

Autocontrôle des cheminements polygonaux en planimétrie : quelques précisions sur les tolérances applicables

Ghyslain FERRÉ

Tout topographe se retrouve confronté à la problématique du contrôle de ses mesures et en particulier celles consistant à la détermination des points de canevas¹ sur son chantier. Pour déterminer les coordonnées et l'orientation d'une station de canevas, plusieurs méthodes topographiques existent comme le cheminement polygonal et la station libre pour ne citer que les plus employées pour du lever courant sur des zones peu étendues. Les cheminements polygonaux, qui ne comportent alors que quelques stations, présentent l'avantage non négligeable de pouvoir être contrôlés rapidement en utilisant des écarts de fermeture comparés à des tolérances. Le mode de détermination des écarts de fermeture, souvent appelés "fermetures" par simplification, est relativement bien maîtrisé par les topographes en général. Par contre, la détermination des valeurs des tolérances reste très incertaine, celles-ci étant fournies par les logiciels sans toujours savoir d'où elles sont issues. Ce flou a été amplifié avec l'arrivée de l'arrêté du 16 septembre 2003², en particulier l'article 1^{er} qui spécifie que "Tous les travaux topographiques réalisés par l'État, les collectivités locales et leurs établissements publics ou exécutés pour leur compte doivent être spécifiés et évalués selon les modalités définies dans le présent arrêté, à l'exception des travaux hydrographiques". En effet, ces modalités s'appuient sur des notions de classes de précision et non plus de tolérances comme l'arrêté du 21 janvier 1980³ utilisé jusqu'alors. L'arrêté du 16 septembre 2003, sous sa forme actuelle, ne paraît pas adapté pour une évaluation rapide de la qualité des acquisitions sur des zones peu étendues : les notions de fermeture et tolérance restent donc très prégnantes chez les professionnels pour de l'autocontrôle.

Cet article a pour objectif de faire un point sur les origines de ces tolérances sur les plans mathématique (mise en place des formules) et professionnel (valeurs des paramètres) et surtout d'essayer de donner quelques clefs aux utilisateurs pour mieux appréhender celles-ci. Seule la planimétrie sera traitée et nous considérerons que les erreurs parasites (fautes) et systématiques dans la mesure des angles (erreurs de tourillonnement et de collimation horizontale en particulier) et des distances, ont été éliminées au préalable.

Rappels sur la méthode du cheminement polygonal

Le lexique de l'AFT précise qu'un cheminement polygonal planimétrique est une "ligne brisée dont les sommets sont calculés en coordonnées rectangulaires après mesurage des angles azimutaux et des longueurs des côtés". Un cheminement polygonal ne peut être contrôlé que s'il est encadré ou

fermé. Dans ce cas et pour déterminer les coordonnées des sommets, il faut avoir déterminé celles des points extrémités et l'orientation de leurs stations (gisement d'origine G_0 ou V_0). Le cheminement fermé peut être considéré comme un cheminement encadré lors des traitements : les particularités sont que les fermetures doivent être égales à 0 (zéro) et que l'imprécision sur l'orientation du cheminement n'est à considérer qu'une seule fois puisque l'on revient sur le point initial.

MOTS-CLÉS

Topométrie, polygonation, fermetures

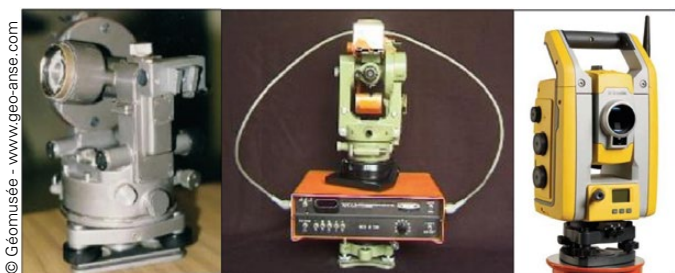


Figure 1. Évolution des instruments de mesure : tachéomètre, distancemètre externe, distancemètre intégré.

1 Canevas : ensemble discret de points bien répartis sur la surface à lever, dont les positions relatives sont déterminées avec une précision au moins égale à celle que l'on attend du levé. Ces points servent de points d'appui au lever de détails. Le canevas s'exprime par les coordonnées de ses points dans un même système. (Arrêté du 21 janvier 1980, note 3)

2 Arrêté du 16 septembre 2003 portant sur les classes de précision applicables aux catégories de travaux topographiques réalisés par l'État, les collectivités locales et leurs établissements publics ou exécutés pour leur compte

3 Arrêté du 21 janvier 1980 fixant les tolérances applicables aux levés à grande échelle entrepris par les services publics

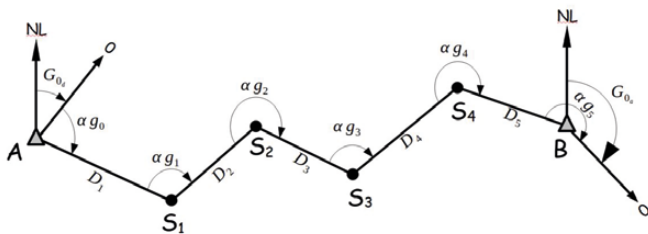


Figure 2. Cheminement polygonal de 5 côtés entre les points A et B.

Les positions et orientations des sommets sont calculées par transmission des gisements avec les angles horizontaux αg_i et les distances entre sommets D_i mesurées en aller-retour (figure 2).

Traitement d'un cheminement polygonal et écarts de fermeture

Le traitement d'un cheminement polygonal est réalisé en deux étapes :

- le calcul des gisements des côtés (et des orientations des stations aux sommets) ;
- le calcul des coordonnées planimétriques des sommets.

La première étape est entièrement indépendante de la seconde, c'est-à-dire que les distances entre sommets n'influencent pas le calcul des gisements des côtés. Par contre, les paramètres angulaires de la première étape vont intervenir dans le calcul des coordonnées planimétriques : nous verrons par la suite que cet élément est important lors des calculs de tolérance. Dans toutes les formules suivantes, n représente le nombre de côtés du cheminement et i l'indice d'un sommet, y compris les points de départ ($i=0$) et d'arrivée ($i=n$).

■ Première étape : gisements des côtés

Nous considérons ici que les orientations des points de départ $G_0(d)$ et d'arrivée $G_0(a)$ sont connues. En notant αg_i l'angle à gauche du sommet i et lav_i les lectures avant, lar_i les lectures arrière, nous pouvons calculer l'orientation du point d'arrivée issu des mesures angulaires $g_0(a)$:

$$g_0(a) = G_0(d) + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha g_i) - n \times 200 = G_0(d) + \sum_{i=0}^{n-1} (lav_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (lar_i) - n \times 200$$

Utiliser les lectures plutôt que les angles permet de traiter la lecture arrière de la station de départ et la lecture avant de la station d'arrivée dans les orientations (détermination des G_0) et évite de les comptabiliser deux fois dans les traitements des erreurs. L'écart de fermeture angulaire du cheminement vaut ainsi :

$$f\alpha = g_0(a) - G_0(a) \quad \text{ou} \quad f\alpha = G_0(d) + \sum_{i=0}^{n-1} (lav_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (lar_i) - n \times 200 - G_0(a) \quad (\text{équation 1})$$

■ Seconde étape : coordonnées planimétriques des sommets

Comme indiqué précédemment, le calcul des coordonnées planimétriques implique l'utilisation des distances entre sommets, mais également des gisements G_j des côtés, puisque le calcul revient à faire des transformations de coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires.

Les coordonnées des points de départ ($x_d ; y_d$) et d'arrivée ($x_a ; y_a$) sont connues.

Les coordonnées du point d'arrivée ($x_{a_c} ; y_{a_c}$) calculées à partir des mesures et des gisements des côtés compensés dans la première étape de traitement sont :

$$\begin{cases} x_{a_c} = x_d + \sum_{j=1}^n (D_j \cdot \sin G_j) \\ y_{a_c} = y_d + \sum_{j=1}^n (D_j \cdot \cos G_j) \end{cases}$$

Les écarts de fermeture planimétriques en abscisse et ordonnée du cheminement valent :

$$\begin{cases} fx = x_{a_c} - x_a \\ fy = y_{a_c} - y_a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} fx = x_d + \sum_{j=1}^n (D_j \cdot \sin G_j) - x_a \\ fy = y_d + \sum_{j=1}^n (D_j \cdot \cos G_j) - y_a \end{cases} \quad (\text{équation 2a})$$

La fermeture planimétrique étant la distance euclidienne entre le point d'arrivée mesuré/calculé et celui connu, elle vaut :

$$fp = \sqrt{fx^2 + fy^2} \quad (\text{équation 2b})$$

Les formules de base du traitement d'un cheminement polygonal étant posées, on peut définir les tolérances dans lesquelles doivent entrer les fermetures angulaires et planimétriques.

Détermination des tolérances sur les fermetures

La valeur d'une tolérance est calculée en s'appuyant sur les précisions des matériels utilisés (stations totales, prismes, etc.) et des méthodes employées (visées sur canne, centrage forcé, etc.). Les précisions des matériels sont fournies par les constructeurs, en général sous la forme d'écarts-types. Celles des méthodes employées sont souvent plus difficiles à estimer et nécessitent un peu d'expérience du topographe.

■ Combinaison des erreurs aléatoires

Les valeurs de ces précisions établies, il faut les combiner en utilisant la loi de combinaison des erreurs aléatoires (souvent appelées erreurs accidentelles en topographie). L'écart-type sur R , résultat de la combinaison de n mesures M_i de précision (écart-type) σ_i vaut :

$$\text{si } R = f(M_1, M_2, \dots, M_n), \quad \sigma_R = \pm \sqrt{f'(M_1)^2 \times \sigma_1^2 + f'(M_2)^2 \times \sigma_2^2 + \dots + f'(M_n)^2 \times \sigma_n^2} \quad (\text{équation 3})$$

■ Calcul de la tolérance

Comme précisé dans l'annexe G du Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure du JCGM (2008), la valeur de la tolérance à 99 % (seuil communément admis) est égale à :

$$T_{99\%} = 2,58 \times \sigma_R \quad (\text{équation 4})$$

Application au cheminement polygonal

■ Fermeture angulaire f_α

L'équation 1 montre que la fermeture angulaire est fonction des gisements origines de départ et d'arrivée et des lectures angulaires en chaque sommet, soit :

$$f\alpha = f(G_0(d), G_0(a), l_i) \quad \text{et} \quad \sigma_{f\alpha} = \pm \sqrt{f'^2(G_0(d)) \times \sigma_{G_0(d)}^2 + f'^2(G_0(a)) \times \sigma_{G_0(a)}^2 + 2 \times n \times f'^2(l_i) \times \sigma_l^2}$$





Ce qui donne :

$$\sigma_{ra} = \pm \sqrt{\sigma_{G_0(d)}^2 + \sigma_{G_0(a)}^2 + 2 \times n \times \sigma_l^2}$$

et $T_{ra} = 2,58 \times \sigma_{ra} = 2,58 \times \sqrt{\sigma_{G_0(d)}^2 + \sigma_{G_0(a)}^2 + 2 \times n \times \sigma_l^2}$ (équation 5a)

La précision sur les lectures angulaires est donnée par les constructeurs selon la norme ISO17123-3 pour une lecture moyenne en position I (cercle à gauche) et II (cercle à droite) après double retournement, ce qui est normalement réalisé lors de la mesure d'un cheminement polygonal. Cette imprécision de l'instrument de mesure est amplifiée en se combinant avec celles sur le centrage et le pointé, comme nous le verrons par la suite. La précision sur les orientations de départ $G_0(d)$ et d'arrivée $G_0(a)$ est fonction de différents paramètres dont les principaux sont celles du centrage de la station et du pointé sur les points de référence. Ces écarts linéaires doivent être transformés en écarts angulaires. Pour simplifier, nous considérons que les précisions sur $G_0(d)$ et $G_0(a)$ sont égales et nous les dénommerons σ_{G_0} . Ce qui donne finalement pour la tolérance sur la fermeture angulaire :

$$T_{ra} = 2,58 \times \sqrt{2 \times \sigma_{G_0}^2 + 2 \times n \times \sigma_l^2}$$
 (équation 5b)

■ Fermeture planimétrique f_p

L'équation 2 montre que la fermeture planimétrique est fonction des coordonnées des points de départ et d'arrivée, des distances entre les sommets et des gisements des côtés. Pour simplifier, on définit la précision relative entre les points de départ et d'arrivée (pos_{da}) qui est fonction de la racine carrée de la distance entre ces points (avec a une valeur fixée et D_{da} la distance) :

$$\sigma_{pos_{da}} = \pm a \times \sqrt{D_{da}}$$

Soit :

$$fp = f(pos_{da}, D_i, G_j)$$

et $\sigma_{fp} = \pm \sqrt{f'^2(pos_{da}) \times \sigma_{pos_{da}}^2 + \sum_{i=1}^n (f'^2(D_i) \times \sigma_{D_i}^2) + \sum_{j=1}^n (f'^2(G_j) \times \sigma_{G_j}^2)}$

Ce qui donne⁴ :

$$\sigma_{fp} = \pm \sqrt{\sigma_{pos_{da}}^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_{D_i}^2) + \sigma_{\alpha_g}^2 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2)}$$

et $T_{fp} = 2,58 \times \sqrt{\sigma_{pos_{da}}^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_{D_i}^2) + \sigma_{\alpha_g}^2 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2)}$ (équation 6)

avec L_j les n distances entre le point d'arrivée et chaque sommet du cheminement, point de départ compris.

Relation avec les tolérances de l'arrêté du 21 janvier 1980

Les tolérances calculables avec les formules données dans cet arrêté sont issues des équations 5 et 6. Les précisions prises en compte ont été définies en fonction des appareils de mesure de l'époque et suivant deux catégories, ordinaire et de précision, pour deux types de canevas.

Le canevas d'ensemble est un "canevas planimétrique déterminé par des opérations de mesures sur le terrain, matérialisé de façon durable par des bornes ou des repères et suffisam-

4. La démonstration de l'équation 6 est donnée en encadré.

ment dense pour étayer le réseau sur lequel s'appuie le lever des détails."

Le canevas polygonal "constitue un trait d'union entre le canevas d'ensemble et le lever des détails."

Pour cette étude sur des cheminements polygonaux de faible dimension (dans leur emprise et leur nombre de stations) et destinée au lever de points de détails, nous considérerons donc les formules données pour un canevas polygonal au titre de l'arrêté du 21 janvier 1980.

Cet arrêté précise également que "Le canevas ordinaire est un canevas [...] dont la tolérance sur l'erreur en distance entre deux points est égale à 20 cm". Cela correspond, si l'on divise cette tolérance par 2,58, à un écart-type de $\pm 7,8$ cm. Pour un canevas de précision, cette tolérance est de 4 cm, soit un écart-type de $\pm 1,6$ cm (tableau 1).

Catégorie du canevas	Tolérance sur l'erreur en distance entre 2 points	Écart-type sur la distance entre 2 points
ordinaire	20 cm	$\pm 7,8$ cm
de précision	4 cm	$\pm 1,6$ cm

Tableau 1. Précision des canevas suivant l'arrêté du 21 janvier 1981.

On voit ainsi que les précisions actuelles que l'on peut atteindre dans la mesure des canevas sont largement inférieures à celles de la catégorie de précision. L'objectif est donc de voir si l'utilisation de l'arrêté du 21 janvier 1980 peut être appliquée de nos jours en se référant aux formules en catégorie de précision (tableau 2) ; celles données en catégorie ordinaire donnent des tolérances beaucoup trop larges.

Tolérance sur la fermeture angulaire T_{ra} en mgon	Tolérance sur la fermeture planimétrique T_{fp} en cm
$0,1 \times \sqrt{1296 + 3600 \times (n+1)}$ (équation 7)	$\sqrt{16 + 16 \times n + 160 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2) + 30 \times L}$ (équation 8)
Paramètres : n : nombre de côtés du cheminement L_j : distance rectiligne, exprimée en km, entre le point d'arrivée du cheminement et chaque sommet (y compris le point de départ) L : longueur totale du cheminement en km	

Tableau 2. Tolérances pour un canevas polygonal de précision (arrêté du 21 janvier 1980).

Précisions angulaires et linéaires issues de l'arrêté du 21 janvier 1980

En reprenant le tableau 2, nous pouvons aisément faire le lien entre les structures des équations 5b et 7 d'un côté (fermeture angulaire) et les équations 6 et 8 d'un autre (fermeture planimétrique). Des précisions angulaires peuvent ainsi être extraites à partir des coefficients des équations 7 et 8. Ces précisions seront ensuite comparées à celles des stations modernes. On peut retrouver cette analyse dans l'article d'Henri Desportes (revue XYZ n° 8 – Tolérances applicables aux levés à grande échelle) mais pour des canevas ordinaires.



■ Tolérance sur la fermeture angulaire (équations 5b et 7)

L'équation 7 peut s'écrire sous la forme :

$$T_{fa} = 2,58 \times \sqrt{7,355 + 5,408 \times n}$$

Par comparaison avec l'équation 5b, on a :

$$2 \times \sigma_{G_0}^2 = 7,355 \text{ soit } \sigma_{G_0} = \pm 1,9 \text{ mgon}$$

$$2 \times \sigma_1^2 = 5,408 \text{ soit } \sigma_1 = \pm 1,6 \text{ mgon}$$

La précision sur une lecture angulaire retrouvée ici est très proche de celle d'une station totale actuelle utilisée pour des travaux de topographie pour l'établissement de plans aux échelles conventionnelles du 1/100 au 1/500. Les précisions d'une station sur une lecture angulaire sont de $\pm 3''$ à $\pm 5''$ soit environ ± 1 mgon à $\pm 1,5$ mgon. Il y a donc bien une cohérence entre la précision angulaire utilisée dans les formules de l'arrêté du 21 janvier 1980 et celle des stations totales, sachant que celle-ci est augmentée par les imprécisions de centrage (sur le point de station et sur le point visé) et de pointé. Celles-ci peuvent également expliquer la valeur de l'imprécision sur les orientations légèrement supérieure à celle sur les lectures angulaires. Les exemples à suivre seront significatifs sur ce point.

■ Tolérance sur la fermeture planimétrique (équations 6 et 8)

L'équation 8 peut s'écrire sous la forme (avec T_{fp} et L_j en m) :

$$T_{fp} = 2,58 \times \sqrt{2,404 \times 10^{-4} + 2,404 \times 10^{-4} \times n + 24,037 \times 10^{-10} \times \sum_{j=1}^n (L_j^2) + 4,507 \times 10^{-7} \times L}$$

Par comparaison avec l'équation 6, on a :

$$\sigma_{ag}^2 = 24,037 \times 10^{-10} \text{ soit } \sigma_{ag} = \pm 4,9 \times 10^{-5} \text{ rad} = \pm 3,1 \text{ mgon et } \sigma_1 = \pm 2,2 \text{ mgon}$$

Le même type de calcul peut être effectué pour évaluer une précision sur les mesures de distance et sur la position relative des points de départ et d'arrivée. Les premier et deuxième termes sous la racine correspondent, en considérant que tous les côtés ont des longueurs proches. On obtient ainsi :

$$\sigma_{pos_{xx}}^2 = \sigma_{D_1}^2 = 2,404 \times 10^{-4} \text{ soit } \sigma_{pos_{xx}} = \sigma_{D_1} = \pm 1,6 \text{ cm}$$

Nous retrouvons l'écart-type sur la distance entre deux points pour un canevas polygonal de précision (tableau 2) ce qui confirme la cohérence démontrée pour les précisions angulaires. La précision sur la position relative des points extrémités du cheminement reste acceptable, celle-ci étant le plus souvent issue de mesures par méthodes GNSS.

Par contre, l'écart-type sur une mesure de distance de $\pm 1,6$ cm est élevé par rapport aux précisions actuelles des distances-mètres qui sont de l'ordre de $\pm (2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$, soit $\pm 2,1$ mm pour une distance de 100 m. Nous verrons ensuite comment ces précisions actuelles pourraient être intégrées dans les formules de calcul de tolérance.

Le quatrième terme ($30 L$) n'est pas intégré dans la comparaison pour le moment. Il peut cependant être comparé avec l'incertitude longitudinale due à l'imprécision de centrage et pointé.

Nous pouvons déduire de cette première analyse que :

- les ordres de grandeur des précisions angulaires sont corrélés entre les mesures actuelles et les formules de l'arrêté du 21 janvier 1980, les tolérances sur les fermetures angulaires paraissent donc toujours adaptées de nos jours ;

- les valeurs des tolérances en planimétrie issues de l'arrêté du 21 janvier 1980 sont amplifiées par les précisions sur les mesures de distance qui ont été largement améliorées en 40 ans, les tolérances sur les fermetures planimétriques doivent donc être adaptées pour être utilisées de nos jours.

Application à un cas pratique : cheminement encadré

Les caractéristiques du cheminement sont données dans le tableau 3.

Caractéristiques du cheminement	
Nombre de côtés (n)	6
Longueur moyenne des côtés (D_j)	50 m
Visées de références (orientation)	2 à chaque extrémité, références à 100 m
Station totale (précisions)	
Précision angulaire (σ_1)	$\pm 3''$ soit ± 1 mgon
Précision linéaire (σ_D)	$\pm (2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$
Méthodes d'acquisition (précisions)	
Précision de centrage / pointé (σ_{cp})	± 2 mm
Précision relative des points de départ et arrivée (σ_{pos})	$\pm 1,6$ cm (mesures GNSS corrélées avec l'arrêté du 21 janvier 1980)

Tableau 3. Caractéristiques du cas d'étude (cheminement polygonal encadré).

■ Tolérance sur la fermeture angulaire

Suivant l'arrêté du 21 janvier 1980, on a :

$$T_{fa} = 0,1 \times \sqrt{1296 + 3600 \times 6} \text{ soit } T_{fa} = 15,1 \text{ mgon}$$

Nous allons ensuite déterminer cette tolérance, mais "personnalisée", à partir des caractéristiques du cheminement polygonal et du matériel utilisé. Les conditions de détermination des orientations (G_0) au départ et à l'arrivée étant les mêmes, on utilise l'équation 5b. L'écart-type sur une lecture angulaire est la combinaison des imprécisions de l'appareil avec celles dues au centrage/pointé (σ_{cp}). Les longueurs des côtés étant de 50 m en moyenne, on a :

$$\sigma_{cp_i} = \arctan\left(\frac{\sigma_{cp}}{D}\right) \text{ soit } \sigma_{cp_i} = \pm 2,5 \text{ mgon}$$

$$\text{et } \sigma_{1\alpha} = \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_{cp_i}^2} \text{ soit } \sigma_{1\alpha} = \pm 2,7 \text{ mgon}$$

Pour la précision des orientations (G_0), on recalcule σ_1 mais pour des distances de 100 m, soit $\sigma_{1\alpha} = \pm 1,6$ mgon. Ayant visé deux références, on a : $\sigma_{G_0} = \frac{\sigma_{1\alpha}}{\sqrt{2}}$ soit $\sigma_{G_0} = \pm 1,1$ mgon

On obtient finalement une tolérance sur la fermeture angulaire de : $T_{fa} = \pm 24,8$ mgon

Il apparaît que la tolérance pour un canevas de précision d'après l'arrêté du 21 janvier 1980 est très inférieure à celle trouvée en appliquant les caractéristiques "réelles" du cheminement polygonal. La figure 3 confirme ce résultat quel que soit le nombre de côtés du cheminement, l'écart s'amplifiant quand ce nombre augmente. En analysant les composantes de la combinaison quadratique de la formule de calcul de tolérance, on voit que la précision sur les angles (2,7) a un poids beaucoup plus important que celle sur les orientations (0,9). Une de ces caractéristiques que l'on peut aisément faire varier pour améliorer la précision sur les angles est la préci-



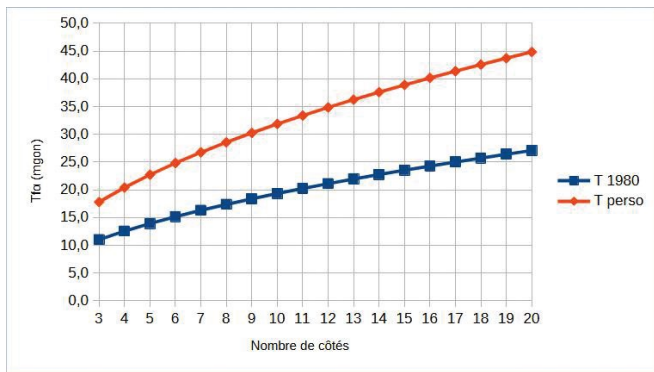


Figure 3. Tolérances sur la fermeture angulaire suivant le nombre de côtés.

sion de centrage/pointé que l'on a estimé à ± 2 mm, l'autre composante étant la précision de l'instrument de mesure difficilement modifiable. Le même calcul en estimant cette précision à ± 1 mm donne des tolérances sur la fermeture angulaire pratiquement corrélées (figure 4) : nous sommes dans ce cas proche de la méthode du centrage forcé sur trépieds. Il est à noter que l'autre paramètre pouvant être modifié, dans une moindre mesure, est le nombre de références utilisées pour l'orientation du cheminement au départ et à l'arrivée. Cependant, le calcul montre que l'augmentation de ce nombre de références d'une unité n'influe que sur le décimilligrade au niveau de la tolérance, ce qui reste négligeable.

Tolérance sur la fermeture planimétrique

En reprenant l'équation 6, on voit que la tolérance sur la fermeture planimétrique va dépendre de trois facteurs indépendants : la précision sur la position relative des points de départ et d'arrivée, la précision sur la mesure des distances et la précision sur la mesure des angles. Une analyse rapide permet de constater que le premier facteur est largement prédominant sur les deux autres (de l'ordre du centimètre contre le millimètre). Ceci est vrai pour un cheminement encadré, mais ne l'est plus pour un cheminement fermé puisque les points de départ et d'arrivée sont confondus (le premier facteur étant nul dans ce cas).

En reprenant l'exemple précédent, on a :

- un écart-type sur la position relative des points de départ et d'arrivée de $\pm 1,6$ cm ;
- un écart-type sur chaque distance D_i de $\pm 2,1$ mm à 50 m, soit $\pm 1,5$ mm sur la distance moyenne aller-retour ;

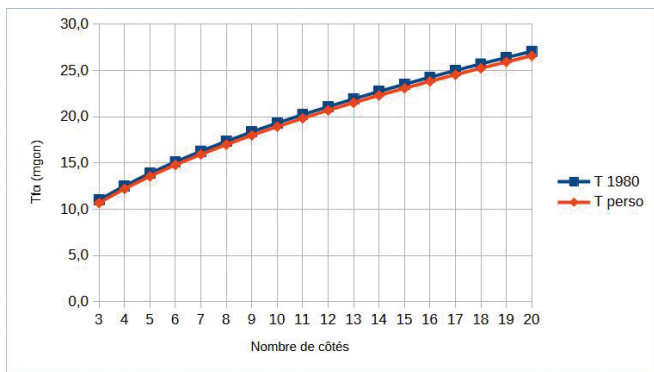


Figure 4. Tolérances sur la fermeture angulaire suivant le nombre de côtés (centrage forcé).

- une somme des carrés des distances L_j^2 maximale si le cheminement est tendu (côtés alignés) soit $L_1=50$ m, $L_2=100$ m, ..., $L_6=300$ m ;
 - une imprécision angulaire de $\pm 1,0$ mgon.
- On obtient alors une tolérance de l'ordre de 4,8 cm.

Suivant l'arrêté du 21 janvier 1980, on a :

$$T_{fp} = \sqrt{16 + 16 \times n + 160 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2) + 30 \times L} \text{ soit } T_{fp} = 12,5 \text{ cm}$$

Le fait de trouver une tolérance très supérieure à celle calculée avec les précisions actuelles est logique (figure 5). En effet, les deux premiers coefficients de 16 inclus dans la formule de l'arrêté du 21 janvier 1980 correspondent à un écart-type de $\pm 1,6$ cm sur la position relative des points d'appui et sur les distances mesurées, comme démontré précédemment. En prenant cette valeur d'incertitude sur les mesures de distance, on retrouve une valeur très proche de 11,2 cm pour la tolérance calculée à partir des paramètres réels, valeur s'approchant de celle déterminée avec l'arrêté du 21 janvier 1980.

Ces résultats nous permettent de conclure que, pour un cheminement encadré, la tolérance sur la fermeture planimétrique dépend actuellement principalement de la précision de la position relative des points fixés au départ et à l'arrivée. Logiquement, plus le nombre de côtés du cheminement va augmenter, plus l'imprécision sur la mesure des distances va prendre de l'importance dans ce calcul, et dans une moindre mesure celle sur les lectures angulaires. Les tolérances sur la fermeture planimétrique d'un cheminement polygonal issues de l'arrêté du 21 janvier 1980 utilisées encore couramment sont donc plus affectées par l'évolution des instruments de mesure de distance que celles sur la fermeture angulaire. Elles sont surévaluées et mériteraient une adaptation aux précisions des instruments actuels de mesure de distance.

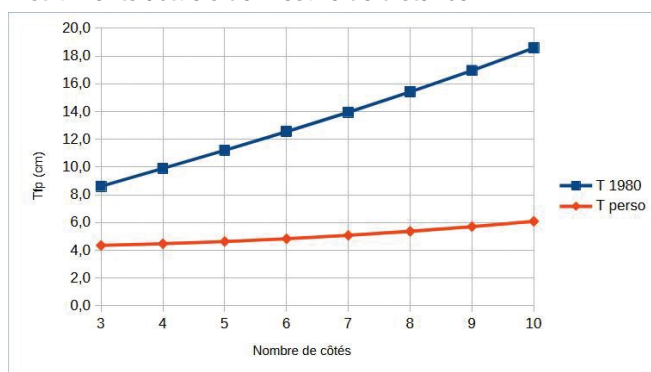


Figure 5. Tolérances sur la fermeture planimétrique suivant le nombre de côtés.

Adaptation aux outils actuels d'acquisition des données

Toujours en prenant comme exemple un cheminement encadré avec des côtés de 50 m en moyenne, on peut ainsi essayer d'adapter la courbe bleue (tolérances de l'arrêté du 21 janvier 1980) à la courbe rouge (tolérances personnalisées) en divisant les valeurs par un facteur unique, quel que soit le nombre de côtés. L'étude est limitée à un nombre de côtés compris entre 3 et 10. La figure 6 montre les valeurs des tolérances de l'arrêté du 21 janvier 1980 divisées par des facteurs de 2, 2,5 et 3 et la

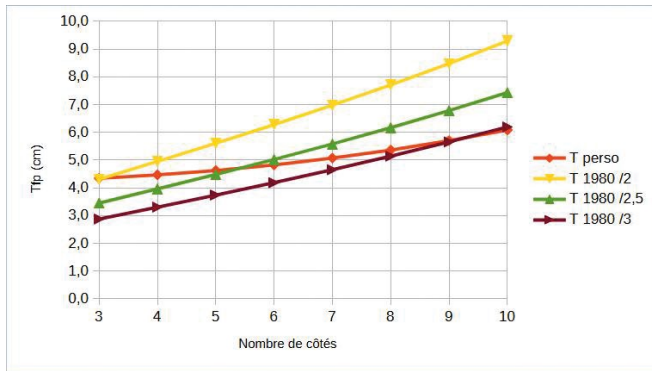


Figure 6. Corrélation entre les tolérances sur la fermeture planimétrique en appliquant 3 facteurs.

comparaison avec celles personnalisées. On peut ainsi voir que :
 - un facteur 2,5 serait le plus adapté pour des cheminements comportant jusqu'à 7 côtés ;
 - un facteur 3 est plus approprié à partir de 8 côtés.

Ces résultats sont toujours valables si la précision de centrage/pointé est abaissée à ± 1 mm (centrage forcé) plutôt que ± 2 mm initialement choisi, l'influence sur la tolérance personnalisée n'étant que de quelques millimètres.

Ces résultats permettent d'avoir un ordre de grandeur de coefficient(s) permettant d'adapter les tolérances de l'arrêt du 21 janvier 1980 aux acquisitions actuelles pour les fermetures planimétriques des cheminements polygonaux. L'exemple de cheminement choisi comprend des côtés de 50 m de longueur moyenne. On remarque que le coefficient à utiliser tend vers 3 si ces longueurs augmentent. Inversement, si les longueurs sont plus courtes, le coefficient se rapproche de 2,5, mais ce cas de côté court va surtout avoir une influence sur la fermeture angulaire comme nous allons le voir par la suite.

Cas particulier du cheminement fermé

Dans le cas d'un cheminement fermé, il n'y a plus à prendre en compte la précision relative entre les points de départ et d'arrivée puisqu'ils sont confondus.

Pour la fermeture angulaire, la cohérence entre les tolérances calculées par les deux méthodes reste valable. Pour la fermeture planimétrique, les résultats sont très influencés par le fait d'enlever l'imprécision relative entre les points de départ et d'arrivée. Dans ce cas, le facteur d'adaptation à utiliser est plus proche de 4,5, voire 5 (figure 7).

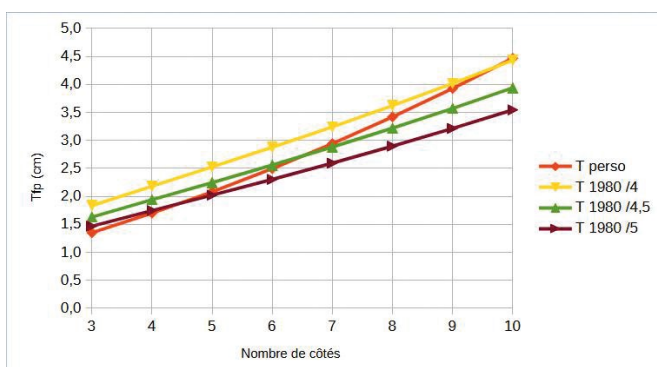


Figure 7. Corrélation entre les tolérances sur la fermeture planimétrique en appliquant trois facteurs (cheminement fermé).

Cas particulier des côtés courts

Des côtés courts dans un cheminement polygonal entraînent une augmentation de l'imprécision angulaire due aux précisions angulaires de la station totale, mais surtout de centrage. Dans ce cas, la fermeture planimétrique va être peu influencée (quelques millimètres) alors que la fermeture angulaire va fortement augmenter. L'arrêt du 21 janvier 1980 n'est pas prévu pour ce type de cheminement avec des côtés courts, on obtient donc des tolérances qui peuvent paraître aberrantes en restant beaucoup trop faibles (figure 8).

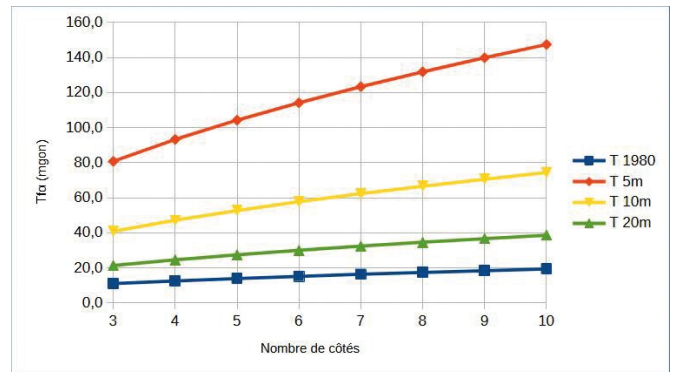


Figure 8. Tolérances sur la fermeture angulaire suivant la longueur des côtés.

Un rapport de 40 sur la longueur moyenne des côtés peut donner un ordre de grandeur du facteur multiplicateur à prendre en compte. Par exemple, pour un cheminement de 6 côtés de 10 m de moyenne, la tolérance issue de l'arrêt du 21 janvier 1980 est de 15,1 mgon. Le facteur de 4 donne une valeur de 60 mgon environ qui est proche de la tolérance personnalisée de 57,7 mgon.

Conclusion

Comme cela était envisagé, ce sont surtout les tolérances sur la fermeture planimétrique d'un cheminement polygonal de faible envergure (moins de 10 côtés, longueurs inférieures à 100 m) qui sont affectées par les évolutions des instruments d'acquisition des données (stations totales) depuis la mise en place de l'arrêt du 21 janvier 1980. Les différentes analyses effectuées montrent bien que les évolutions des précisions dans les mesures de distance rendent obsolètes les tolérances de 1980 sur les fermetures planimétriques, des coefficients de réduction de 3 ou 4 devant être appliqués pour concorder avec les précisions actuelles.

De plus, plus les côtés du cheminement sont courts, moins les tolérances du 21 janvier 1980 sont adaptées, en particulier pour les fermetures angulaires. Ceci est dû au fait que ces tolérances ne tiennent pas compte de l'imprécision angulaire issue des imprécisions linéaires (centrage et pointé en particulier) et qu'elles sont conçues pour des cheminements avec des côtés relativement longs. Dans ce cas (côtés courts), il faudrait multiplier les tolérances de 1980 par un coefficient de $40 / L_m$, L_m étant la longueur moyenne des côtés : les deux calculs de tolérance sur la fermeture angulaire sont ainsi bien corrélés pour des longueurs autour de 40 m.



L'ensemble de ces résultats montrent également que pour être obtenus, les règles de l'art doivent être respectées lors des acquisitions :

- effectuer des mesures angulaires par double retournement pour des points de canevas ;
- mesurer les distances en aller-retour ;
- prendre au minimum deux références angulaires à chaque extrémité du cheminement, trois étant préférable pour un contrôle, ces références étant relativement éloignées (un bon ordre de grandeur peut être deux fois la longueur du plus long côté du cheminement) ;
- réserver une grande attention au centrage de la station et du réflecteur et essayer de pointer verticalement le plus proche possible du point visé ; le cas échéant, effectuer du centrage forcé, en particulier s'il y a des côtés courts.

Respecter ces règles de l'art reste indispensable pour répondre aux exigences des tolérances, que ce soit celles de l'arrêté de 1980 ou celles personnalisées. ●

Contact

Ghyslain FERRÉ professeur certifié en topographie, ESGT/CNAM
ghyslain.ferre@lecnam.net

Références

- Daniel Villesuzanne (1988). *Le Calcul du géomètre*, Éditions Eyrolles,
- Henri Desportes (1981). *Tolérances applicables aux levés à grande échelle* Revue XYZ n° 8.
- Arrêté du 21 janvier 1980 fixant les tolérances applicables aux levés à grande échelle entrepris par les services publics.
- Arrêté du 16 septembre 2003 portant sur les classes de précision applicables aux catégories de travaux topographiques réalisés par l'État, les collectivités locales et leurs établissements publics ou exécutés pour leur compte.
- JCGM 100:2008 - *Évaluation des données de mesure - Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (2008).
- Jean Lagofun et Serge Milles (1999) "Brabant" *Topographie et topométrie modernes*, Éditions Eyrolles.
- Michel Brabant (2011). *Topographie opérationnelle*, Éditions Eyrolles.

ABSTRACT

The French decree of 21 January 1980, which defined the tolerances to be applied in validating traverse calculations, remained in force for decades. Another decree, issued on 16 September 2003, sought to replace the aforementioned decree by establishing precision classes. However, the practical application of these classes has proven to be challenging, particularly in the context of small area land surveying projects. The previous decree of 1980 is still employed by surveyors for self-control purposes. This article aims to examine the genesis of tolerances from two perspectives: firstly, from a mathematical standpoint, encompassing the formulation of equations; secondly, from a professional standpoint, encompassing the determination of parameter values. Furthermore, it seeks to provide users with a comprehensive understanding of these tolerances.

Tolérance sur la fermeture planimétrique d'un cheminement polygonal

La fermeture planimétrique d'un cheminement polygonal est fonction de trois paramètres :

- la position relative des points de départ et d'arrivée pos_{da} ;
- les i distances entre les sommets D_i ;
- les j directions (gisements) des côtés G_j .

$$fp = f(pos_{da}, D_i, G_j) \text{ et } \sigma_{fp} = \pm \sqrt{\sigma_{pos_{da}}^2 + \sigma_{1(D)}^2 + \sigma_{2(G)}^2}$$

a) Position relative des points de départ et d'arrivée : l'écart-type est fonction de la racine carrée de la distance D_{da} avec un coefficient "a" fixé selon la précision des positions de ces points, soit :

$$\sigma_{pos_{da}} = \pm a \times \sqrt{D_{da}}$$

b) Distances entre les sommets : on prend la somme quadratique des écarts-types sur chaque distance entre les côtés successifs, soit :

$$\sigma_{1(D)} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_{D_i}^2)}$$

c) Gisements de chaque côté : pour simplifier l'explication, on considère un cheminement de 3 côtés et 4 sommets ABCD (figure 9). L'imprécision angulaire sur le côté AB entraîne un écart linéaire d_1 sur point d'arrivée D. L'imprécision angulaire σ_α étant très faible, on peut écrire que (angles en radian) :

$$d_1 = AD \times \sigma_\alpha$$

De même pour les côtés BC et CD :

$$d_2 = BD \times \sigma_\alpha \text{ et } d_3 = CD \times \sigma_\alpha$$

En combinant quadratiquement ces écarts, on obtient l'écart moyen d :

$$d = \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = \pm \sigma_\alpha \times \sqrt{AD^2 + BD^2 + CD^2}$$

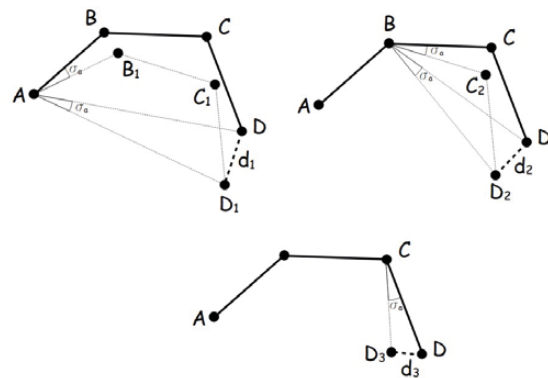


Figure 9. Imprécision sur les directions des côtés.

En généralisant et en notant L_j les distances entre chaque sommet du cheminement et le point d'arrivée, on a :

$$\sigma_{2(G)} = \pm \sigma_\alpha \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (L_j^2)}$$

Finalement, en combinant ces écarts-types, on obtient l'imprécision sur la fermeture planimétrique et la tolérance :

$$\sigma_{fp} = \pm \sqrt{\sigma_{pos_{da}}^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_{D_i}^2) + \sigma_\alpha^2 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2)}$$

$$\text{et } T_r = 2,58 \times \sqrt{\sigma_{pos_{da}}^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_{D_i}^2) + \sigma_\alpha^2 \times \sum_{j=1}^n (L_j^2)}$$