Occitanes a traduit à la demande de Francis Delebecque, alors directeur de l'ENC "*la siensa de destrair*", soit une trentaine de folios du Traité que Bertran Boysset, arpenteur arlésien, a rédigé à l'intention des futurs arpenteurs. Travail publié par l'ENC en janvier 1988.

- (5) Toutefois il se départira de cet impératif quand le nombre le moins précis lui assure déjà une précision très suffisante et de signe connu. cf. 30 séterées.  
 (6) Motte Magdeleine, Le Traité d'Arpentage de Bertran Boysset (~1345-1415). Transcription, traduction notes et commentaires, à paraître.  
 (7) Georgelin Yvon, Marseille à la conquête du ciel. L'astronomie à Marseille et en Provence de Pythéas à Charles Fabry (Ville de Marseille, Unité de Provence, Observatoire de Marseille, 1994).  
 (8) Ce que n'a pas vu Pierre Portet (thèse, Université de Toulouse-Le Mirail, 1995).

## ABSTRACT

*The author of the manuscript 327 from the Carpentras Inguimbertaine Library - known as "Traité d'Arpentage" - the land's surveyor Bertran Boysset, from Arles, who writes in Provençal, gave about more than a hundred surfaces - described at the same time by their measure in surveyor's measure, the "sestairada", and in linear units from Arles (destre subdivided into 16 palms [spans] - the measure for the equivalent square side given in destres, palms and fraction of a palm. So, he calculated more than a hundred of square roots. As he often pointed out the default or excess of the equivalent square, we can then deduct, after examination of these numeral data, the algorithm he used - which is Heron's one, the degree of accuracy he wanted (about 1 m<sup>2</sup>) and the approximations that made easier his calculations. Here is a testimony on Heron's algorithm practice transmitted from the mathematicians to the users at a time earlier (before 1415) than the one known up to now (16<sup>th</sup> century).*



# Paris : des hauts et des bas

## Paris de Haut en Bas

■ Gilles THOMAS

*Sous Paris se trouve un autre Paris, ou plus exactement le même Paris, mais figé il y a plus de 200 ans. On parle à son sujet de la "doublure topographique du Paris du Siècle des Lumières". C'est Paris avec ses artères, ses carrefours, ses places, ses escaliers, ses noms de rues, des indications de monuments, des repères de nivellement... Sous Paris c'est toujours Paris !*

**N**ous pourrions vous parler, à la manière de David Vincent, de "marquages étranges d'un autre temps. Leur localisation : les sous-bassements. Leur but : couvrir la France entière. Le piéton Parisien les a vus. Pour lui, tout a commencé par une marche attentive, le long d'une rue quelconque de la capitale, alors qu'il cherchait un raccourci qu'il ne trouva jamais. Cela a commencé par un repère abandonné, et par un homme que le manque d'information avait rendu trop curieux pour interpréter ces marques. Cela a commencé par l'apparition d'une nef venue d'une autre époque. Maintenant, le piéton parisien saura que les repères sont là, qu'ils ont ces formes métalliques, et qu'il lui faut convaincre un monde incrédule que leur présence a été conçue pour durer." Et effectivement, ils sont désormais bien "incrustés" parmi nous et ce depuis plusieurs générations. Nul ne les remarque plus malgré leur omniprésence parce que justement l'invasion a commencé il y a bien longtemps, bien plus qu'il n'y paraît ! Nous voulons parler des repères de nivellement.

Il n'est pas question ici de refaire l'histoire du nivellement (voir à ce sujet l'article de Jean Allemand le bien nommé !), ni l'historique de ceux apposés dans Paris – réseau Bourdalouë, réseau Lallemant (justement), réseau IGN –, mais d'apporter un éclairage particulier (et ils en ont bien besoin de par leur localisation) sur des repères de nivellement beaucoup plus discrets... parce que

situés à une vingtaine de mètres en moyenne de ceux que l'on croise sans les voir, mais en dessous, au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, souvent dénommées par abus de langage "catacombes".

**Petit rappel au sujet des plus récents repères que l'on peut voir à Paris... en surface (pour les plus anciens se reporter à l'article indiqué *supra*)**

Ces repères de nivellement, qui sont encore très abondants sur les murs de la capitale, sont de trois types. Il y a bien sûr ceux libellés "**Nivellement général de la France \* Ville de Paris**" (modèle circulaire, de 12,5 cm de diamètre extérieur); du type Bourdalouë, leur pose a commencé avant 1879. On en trouve d'autres portant l'inscription "**Ville de Paris / Repère d'altitude**" (de format octogonal; 12,5 cm de diamètre extérieur, 7 cm de diamètre intérieur, comportant un téton en partie sommitale). Il en existe aussi de tout petit, ronds de 7,5 cm de diamètre (avec "téton" en partie sommitale); ils sont de type Lallemant. Si la plupart de ces repères ont été volontairement déposés de leur plaque indiquant l'altitude du lieu qui était insérée dedans, en cherchant bien on en trouve de très nombreux encore intacts; ils ne sont pas bien sûr majoritaires par rapport au repères devenus muets, mais ce ne sont pas des cas aussi rares que certains le pensent.



photo : © Franck Albaret

Sur ce mur du jardin privé de l'Observatoire, on remarque, espacés d'environ 2 mètres, deux repères de nivellement : l'un rond à une hauteur normale (au niveau de la cheville), l'autre datant des années 1840 deux mètres plus haut. S'il se trouve dans cette position incongrue, c'est par suite du nivellement de la rue Saint-Jacques entre les boulevards de Port-Royal et Arago, lors des travaux d'urbanisme décidés par Haussmann (décret du 13 mars 1895). Le mur d'origine, qui a alors été déchaussé, a été repris en sous œuvre par l'ouvrage de soutènement en pierres de couleur plus claire que l'on voit sur la photo.

■ ■ ■ Pour mémoire, le premier relevé systématique du relief de la capitale ne date que de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Les travaux sur le terrain commencèrent le 29 septembre 1857 sous la direction de Paul-Adrien Bourdalouë, faisant fonction d'ingénieur aux Ponts et Chaussées ; moins de 7 ans plus tard, 15 000 repères étaient mis en place sur tout le territoire français. Le Service du nivellement général de la France est quant à lui né en 1884, avec comme directeur (jusqu'à sa retraite en 1927) Charles Lallemant, ingénieur des mines. Après 50 années de service, il avait déjà à son actif l'installation de plus de 200 000 repères.

## Où l'on va voir que ce n'est pas parce que l'on est à l'origine de la création du système métrique, que l'on sait être homogène dans les mesures d'altitude

Il ne faut pas oublier que malgré la réussite de cette couverture de la France, l'anarchie régnait avant 1879, au sein de la Ville de Paris : plusieurs référentiels "zéro" étaient en effet utilisés ce qui fait qu'il n'y avait aucune homogénéité dans l'étendue du territoire de la Capitale quant aux différents nivellements en vigueur.



photo : © Franck Albaret

**Cette rose des vents peut sembler inversée, mais il faut se la représenter inscrite au niveau du ciel des galeries souterraines, donc au dessus de la tête.**

Le service de la Navigation de la Seine, la Compagnie du chemin de fer d'Orléans (ligne de Limours), la Compagnie des chemins de fer de l'Ouest (ligne du Champ de Mars), la Compagnie des chemins de fer de l'Est avaient adopté le plan de comparaison du nivellement général de la France d'après lequel le 0 du pont de la Tournelle était à la cote de 26 m 285 (donc basé sur le marégraphe de Marseille).

Le Service Municipal de Paris, l'Inspection Générale des Carrières souterraines (= IDC), la Compagnie du che-

min de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée avaient conservé le plan de comparaison de 1842, pour lequel le 0 du pont de la Tournelle est à la cote de 26 m 25 (niveau moyen de la mer au Havre... non-destination du PLM !)

La Compagnie du chemin de fer d'Orléans, ainsi que la Compagnie du chemin de fer du Nord, avaient conservé quant à elles, le plan de comparaison antérieur à 1842 d'après lequel le 0 du pont de la Tournelle est à la cote de 27 m 60 (précédent niveau moyen de la mer au Havre).

Quant au Service ordinaire et au Service vicinal du département de la Seine, ainsi que la Compagnie des chemins de fer de l'Ouest, ils n'avaient pas de plan de comparaison spécial ; ils se rattachaient tout simplement aux repères les plus voisins du nivellement général de la France.

On le voit, tout cela était une joyeuse pagaille parfaitement organisée et assumée, ce que la Sous-Commission pour l'établissement d'un repère fixe départemental qualifiait, par un doux euphémisme, de "situation aussi complexe que fâcheuse".

Pour avoir encore de nos jours une idée visuelle de la coexistence de ces différentes échelles, il suffit de se rendre au pont de la Tournelle et de regarder le quai de Béthune. Plusieurs échelles juxtaposées sont encore présentes, bien que suite à des travaux de "restauration" du parement du quai en question (à la toute fin du XX<sup>e</sup> siècle), l'échelle la plus à l'extrême droite ait disparu, tandis que celle à côté de l'anneau d'amarrage des bateaux a été amputée de la moitié supérieure de ses graduations. Les basses eaux de la Seine au pont de la Tournelle durant l'été 1719 avaient été choisies comme zéro de référence. En effet ce pont était le premier que rencontraient les bateaux entrant dans Paris en amont, le niveau de l'eau était donc important à la fois pour la navigation, mais *a fortiori* aussi pour le simple passage sous la voûte, d'autant plus que le commerce utilisait abondamment la voie fluviale comme moyen de transport. Au sujet de cette échelle, voir ci-contre ce qui a été écrit dans les "Annales des mines" de 1819 (1<sup>re</sup> série, tome IV, page 504).



photo : © Franck Albaret

À la base de cet escalier, remarquez la conversion du système pieds / pouces en système métrique au 1/10<sup>e</sup> de mm. Quand au repère de nivellement à droite (cote 36.36), il est indexé de la lettre A car c'est le premier de sa série (ce que confirme sa localisation à la base d'un escalier).





L'un des rares repères de nivellement du type 7.5 cm avec téton apposés sous Paris. Il porte sur le pourtour "Nivellement Général".

**Où l'on va maintenant découvrir que bien d'autres repères de nivellement sont lisibles dans Paris, mais cette fois-ci avec le sens de "à l'intérieur", c'est-à-dire "sous Paris"**

Trémery ayant été Inspecteur général des Carrières de Paris de 1831 à 1842, il n'est en conséquence pas surprenant de découvrir un certain nombre de repères de nivellement sous Paris. Et effectivement, en nous plongeant dans les galeries de servitude de

l'Inspection générale des carrières nous allons en trouver d'autres. Ces repères de nivellement qui sont plus discrets parce que au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, datent aussi de la mi-XIX<sup>e</sup> siècle. Certains sont gravés directement sur la masse en place, d'autres sur les moellons de maçonnerie des piliers de confortation : ils indiquent alors la cote d'altitude du lieu souterrain (avec comme référence le zéro de l'échelle du pont de la Tournelle de 1719), ainsi qu'une précision supplémentaire : le recouvrement, c'est-à-dire

**Note sur la hauteur de l'Observatoire royal au-dessus du zéro de l'échelle du pont de la Tournelle, à Paris, par Trémery, ingénieur en chef au corps royal des mines**

*"D'après des nivellements (sic) géométriques exécutés dernièrement, avec tous les soins possibles, par M. Trémery, ingénieur au Corps royal des Mines, et par MM. De Lamotte et Louis Hassenfratz, géomètre, attachés au Bureau des Carrières du département de la Seine, la hauteur du seuil de la porte du nord de l'Observatoire royal, par rapport au zéro de l'échelle du pont de la Tournelle, est de..."*

mètres  
34,471

*Dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes (années 1815), M. de Prony a fait connaître des nivellements (re-sic) qui avaient déjà donné, pour la hauteur dont il s'agit*

*34,474*  
Différence 00,003

*Il existe un accord remarquable entre les hauteurs que nous rapportons ici. La très petite quantité, dont le résultat publié par M. de Prony excède celui récemment obtenu, peut-être tout à fait négligée, puisqu'elle est seulement de trois millimètres."*



photos : © Franck Albarret

**Repère de nivellement strictement à l'aplomb de ceux de surface de la page 63. Nous sommes donc à plus de 21 m sous le trottoir, à une altitude par rapport au "zéro" du pont de la Tournelle de 10 m 68. La consolidation sur laquelle est visible ce repère date de 1806 : c'est la 17<sup>e</sup> tranche de travail exécutée sous Charles-Axel Guillaumot (d'où le G) premier Inspecteur général des carrières du département de la Seine.**

la profondeur de la galerie par rapport au sol de surface.

À propos de ces indications de profondeur en carrière, pour la petite histoire (qui n'en est pas moins une trace palpable de la grande Histoire), au niveau des escaliers d'accès au réseau souterrain de l'IDC, lors de leur création à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, en surface était indiquée la "profondeur" en pieds/pouces tandis que à l'opposé dans les carrières c'était la "hauteur" qui était gravée dans ce système de mesure. Lorsqu'en 1795 pour unifier le territoire français fut adoptée une nouvelle unité de longueur, universellement connue sous le nom de mètre, celui-ci fut défini comme on le sait comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ; pour une personne habituée à manier les anciennes mesures physiques "corporelles", cette définition étaient pour le moins absconse (d'ailleurs qui de nos jours visualise vraiment quelle dimension représente un méridien terrestre !). Et donc, lorsque l'on demanda de





photos : © Franck Albaret

**Deux indications visibles dans le "Pôle Haussmann - St-Lazare" : la première fichée dans un mur, la seconde enchâssée dans le sol.**

convertir les mesures de ces escaliers de l'Inspection, cette conversion se fit de manière purement mathématique en s'arrêtant au 4<sup>e</sup> chiffre après la virgule, et on s'ingénia alors à graver la nouvelle donnée au dixième de millimètre ce qui est superfétatoire pour l'usage que l'on faisait de ces valeurs; mais on conçoit bien que si on ignore ce que représente vraiment un mètre, on ne peut avoir aucune idée du millimètre!

Revenons à nos repères souterrains. En plus des deux valeurs chiffrées, ces repères sont agrémentés d'un indice alphabétique, lié à l'ordre d'établissement de la série de nivellements. Pour installer le premier repère d'une série, on se positionnait à la base d'un puits ou d'un escalier; on connaissait ainsi facilement la profondeur du lieu et par différence avec l'altitude de la surface on en déduisait l'altitude de la galerie. Ce premier repère était donc gratifié de la lettre A, puis comme la mesure des autres repères était réalisée par une succession de levés topographiques, on les déclinaient suivant un ordre alphabétique: B, C, D, etc. En outre, comme plusieurs séries de repères peuvent être amenées à se côtoyer, pour identifier quel repère appartient à quelle série, on peut aussi indexer les séries: AA, AB, AC, AD, etc., voire A1, B1, C1, D1, etc. (cas dans le "Grand Réseau Sud" des carrières sous Paris). Dans les galeries de carrière du 13<sup>e</sup> arrondissement, on trouve aussi une indexation du type A1, B1, C1, D1, etc., tandis que dans les anciennes carrières sousminant le Val-

de-Grâce, ce sont des indexes numériques gravés en exposants: A<sup>2</sup>, B<sup>2</sup>, C<sup>2</sup>, D<sup>2</sup>, etc. Les repères de ce lieu précis et confiné présentent en plus une particularité, en ce sens qu'ils sont basés sur le système Bourdalouë: ils n'indiquent que l'altitude de l'endroit par rapport à la Méditerranée... ce qui est de peu d'usage à cet emplacement.

Il existe aussi dans les anciennes carrières sous Paris quelques rares exemplaires de repères modèle "7,5 cm avec téton". Ceux qui ont été trouvés pour l'instant se comptent sur les doigts de la main. Ils sont libellés "Nivellement général" mais ni le Service de nivelle-



photo : © Franck Albaret

**Ce repère est le sixième (car désigné par la lettre F) de la série indexée 1 située sous le Val-de-Grâce. Lui aussi est à un emplacement inhabituel puisque à près de 3 mètres du sol de la carrière. Cette position résulte du décapage de la carrière lors de l'aménagement du site en abri de Défense Passive au moment de la deuxième guerre mondiale (les remblais ont été éliminés pour rendre apparent le banc de roche sous-jacent, afin d'y faire reposer les piliers de l'abri).**

ment de la Ville de Paris questionné, ni l'IGN ne revendiquent les avoir posés. Comme ils se situent dans des zones de carrières qui ont servi pour les très nombreux travaux pratiques de topographie organisés par différentes écoles d'ingénieurs de Paris jusqu'à la fin des années soixante-dix (successivement l'École Centrale, l'École des Mines, et l'École Supérieure de Géomètres et de Topographes dite aussi SupGéTo), il se peut qu'ils aient été installés au cours de l'un de ces exercices. Si l'un de vous possède la réponse... merci d'en faire profiter la rédaction.

**Où l'on constate que moins on est précis, plus on se permet d'être visible (pour faire oublier les inexactitudes) sans pour autant être vu!**

Derniers avatars anecdotiques des repères de nivellement, ceux qui ont été posés lors de la construction de la ligne de RER ÉOLE, dans le "Pôle Haussmann - Saint-Lazare", et qui rejoignent de par leur localisation les repères des carrières sous Paris; mais quelles sont les personnes qui les connaissent? Pourtant cette fois-ci il n'est plus question de discrétion dans le format des dits-repères, qui n'en sont néanmoins pas très précis, car ils ont surtout été mis comme ornement décoratifs. Mais ce n'est pas parce qu'ils sont les plus gros de tous les repères existants à Paris, qu'ils sont les plus remarquables. Il est en revanche conseillé de



photo : © Sébastien Zelenchowski

À Saint-Germain en Laye (ancien département de Seine-et-Oise), il est aussi possible de trouver des repères de nivellement ayant comme référentiel le pont de la Tournelle.

faire davantage confiance à la valeur chiffrée lorsque l'indication est donnée au niveau du sol, que si elle se trouve à hauteur des yeux, ayant été apposée à cet endroit pour une meilleure lisibilité ; pour preuve, on rencontre par exemple un repère (à hauteur des yeux) nous indiquant que nous nous trouvons à 24,40 m au-dessous du niveau de la rue, et après avoir descendu encore 8 marches, nous trouvons la même indication encastrée dans le sol !

Ces repères mesurent 30 cm de diamètre intérieur, et mesurés avec leur couronne biseautée 42 cm. Ils sont soit enchâssés dans le sol (dans ce cas une flèche indique en plus la position du Nord, que l'on suppose magnétique bien qu'il manque la date de réalisation<sup>1)</sup>), soit fichés dans les murs de la station et ses nombreux couloirs de correspondance. Dans la très grande majorité des cas, une indication supplémentaire identifie le lieu : niveau supérieur, terrasse supérieure, salle des billets, passerelle supérieure, passerelle intermédiaire, niveau inférieur, salle inférieure, niveau quais. Tandis qu'au

niveau des accès à partir de la rue, on trouve le même style de repères, mais nous donnant cette fois la cote d'altitude par rapport au niveau de la mer.

Il ne faut pas que l'arbre que constitue l'intérêt de ces "repères", cache la forêt de repères plus anciens. Autrement dit n'oubliez pas la question ouverte au cours de cet article (et qui le demeure pour l'instant !) concernant les repères métalliques visibles dans les anciennes carrières souterraines de la ville de Paris : qui est à l'origine de leur installation ? ●

**Gilles THOMAS**

Technicien à la DPE de la Mairie de Paris

## Bibliographie

"Les plaques de nivellement", p. 44-45, par **Marc Declerck**, in Paris Villages (le magazine du patrimoine parisien), n° 9 février/mars 2005.

"Atlas du Paris souterrain", ouvrage collectif sous la coordination de **Alain Clément et Gilles Thomas** ©Parigramme 2001 (récompensé par le Prix Haussmann 2002).

"Le nivellement de Paris", par **Alain Clément**, page 23-37, in Liaison-SEHDACS n° 13 (1998) ;

Revue XYZ, n° 76 (3<sup>e</sup> trimestre 1998), p. 82-90 : "Paris et ses nivellements au cours des temps" par **Jean Allemand**.

"Les nivellements de Paris" par **Alain Clément**, page 60-68, in Liaison-SEHDACS n° 8 (1988).

"Le nivellement général de la France. But et origines de ce service, son organisation actuelle, son importance utilitaire et scientifique", in La Nature du 15 août 1934 (n° 2935), p.145-151, par **Jacques Boyer**.

"Nivellement général de la France. Établissement d'un repère fixe départemental" Rapport de la sous-commission. Paris, le 1<sup>er</sup> mai 1879 : **Vauthier, Grégoire, M. de Fontanges, H. Bernard, E. de Villiers du Terrage** rapporteur. Publication du Ministère des Travaux Publics - Département de la Seine.

"Plan-relief du sol de la ville de Paris en 48 divisions routières et à l'échelle d'un millièmètre", rapport de **Emmery** du 31 octobre 1839 (Archives de la Seine : cote V801 439) ;

"Hauteur de Paris au dessus du niveau de la mer et opération pour rattacher tous les nivellements aux nivellements de la carte de France", rapport de **Emmery** du 20 octobre 1839 (cote V801 439) ;

"Pose et nivellement de 500 repères en fonte aux armes de la Ville", rapport de **Emmery** du 14 décembre 1836 (cote V801 437).

## Remerciements

Merci à Gérard Duserre de l'ASNEP pour la retranscription intégrale des documents V801, et Mireille Skrzyrbak pour sa disponibilité.

## ABSTRACT

*Under Paris exists another Paris, or more precisely an image of what Paris looked like more than 200 years ago. We used to name it "the topographic blueprint of the XVIII<sup>th</sup> century in Paris". It's the city with its streets, crossings, stairs, streetnames, monuments' names and ground level indications. Below Paris you still walk in Paris !*

(1) La convention veut que le Nord magnétique soit maintenant indiqué avec la date de réalisation, puisqu'il fluctue (les cas les plus extrêmes étant les inversions de pôle magnétiques connus au cours des temps géologiques), contrairement au Nord géographique. Il est à noter que dans les galeries de servitude de l'IDC sises au niveau des anciennes carrières souterraines de la Ville de Paris, il est aussi possible de trouver des roses des vents (une dizaine ont été localisées pour l'instant). Elles sont, au contraire de celles du pôle ÉOLE qui sont positionnées sur le sol, écrites au pochoir au niveau du ciel de la carrière. Les quatre points cardinaux fleurissent bon le XVIII<sup>e</sup> siècle puisque on y lit Nord, Couchant, Levant et Midi, et effectivement si on a la curiosité de prendre une boussole, on relève une différence de 20 degrés entre l'indication donnée par l'instrument de mesure et la flèche pointant le nord. Ceci est tout à fait conforme à la dérive magnétique puisque elle est évaluée à une moyenne de un degré tous les dix ans, et comme ces indications d'orientation ont été inscrites à la toute fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, la différence est cohérente avec ce que nous indique la science géologique.



# Ballon rond et géométrie

L'équipe de France de football vient de se qualifier pour disputer la coupe du Monde, en 2006. Examinons de près, ce fameux ballon rond

■ Robert VINCENT

*Un ballon de football est construit à partir d'une figure polyédrique particulière. Après avoir rappelé qu'il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes, l'intérêt se porte sur un certain polyèdre formé par l'assemblage d'un savant panachage de polygones réguliers. Il est montré qu'il est possible, pour former un polyèdre convexe fermé, d'assembler des facettes pentagonales et hexagonales ayant toutes une même longueur de côté, à raison de deux hexagonales pour une pentagonale aboutissant à chaque sommet du polyèdre.*

*Ce polyèdre est formé de 32 facettes, 20 hexagones et 12 pentagones, et présente 60 sommets et 90 arêtes toutes de même longueur et toutes tangentes en leur milieu, à une sphère dont le diamètre est égal au triple de leur longueur multiplié par le nombre d'or !*

*Telle est la figure, souvent insoupçonnée par les amateurs de football, à partir de laquelle est confectionné le "ballon rond", qui est rendu effectivement sphérique par une courbure adéquate des arêtes et un bombement des facettes, maintenus par un gonflage approprié.*

## Les polyèdres réguliers

Avant d'aborder l'objet de notre propos, et afin de nous familiariser avec les problèmes de polyèdres, il n'est pas inutile d'évoquer les cinq classiques polyèdres réguliers convexes. L'assemblage de figures élémentaires de géométrie plane, comme le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier, a, dès l'antiquité, été l'objet de recherches et il a été établi très tôt, qu'il n'existait que cinq polyèdres réguliers convexes, chacun formé par l'assemblage de polygones réguliers tous semblables.

L'assemblage d'hexagones réguliers exige une surface plane, Cet assemblage est utilisé par exemple, pour carrelers le sol d'une cuisine avec des tomettes hexagonales. On conçoit dès lors, qu'il ne sera possible d'édifier un polyèdre régulier convexe, qu'avec des polygones d'ordre inférieur à celui de

l'hexagone, donc exclusivement formé par l'assemblage soit de triangles équilatéraux, soit de carrés, soit enfin de pentagones réguliers. On pourra envisager d'utiliser l'hexagone régulier, mais seulement en panachage avec d'autres d'ordre inférieur. Ce sera l'objet de notre propos, mais il ne s'agira plus alors de polyèdres réguliers.

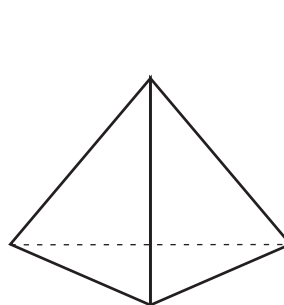
### Évoquons les cinq polyèdres réguliers convexes :

Les angles au sommet des trois polygones réguliers, seuls utilisables comme il vient d'être dit, sont  $60^\circ$  pour le triangle équilatéral,  $90^\circ$  pour le carré,  $108^\circ$  pour le pentagone régulier. Or, en un sommet d'un polyèdre régulier convexe, la somme des angles des polygones réguliers qui y aboutissent, ne doit pas excéder ni même atteindre  $360^\circ$ . En conséquence, en chaque sommet d'un tel polyèdre, pourront aboutir trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux, dont la somme des angles au sommet du polyèdre est respectivement de  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  et  $300^\circ$ . mais seulement trois carrés, dont la somme des angles au sommet du polyèdre est de  $270^\circ$ , ou trois pentagones réguliers dont la somme des angles au sommet du polyèdre est de  $324^\circ$ .

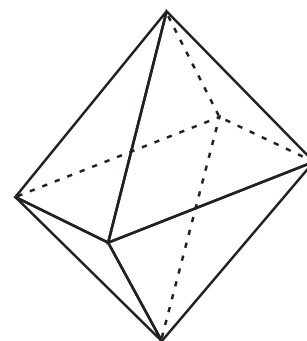
Le nombre de sommets du polyèdre régulier est obtenu en multipliant le nombre de ses faces par le nombre de sommets du polygone composant chaque face, le tout divisé par le nombre de polygones aboutissant à chaque sommet.

### Polyèdres réguliers formés par des triangles équilatéraux :

- avec trois triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est  $180^\circ$  : **le tétraèdre** régulier (figure 1), formé par quatre triangles équilatéraux. Il a quatre sommets ( $4 \times 3 / 3$ ).
- avec quatre triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des quatre angles est  $240^\circ$  : **l'octaèdre**

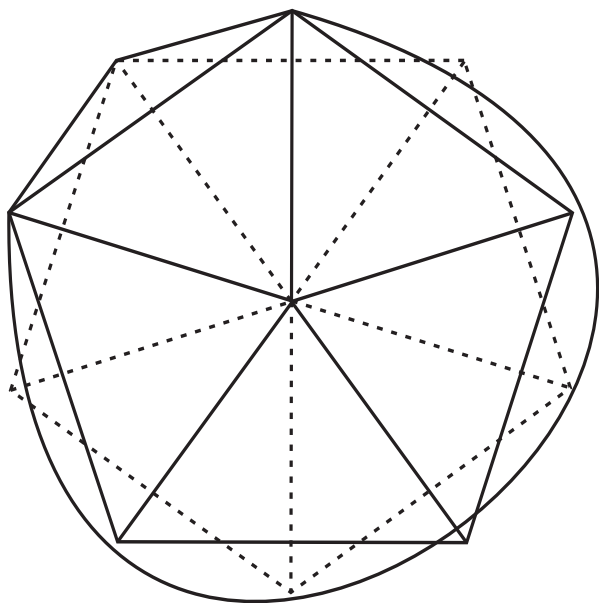


**Figure 1. Le tétraèdre :**  
3 triangles équilatéraux aboutissent en chacun des 4 sommets

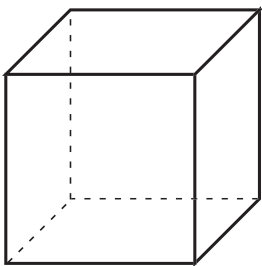


**Figure 2. L'octaèdre :** 4 triangles équilatéraux aboutissent en chacun des 6 sommets





**Figure 3.** L'icosaèdre : 5 triangles équilatéraux aboutissent en chacun des 12 sommets



**Figure 4.** Le cube : 3 carrés aboutissent en chacun des 8 sommets

régulier (figure 2), formé par huit triangles équilatéraux. Il a six sommets ( $8 \times 3 / 4$ ).

- avec cinq triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des cinq angles est  $300^\circ$  : **l'icosaèdre** régulier (figure 3), formé par vingt triangles équilatéraux. Il a douze sommets ( $20 \times 3 / 5$ ).

#### Polyèdre régulier formé par des carrés :

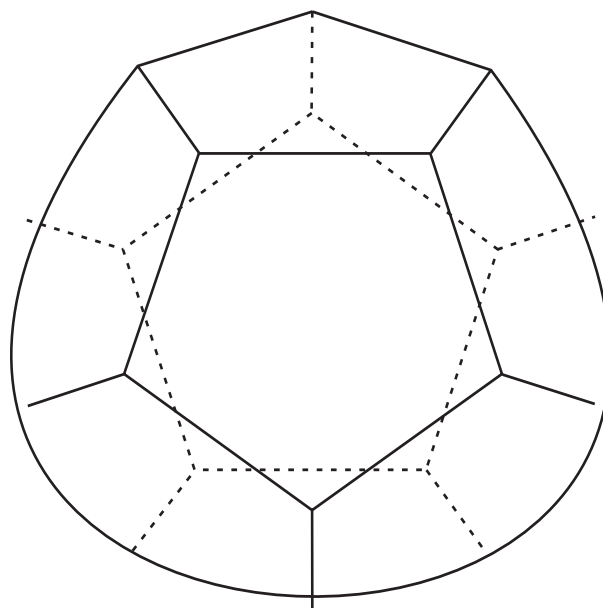
- avec trois carrés aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est  $270^\circ$  : **le cube** (hexaèdre régulier) (figure 4), formé par six carrés. Il a huit sommets ( $6 \times 4 / 3$ ).

#### Polyèdre régulier formé par des pentagones réguliers :

- avec trois pentagones aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est  $324^\circ$  : **le dodécaèdre** régulier (figure 5), formé par douze pentagones réguliers. Il a vingt sommets ( $12 \times 5 / 3$ ).

## Polyèdre complexe

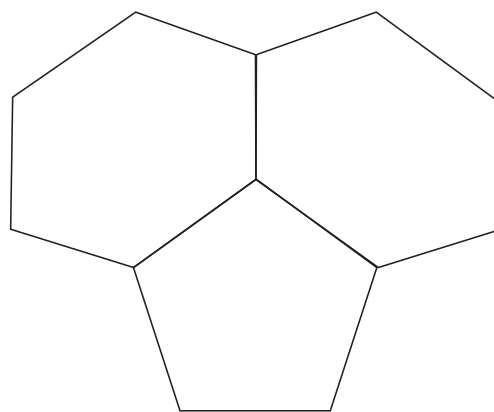
Comme nous venons de le voir, il n'est pas possible de construire un polyèdre uniquement avec des hexagones réguliers. Nous allons donc tenter de construire un polyèdre, par l'assemblage en chaque sommet, de trois polygones réguliers dont la somme de leurs trois angles est le plus près



**Figure 5.** Le dodécaèdre : 3 pentagones réguliers aboutissent en chacun des 20 sommets

possible de  $360^\circ$ . Nous ne pouvons nous rapprocher plus de cette limite qu'avec deux hexagones et un pentagone dont la somme des trois angles au sommet d'assemblage est de  $348^\circ$ . C'est ainsi que les sommets seront les moins "pointus" possible. Ce faisant, si un tel polyèdre convexe existe, nous serons sûr d'obtenir celui se rapprochant le plus de la sphère, en ayant le plus grand nombre possible de facettes en forme de polygones réguliers.

Nous posons donc comme principe unique de construction du polyèdre recherché, qu'en chacun de ses sommets, aboutissent trois facettes contiguës, et trois seulement, dont deux sont des hexagones réguliers identiques et la troisième, un pentagone régulier ayant la même longueur de côté que celle des côtés des hexagones. Cet assemblage forme un trièdre que nous appellerons dans la suite **"trièdre élémentaire"** (figure 6). Il est facile de voir que les normales dressées au centre des deux hexagones et celle dressée au centre du pentagone se rencontrent en un même point.



**Figure 6.** Le trièdre élémentaire : en son sommet aboutissent 1 pentagone et 2 hexagones

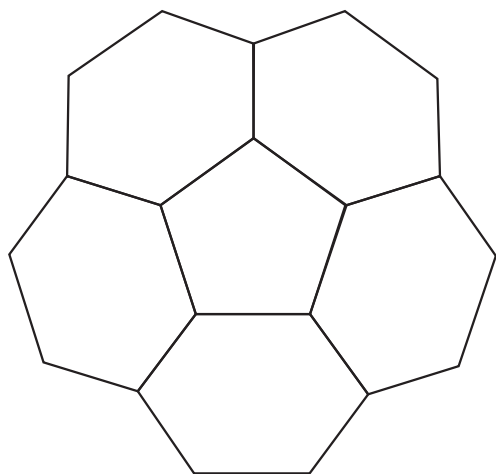


Figure 7.

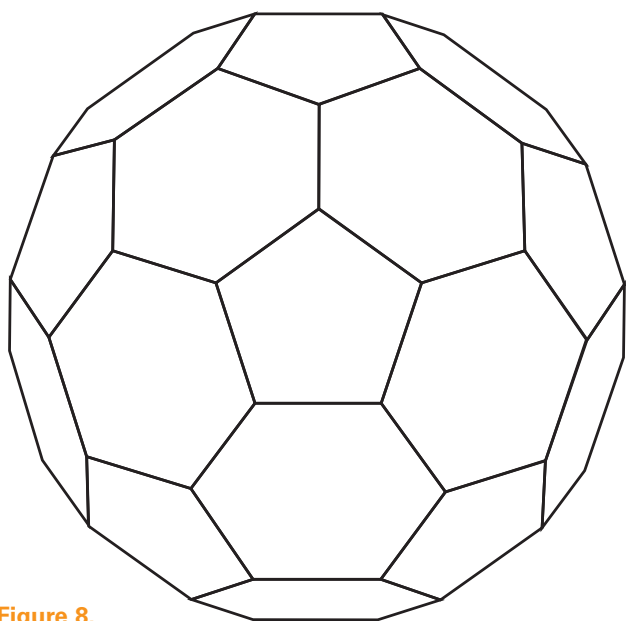


Figure 8.

Nous allons montrer qu'avec cette seule condition, il existe un tel polyèdre convexe fermé, et qu'il résulte de l'assemblage de 32 facettes, dont 20 hexagones et 12 pentagones.

## Construction et faisabilité du polyèdre

Dans le polyèdre envisagé, deux pentagones ne peuvent se toucher par un sommet commun, puisqu'en un sommet, un seul pentagone peut aboutir. À plus forte raison, deux pentagones ne peuvent avoir un côté commun.

Construisons alors la figure constituée d'un pentagone entouré de cinq hexagones contigus ayant un côté commun entre eux (arêtes) et avec le pentagone (figure 7). Ce pentagone et cette première couronne de cinq hexagones, forment une figure polyédrique dans l'espace. Les normales dressées au centre de chacune des six facettes polygonales, se coupent en un point, que nous pouvons appeler centre de la figure polyédrique et que nous appellerons par la suite simplement "centre du polyèdre".

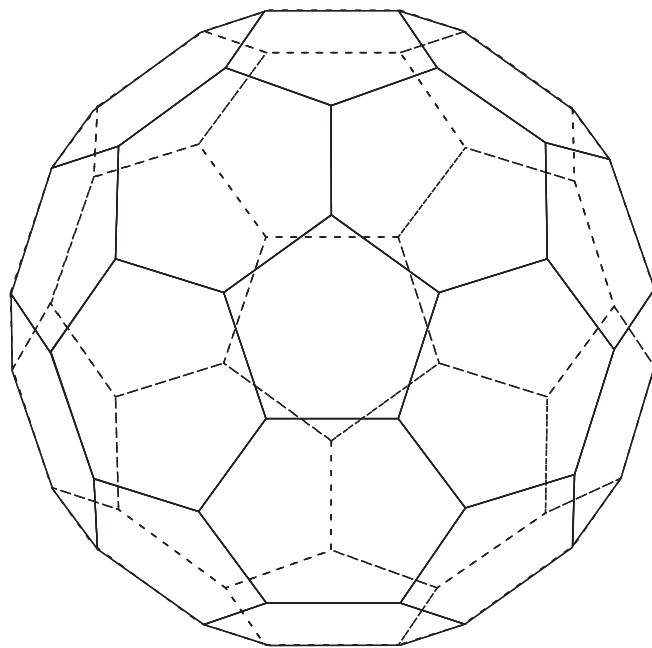


Figure 9. Le polyèdre formé de 12 pentagones et de 20 hexagones. 1 pentagone et 2 hexagones aboutissent en chacun des 60 sommets.

Ajoutons maintenant une deuxième couronne (figure 8). À chaque extrémité (sommets) des cinq côtés communs à deux hexagones de la première couronne, va obligatoirement venir se fixer par un de ses sommets, un pentagone ayant un côté commun avec ces deux hexagones. À eux trois, ils forment bien un "trièdre élémentaire" et la normale au nouveau pentagone passe par le point de rencontre des normales aux deux hexagones, le "centre du polyèdre" défini ci-dessus. Pour terminer cette deuxième couronne, il reste à insérer cinq hexagones, intercalés entre chacun des cinq pentagones qui viennent d'être fixés. Ces nouveaux hexagones seront positionnés de telle sorte qu'ils aient côté commun avec les facettes déjà en place. Chacun forme un "trièdre élémentaire" avec son voisin et l'un des deux pentagones entre lesquels il vient d'être positionné. Il n'est pas difficile de voir que les normales dressées au centre de ces dix nouvelles facettes, passent aussi par le "centre du polyèdre". Nous notons que nous avons utilisé alors 6 pentagones et 10 hexagones.

Si nous construisons maintenant une nouvelle figure polyédrique symétrique de la première par rapport au "centre du polyèdre", nous sommes assurés que les normales à toutes les facettes des deux figures polyédriques, passent par le "centre du polyèdre", et nous pouvons voir que les deux figures "s'emboîtent" rigoureusement (figure 9), pour former à elles deux, une fois assemblées, le polyèdre convexe fermé complet recherché. En effet, en chaque extrémité des dix arêtes séparant un hexagone et un pentagone de la deuxième couronne, va venir s'assembler, par un de ses sommets, un hexagone de la couronne symétrique. Réciproquement, en chacun des dix sommets d'hexagones de la deuxième couronne non commun avec un sommet de pentagone, va venir

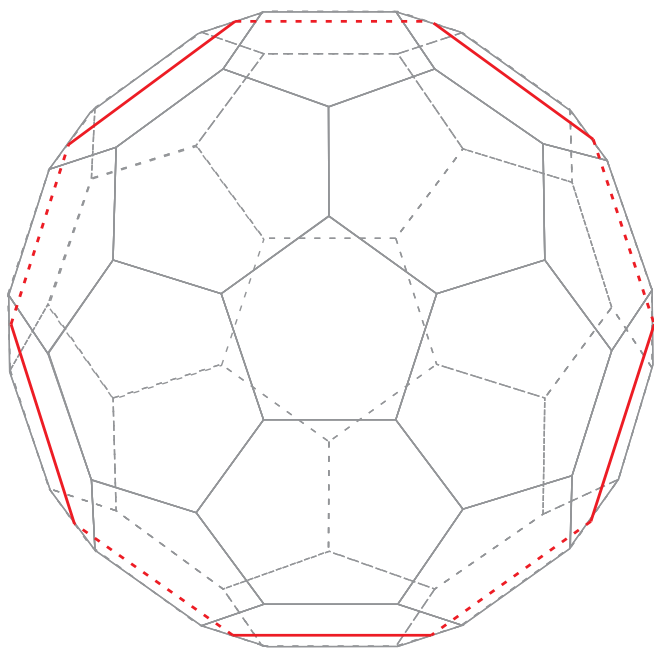


Figure 10.

aboutir une arête séparant un pentagone d'un hexagone de la figure polyédrique symétrique. Tous ces vingt assemblages forment autant de "trièdres élémentaires" dont les normales au centre de toutes leurs facettes concourent au "centre du polyèdre".

## Étude du polyèdre

Nous avons ainsi construit ce polyèdre avec 12 pentagones et 20 hexagones. Il a donc 32 facettes.

Ce polyèdre présente 60 sommets, suivant la formule déjà utilisée pour les polyèdres réguliers :

$$((20 \times 6) + (12 \times 5)) / 3 = 60$$

Il présente 90 arêtes, puisque chacune d'elles lie deux à deux chaque sommet et que trois arêtes aboutissent à chaque sommet.

## Dimensions

Pour appréhender les dimensions du polyèdre, nous allons considérer la ligne polygonale "équatoriale", celle intersectée sur le polyèdre par le plan défini par le "centre du polyèdre" et qui est parallèle au plan du pentagone initial. Ce plan coupe les cinq hexagones de la deuxième couronne et les cinq autres hexagones symétriques, au milieu de chacun de leurs 10 côtés communs (figure 10). Ce polygone est un décagone régulier dont les 10 côtés mesurent une fois et demi la longueur commune des côtés des hexagones et des pentagones, car telle est la longueur égale à la demi-somme entre un côté de l'hexagone et son double qui est la distance entre deux sommets opposés de l'hexagone.

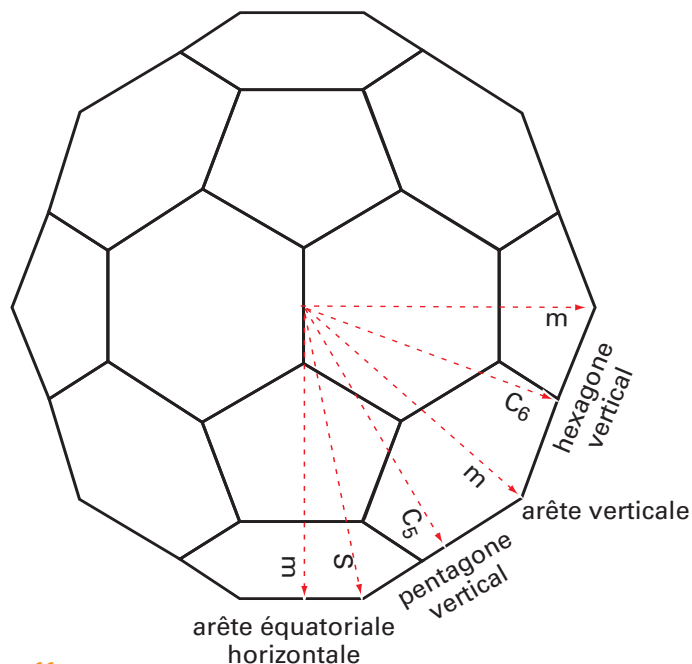


Figure 11.

Dans un décagone,  $n$  étant le nombre d'Or ( $n = 1,618...$ ), les sommets sont distants du centre de ce polygone de  $n$  fois la longueur d'un de ses côtés<sup>1</sup>. Comme ces sommets sont aussi des milieux de côtés du polyèdre, nous pouvons en déduire immédiatement la distance "m" d'un milieu de côté du polyèdre au "centre du polyèdre". En prenant la longueur du côté du polyèdre pour unité de mesure, nous avons ;

$$m = 3n / 2 = 2,427...$$

En se rappelant que  $n^2 = n + 1$ , propriété résultant de la définition du nombre d'Or, la formule précédente peut aussi s'écrire :

$$m = \sqrt{9n + 9} / 2 = 2,427...$$

À partir de cette formule, nous allons pouvoir en déduire commodément la distance "s" d'un des 60 sommets au centre du polyèdre :

$$s = \sqrt{9n + 10} / 2 = 2,478...$$

et la distance "c<sub>6</sub>" du centre d'une facette hexagonale au centre du polyèdre :

$$c_6 = \sqrt{9n + 6} / 2 = 2,267...$$

La distance "c<sub>5</sub>" du centre d'une facette pentagonale au centre du polyèdre est un peu plus grande et plus complexe à calculer :

$$c_5 = \sqrt{8,2n + 8,4} / 2 = 2,327...$$

Une autre vue du polyèdre (figure 11), perpendiculaire à la première et centrée sur le milieu d'un côté commun à deux hexagones, montre bien toutes ces mesures.

Le périmètre du décagone est de 15, alors que celui du cercle circonscrit est de  $2\pi m = 3\pi n \approx 15,25$

(1) voir à ce sujet dans XYZ n° 102 de mars 2005 : "Le nombre d'or et la divine proportion", par Raymond D'Hollander.



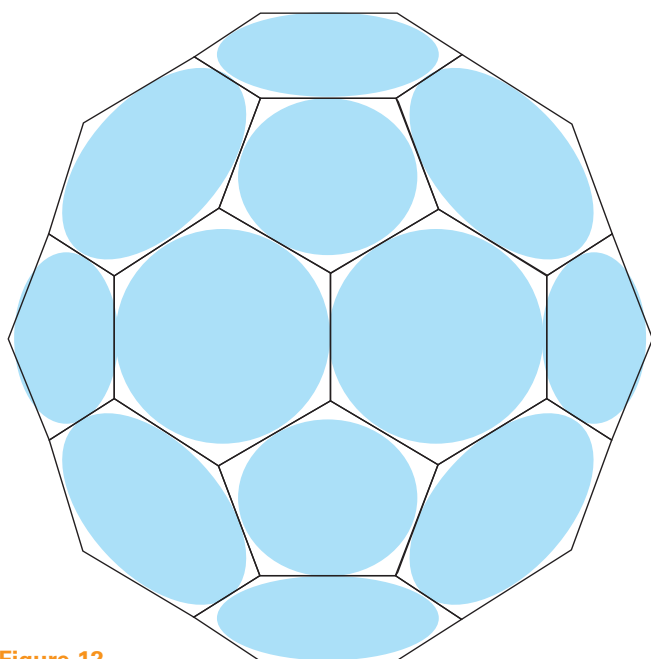


Figure 12.

## Sphère tangente et superficies

Considérons la sphère tangente en leur milieu à toutes les 90 arêtes du polyèdre. Son diamètre 2 m est égal à trois fois la longueur commune des côtés des hexagones et des pentagones, multiplié par le nombre d'or ! Cette sphère coupe chaque face du polyèdre suivant les cercles inscrits dans les pentagones et les hexagones (figure 12). Sur les facettes, l'intérieur de ces cercles est à l'intérieur de la sphère, alors que l'extérieur de ces cercles, notamment les sommets du polyèdre, est à l'extérieur de la sphère.

La superficie "S" de cette sphère tangente aux cotés en leur milieu est :

$$S = 9 \pi n^2 = 74,023...$$

La superficie "S<sub>6</sub>" d'un hexagone régulier est :

$$S_6 = 3 \sqrt{3} / 2 = 2,598...$$

La superficie "S<sub>5</sub>" d'un pentagone régulier est :

$$S_5 = 5 n / 4 \sqrt{3 - n} = 1,720...$$

La superficie "S<sub>p</sub>" du polyèdre de 20 hexagones et de 12 pentagones est ainsi :

$$S_p = 20 S_6 + 12 S_5 = 30 \sqrt{3} + 15 n / \sqrt{3 - n} = 72,607...$$

Il est à noter que la superficie de la sphère enveloppe "S<sub>e</sub>" passant par tous les sommets du polyèdre, est :

$$S_e = 4 \pi s^2 = (9 n + 10) \pi = 77,164...$$

Elle dépasse les superficies S de  $\pi$ , et S<sub>p</sub> de plus de 6 %.

## Le ballon de football

La confection d'un ballon de football est basée sur le principe de ce polyèdre. Les 32 facettes sont en cuir ou en toute autre matière résistante qui se prête bien à la pression interne du ballon. Son gonflage donne à chaque arête une courbure et à chaque facette un léger bombement qui transforment le polyèdre en une forme quasiment sphérique.

Le diamètre d'un ballon de football réglementaire est de 22 centimètres environ. Nous en déduisons que la longueur commune des côtés des facettes hexagonales ou pentagonales est de 4,5 cm environ. Avec 90 arêtes, la longueur des coutures est ainsi de 4 mètres !

Pour obtenir une sphère parfaite, et si on se réfère aux sommets qui sont les noeuds de la structure, le cintrage des arêtes devraient présenter une flèche de un vingtième de leur longueur, soit 2,25 mm, et le bombement au centre des facettes, de 9 mm pour les hexagonales et de près de 7 mm pour les pentagonales.



Alors, amis lecteurs sportifs ou non, la prochaine fois, avant de "shooter" dans un ballon de football, ayez un peu de considération ! Rappelez-vous qu'il recèle un trésor de géométrie, avec de l'or en dedans ! Mais au fait, pour tirer un "penalty", vaut-il mieux que le coup de pied du buteur tape le ballon dans un pentagone (seulement 28 % de la surface) plutôt que dans un hexagone ? ●

# Boule de neige malgache

■ François BODIN

*Troisième mission d'élèves de l'ESGT à Madagascar, le déplacement de l'été 2005 aura encore vu grossir la boule de neige lancée il y a quelques années par Géomètres Sans Frontières en direction de ce pays...*

**S**i nos premiers déplacements sur la Grande Ile furent destinés à des levés topographiques à destination d'association de bénévoles, en particulier l'association d'étudiants IDEES, la période scolaire 2003-2004 fut mise à profit pour amorcer le contact avec les élèves et responsables de la section Information Géographique de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo. L'été 2004 marquait ainsi un premier pas dans les échanges entre étudiants grâce au séjour de plusieurs semaines d'élèves français généreusement accueillis par leurs homologues malgaches.

Les moments de discussion passés à "refaire le monde", à prendre conscience de l'importance de la topographie et du foncier dans la société qui nous entoure, ont donné à tous l'envie de faire mieux connaître nos métiers et leurs multiples facettes. Cette idée a fait son chemin pendant l'hiver 2004-2005 et s'est étoffée en

décidant de faire découvrir les divers domaines de notre activité de base par le biais de conférences associées à une exposition de matériels et travaux. Elle a été mise en œuvre en juillet 2005 par les étudiants malgaches et les étudiants français y ont pris leur part dans le cadre prestigieux de l'hôtel Hilton d'Antananarivo.

Les contacts et travaux en commun entre étudiants des deux pays ont encore eu cette année pour cadre les missions topographiques et d'assistance aux travaux pratiques, avant et après cette journée, sans oublier bien sûr l'initiation à la musique, la danse ou la cuisine locale...

Voilà résumé le parcours de cette petite boule de neige lancée lors du déplacement de deux topographes français il y



**spécialités malgaches : caméléon et gentillesse**

a 6 ans et qui, grossissant petit à petit, a pu réunir l'été dernier autour de la vingtaine d'étudiants français et malgaches plusieurs dizaines de professionnels malgaches tant publics que privés. Nous nous préparons bien évidemment aux étapes suivantes : l'accueil d'élèves géomètres-topographes malgaches en France pour des stages ou travaux de fin d'études, le partage de ces missions d'échange avec des élèves d'autres écoles d'ingénieur géomètres-topographes installées en France et pourquoi pas des échanges entre confrères français et malgaches.

La seule crainte des membres de nos associations est d'être débordés par le nombre de demandes de ceux qui souhaiteraient participer à ces échanges tant il est désagréable de devoir dire non à ces marques d'amitié et de partage. Mais, hélas, ici comme ailleurs les contraintes matérielles imposent trop souvent leurs lois malgré le soutien de nos fidèles donateurs sans lesquels cette sympathique amitié franco-malgache n'aurait pu voir le jour. ●



À la journée de la topographie.



# GenevièveASSE :

■ Jean-Pierre MAILLARD

*Chaque année sur quatre jours au début de l'automne, le Festival international de géographie (FIG) rassemble de nombreux professionnels et amateurs de la discipline.*

**I**l est heureux, en particulier pour les lecteurs d'XYZ, que le masculin évite la confusion avec la Fédération internationale des géomètres (FIG) dont l'acronyme est identique.

Le thème de l'édition 2005 "Le monde en réseaux. Lieux visibles, liens invisibles" s'est notamment traduit par la mise en valeur de l'apport géomatique dans l'identification de l'existant et la reconnaissance de la place grandissante de l'environnement numérique.

Mais le festival n'est pas la seule bonne raison d'apprécier Saint-Dié-des-Vosges. La ville s'enorgueillit aussi de l'ouvrage imprimé dans ses murs en 1507, La *Cosmographie introductio* qui nomme pour la première fois Amérique le continent découvert par Christophe Colomb. Nul doute que le FIG fait écho à cet acte érudite.

Ville martyre de la deuxième guerre mondiale, Saint-Dié-des-Vosges et tout aussi fière de sa renaissance après sa destruction.

## Les vitraux de la cathédrale Saint-Dié

Dédiée au saint patron de la ville, la collégiale des XII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> devient cathédrale à la création d'un évêché en 1777. Elle est à nouveau consacrée, en 1974, trente ans après le sinistre qui a ravagé la cité et l'édifice. Datant pour l'essentiel du XIX<sup>e</sup> siècle, les vitraux détruits ont été simplement remplacés par du verre blanc. Or cela créait de facto une





# le festival du bleu

ambiance froide altérant l'architecture et la vocation signifiante du lieu de culte.

C'est pourquoi en 1982 le ministère de la culture a sollicité le peintre Jean Bazaine pour étudier un projet de création de vitraux contemporains ensemble d'une superficie totale de 314 m<sup>2</sup> pour 53 baies.

Les réalisations devaient répondre au thème retenu "Mort et Résurrection" qui fait aussi allusion aux destructions de novembre 1944 et au renouveau de Saint-Dié-des-Vosges.

Le cahier des charges écartait les œuvres figuratives, les couleurs et lignes devant suffire à traduire une atmosphère spirituelle, évoquer sans besoin de décrire. L'absence quasi totale de vitraux anciens a laissé à l'artiste la plus large liberté d'expression. Le mérite de Jean Bazaine est d'avoir partagé la commande avec d'autres créateurs et maîtres verriers.

Réunis en parfaite confiance par Jean Bazaine, Geneviève Asse, Jacques Bony, Gérard Collot, Dominique Guthrie, Elvire Jan, Lucien Lautrec, Jean le Moal, Alfred Manessier et Claire de Rougemont ont participé au projet en acceptant le plan de lumière global arrêté par le peintre choisi, les tons chauds se déployant côté nord, les tons froids au sud. Ce plan est conçu comme un parcours entre le profane et le sacré, une montée vers la lumière du chœur aux ouvertures réellement flamboyantes, œuvre de Jean Bazaine. Dans une présentation remarquable, le musée Pierre-Noël attenant explicite la démarche en exposant des œuvres de tous les artistes impliqués.

## Vitraux de la nef côté sud (travée 3)

Les vitraux de Geneviève Asse enchâssés aux fenêtres hautes de la nef dans la partie romane répondent bien au besoin d'élévation appelé par l'édifice religieux.

Ils se distinguent des autres réalisations par leur facture géométrique. Les nuances de bleu s'inscrivent dans des bandes verticales aux dimensions inégales. Dans le haut des baies, ce dispositif est complété par plusieurs autres bandes cette fois arrondies qu'épousent la forme romane de l'ouverture.

Au-delà de la composition à la rigidité d'une épure, le goût du silence et de l'intériorité de l'artiste sont immédiatement perçus tout comme l'appel à la spiritualité induite par le bleu dominant. Le bleu constitue d'ailleurs la couleur de prédilection du peintre qui la reçoit et la traduit comme de l'espace. Ce que l'on pourrait designer le "bleu Asse" est celui rencontré par l'artiste en regardant l'air et la mer du golfe du Morbihan se confondrent, comme si cette couleur l'avait choisie ! L'extrême dépouillement de l'expression se retrouve dans toute l'œuvre de Geneviève Asse. Dans le même domaine, les vitraux de la collégiale Notre Dame de Lamballe (Côtes d'Armor), plus récents, montrent à leur tour la spécificité spirituelle de ce bleu et ses déclinaisons. Cette fois les baies sont de grande taille et la géométrie des bandes verticales plus encore simplifiée.

## Geneviève Asse

Née en 1923 Geneviève Asse est originaire de Vannes. Elle vit et travaille à Paris tout en conservant des attaches bretonnes. C'est ainsi qu'elle produit les grandes toiles dans la capitale et les petits formats sur l'île aux Moines. En 1940 elle entre à l'Ecole nationale des arts décoratifs et commence à peindre. L'époque troublée de l'occupation lui fait choisir son camp : celui de la Résistance.

Son engagement est tel qu'elle intégrera finalement la 2<sup>e</sup> DB comme conductrice ambulancière et participe aux campagnes d'Alsace, d'Allemagne

et à l'évacuation des déportés du camp de Terezin. Son mérite est récompensé par la croix de guerre.

De retour à Paris elle dessine pour des maisons de tissus et s'inscrit dans le mouvement pictural de l'époque. Elle expose régulièrement au Salon de mai et au Salon des réalités nouvelles puis gagne indépendance et notoriété qui lui permettent d'être présente en solo dans de nombreuses galeries et plusieurs musées du monde.

Au fil des années elle évolue vers l'abstraction dans une recherche constante de légèreté et de maîtrise de la lumière. Les esquisses géométriques subliminales qui encadrent les couleurs constituent selon ses termes "l'architecture secrète" de sa peinture silencieuse et profonde.

Son œuvre gravée et imprimée est également significative.

C'est en Bretagne que la présence de Geneviève Asse est la plus visible. Elle a légué sept toiles au musée des Beaux-arts de Rennes, le musée de La Cohue à Vannes détient la partie la plus importante de son œuvre gravée, elle participe au festival "L'art dans les chapelles en Morbihan" et expose régulièrement à la galerie Oniris à Rennes.

Il ne faudrait pas que l'importance de la Bretagne dans la vie de Geneviève Asse fasse oublier la découverte de ses vitraux à Saint-Dié-des-Vosges, de la ville elle-même et de son festival : le FIG. Il est vraiment une manifestation remarquable en tous points par la qualité des conférences, l'intérêt des expositions et la diversité des sujets. La gratuité d'accès ajoute une dimension "culture pour tous" qui doit pleinement satisfaire Jules Ferry la figure la plus emblématique de la ville.

Dans ce contexte de mouvement et de connaissance, le festival du bleu de Geneviève Asse est tout aussi à sa place dans la cité lorraine. ●