

Proposition d'une nouvelle méthode pour la compensation en bloc de lignes de base GNSS

■ Thomas TOUZÉ - Stéphane BOSCHER

Dans cet article, après un aperçu des principales méthodes de compensation des lignes de base GNSS en statique, nous proposons une variante s'appuyant sur les logiciels constructeurs pour le post-traitement, le logiciel suisse LTOP de compensation des mesures topométriques par la méthode des moindres carrés et la proposition d'un modèle stochastique simplifié de ces lignes de base. Nous présentons également les résultats sur un réseau récemment traité par EDF dans les Pyrénées.

■ **MOTS-CLÉS**
GNSS, post-traitement, compensation par moindres carrés

avant quelques problématiques justifiant notre démarche.

■ Pivot central

La méthode du pivot central est décrite dans [Legros, 2012] et schématisée en figure 1. Elle est fréquemment employée dans la création ou le suivi de réseaux d'auscultation d'ouvrages d'art. Parmi les points d'un chantier à positionner par GNSS par rapport à des points de référence (tels que des stations permanentes), on commence par choisir celui qui servira de pivot central (voir disque rouge en figure 1) sur la base de critères tels que :

- le pivot a une position proche du barycentre du chantier afin de minimiser la longueur des lignes de base locales ;
- le pivot a des conditions de mesurage optimales (faible masquage, minimum de multitrajet, meilleur GDOP, etc.) ;
- le pivot maximise la durée d'observation pour chaque ligne de base.

En prenant chaque point de référence ainsi que la ligne de base associée qui le relie au pivot, il est possible d'obtenir une estimation de la position de ce dernier. Les coordonnées finales

Introduction

L'année dernière, nous avons écrit la lettre ouverte [Touzé, 2022] dans laquelle nous regrettons l'absence d'un modèle stochastique des observables GNSS. Cet article, en quelque sorte, en est le prolongement. En effet, lors de post-traitements en mode statique de lignes de base GNSS, que l'on applique les méthodes reconnues en géodésie, via le pivot central par exemple, ou que l'on utilise le calcul en bloc de toutes les lignes de base, sans se poser de question sur la surabondance, survient la problématique de la pondération.

Ensuite, la compensation par moindres carrés, si elle est possible depuis de nombreux logiciels constructeurs, ne peut pas toujours être menée de manière idéale, sans même parler de la pondération, faute de modèles fonctionnels adaptés, ni d'indicateurs statistiques respectant l'état de l'art. Nous proposons donc ici une méthodologie qui s'appuie sur les logiciels des constructeurs pour le post-traitement et qui se complète par une compensation sur LTOP selon la méthode des moindres carrés. Pour ce faire, nous proposerons un modèle stochastique des lignes de base GNSS s'appuyant, autant que faire se peut, sur l'état de l'art, mais aussi (et nous nous en excusons) sur du "doigt mouillé".

Méthodes habituelles de post-traitement des lignes de base

Si nous considérons n points équipés de récepteurs GNSS et mesurant simultanément, nous pouvons dénombrer

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} \text{ lignes de base parmi } n-1$$

vecteurs indépendants. De ce constat émergent deux familles de traitement : la première où on ne s'appuie que sur $n-1$ lignes de base sélectionnées selon des critères géométriques ; la seconde où toutes les lignes de base sont traitées et prises en compte dans le calcul de la solution.

Dans cette section, nous allons brièvement décrire ces méthodes et mettre en

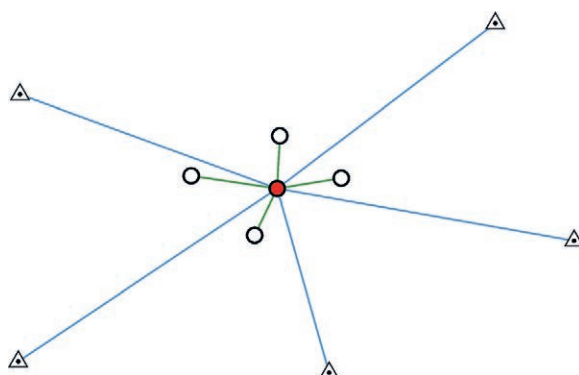


Figure 1. Schéma de principe de la méthode du pivot central. Le pivot (disque rouge) approximativement au centre du chantier, est positionné par rapport à des points de référence (triangles). Cela fait, les autres points du chantier peuvent être positionnés relativement au pivot.



du pivot s'obtiennent alors par la moyenne arithmétique ou la moyenne pondérée de ces estimations.

Connaissant désormais la position du pivot, tous les autres points s'obtiennent à l'aide des lignes de base les reliant à ce dernier. Si le pivot est bien central, cette méthode permet d'optimiser la fidélité [BIPM, 2008] des points du chantier. Mais faute de surabondance locale, cette fidélité ne peut être estimée. La justesse [BIPM, 2008] peut en revanche se déduire des écarts types des moyennes des coordonnées du pivot.

Cette méthode est simple, efficace et rigoureuse tant que le pivot respecte les critères listés précédemment. Cependant, nous notons les problématiques associées suivantes :

- comment pondérer les lignes de base reliant le pivot aux points de référence pour optimiser la justesse du résultat ?
- comment estimer la fidélité des coordonnées des points du chantier positionnés relativement au pivot ?
- comment procéder si aucune solution fixe n'est obtenue sur une ou plusieurs de ces lignes de base ?

■ Variantes sans surabondance des lignes de base

Si le pivot central est approprié en cas de chantier faiblement étendu par rapport à la distance aux points de référence, dans le cas contraire, [Bernese, 2015] propose d'autres critères de sélection sans surabondance des lignes de base, par exemple en cherchant la solution qui minimise leurs

longueurs (voir figure 2) ou leur dénivelée, ou qui maximise le nombre de satellites, etc.

Le calcul de la solution peut se faire de différentes manières. Nous proposons la suivante :

- attribution de coordonnées arbitraires à un des points ;
- à partir des lignes de base retenues, calcul des coordonnées initiales de tous les points ;
- calcul de la translation moyenne à partir des points de référence ;
- calcul des coordonnées finales en appliquant la translation moyenne ;
- estimation de la justesse moyenne à partir de l'écart type de la moyenne des translations.

Les problématiques de cette méthode sont similaires aux deux dernières mises en évidence pour le pivot central.

■ Compensation en bloc de toutes les lignes de base

C'est sans doute la méthode de post-traitement la plus fréquemment employée, car directement proposée par les logiciels constructeurs. Il est vraisemblable qu'il y ait quelques différences entre ceux-ci, mais à défaut de disposer des algorithmes employés, nous supposons que celles-ci sont faibles. Selon cette technique, toutes les combinaisons possibles de vecteurs, sans répétition, sont post-traitées (voir l'illustration sur le canevas schématique en figure 3).

S'agissant d'un post-traitement en statique, pour chaque ligne de base, on connaît, sur toutes les époques

considérées dans le calcul, la valeur moyenne du vecteur en coordonnées cartésiennes géocentriques, ainsi que les écarts types empiriques associés. Dès lors, il est possible d'estimer les coordonnées des points par la méthode des moindres carrés en pondérant les observations – c'est-à-dire les composantes des vecteurs – à leurs écarts types empiriques issus du post-traitement. Avec des coordonnées cartésiennes géocentriques, cet ajustement est linéaire.

Si cette méthode permet de disposer de tous les beaux outils associés aux moindres carrés (indicateurs de précision et de fiabilité, recherche de fautes, compensation libre, contrainte, trace minimale, etc.), elle a quand même une double faille dans la pondération des lignes de base.

Tout d'abord, les observations ne sont clairement pas indépendantes du fait de la prise en compte de toutes les lignes de base. En toute rigueur, il faudrait considérer des covariances dans la matrice de variance-covariance sur les observations, ce qui, à notre connaissance, n'est pas le cas.

Ensuite, les écarts types servant aux pondérations sont des valeurs empiriques déduites des dispersions constatées lors du post-traitement de chaque ligne de base. D'une part, ce ne sont pas les vrais écarts types, représentatifs des incertitudes des observations, ce qui requerrait des modèles d'incertitudes qui, à notre connaissance, ne sont pas disponibles à ce jour [Touzé, 2022]. D'autre part – et c'est là un point pernicieux, – l'écart

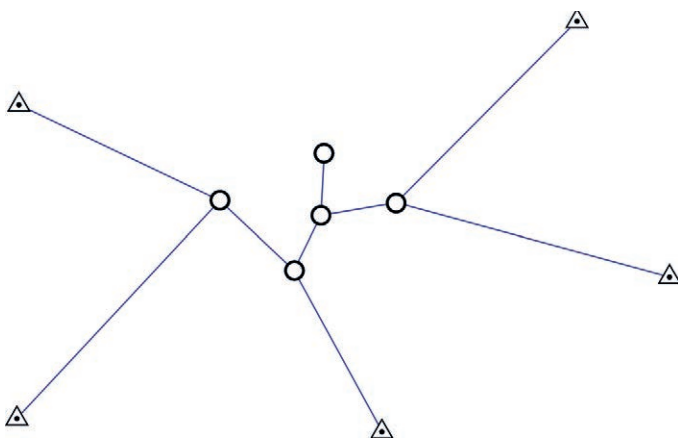


Figure 2. Sur la base du même canevas, autre combinaison des lignes de base sans surabondance en minimisant les longueurs.

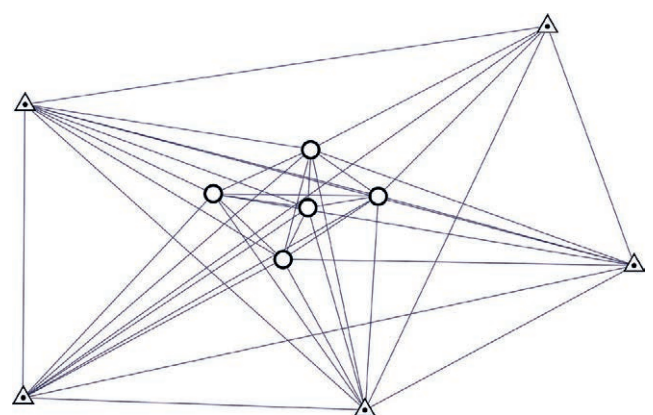


Figure 3. Toutes les lignes de base possibles sur le même canevas schématique.



type du post-traitement ne quantifie que la dispersion du résultat. Si ce dernier souffre d'un biais (par exemple à cause d'effets troposphériques sur une ligne de base avec de la dénivellée), alors cet écart type sous-estimera l'incertitude réelle de l'observation.

La conséquence de ces deux problèmes de pondération dans le calcul des moindres carrés se déduit du théorème de Gauss-Markov : la solution ne sera pas la meilleure, au sens où son incertitude ne sera pas optimale.

■ Réflexions sur l'indépendance des lignes de base

Plaçons-nous dans le cadre de la figure 4 et imaginons un réseau constitué des points A, B et C, mesurés simultanément en GNSS à un instant donné. Du fait des masquages variables sur les points, nous avons, pour chaque ligne de base, un nombre différent de satellites observés. Si géométriquement la somme des deux lignes de base AB et BC équivaut à AC, on comprend aisément que du point de vue des observables, ce n'est pas tout à fait exact : la ligne de base AC contient des informations de satellites non contenues dans AB ni AC.

Pour le géodésien en charge, par exemple, de stations permanentes sur de longues sessions, l'indépendance géométrique suffit. En effet, les stations sont généralement implantées dans des zones avec des conditions similaires et optimales de masquage et les très longues sessions moyennent les effets orbitaux. La variation du nombre moyen de satellites par ligne de base est de ce fait faible.

Le topographe, particulièrement en ville ou en montagne, n'est, quant à lui, pas toujours maître du masquage des points qu'il doit déterminer, ni de la durée des sessions. Que faire alors si le nombre de satellites va à l'encontre du choix des lignes de base requis pour appliquer le pivot central ? Une solution alternative pourrait consister à attribuer à chaque ligne de base un nombre compris strictement entre 0 et 1 et obtenu par le rapport de la valeur médiane du nombre de satellites de la ligne de base par le nombre

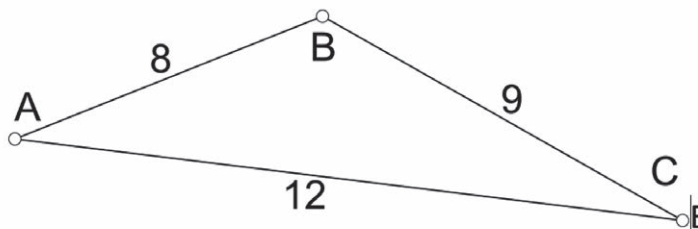


Figure 4. Canevas imaginaire de trois points dans lequel les conditions de masquage engendrent des nombres variables de satellites, par époque, et par ligne de base.

total de satellites observés lors de la campagne. La sélection des lignes de bases utilisables pour la compensation pourrait alors se faire de telle façon que :

- chacun des n points du chantier soit observé ;
- la somme de ces rapports soit égale à n-1 ;
- minimisation d'un critère de précision ou de fiabilité.

Un jour peut-être aurons-nous le temps d'investiguer cette idée.

Compensation 2D+1 par la méthode des moindres carrés pondérés

La proposition que nous faisons aujourd'hui dans cet article consiste à modifier la méthode de compensation en bloc de toutes les lignes de base, notamment au niveau du modèle stochastique. Cela va notamment requérir un traitement en 2D+1 plutôt qu'en coordonnées cartésiennes géocentriques et ce, pour permettre une pondération plus réaliste des composantes planimétriques et altimétriques des vecteurs GNSS face aux effets atmosphériques.

■ Proposition d'un modèle stochastique des lignes de base GNSS

Il nous semble raisonnable d'admettre que :

- l'incertitude altimétrique est moins bonne qu'en planimétrie (l'ordre de grandeur du rapport est de deux à trois) ;
- l'incertitude augmente avec la longueur de la ligne de base et la dénivellée ;
- l'incertitude baisse quand la durée d'observation augmente.

En statique, connaissant la fréquence d'acquisition, la durée d'observation est assimilable, en première approximation, au nombre d'époques prises en compte dans le calcul d'une moyenne. Ainsi, conformément au calcul de l'écart type d'une moyenne arithmétique, nous pouvons supposer que l'incertitude d'une ligne de base soit inversement proportionnelle à la racine carrée de la durée d'observation.

La relation avec la longueur est plus délicate. Ce doit être une fonction strictement croissante, mais quelle croissance choisir ? Il nous semble raisonnable que cette croissance soit plus faible qu'une fonction linéaire. Le choix a été arbitrairement fait de prendre une fonction

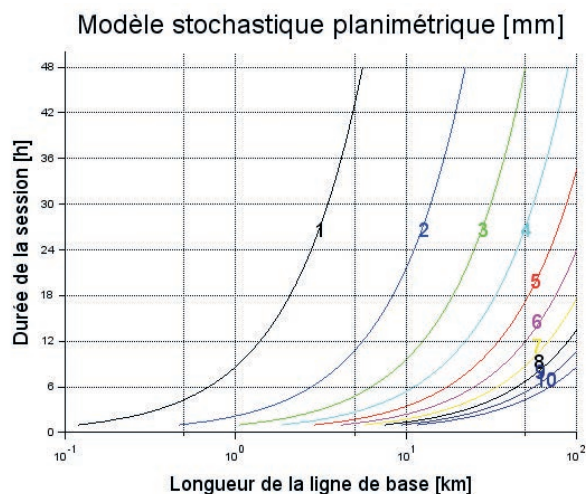


Figure 5. Modèle stochastique empirique de l'incertitude planimétrique, en mm, de lignes de base GNSS post-traitées en statique, en fonction de la distance en km et de la durée d'observation en heures.

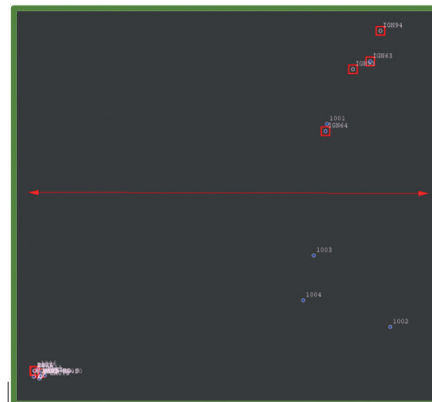
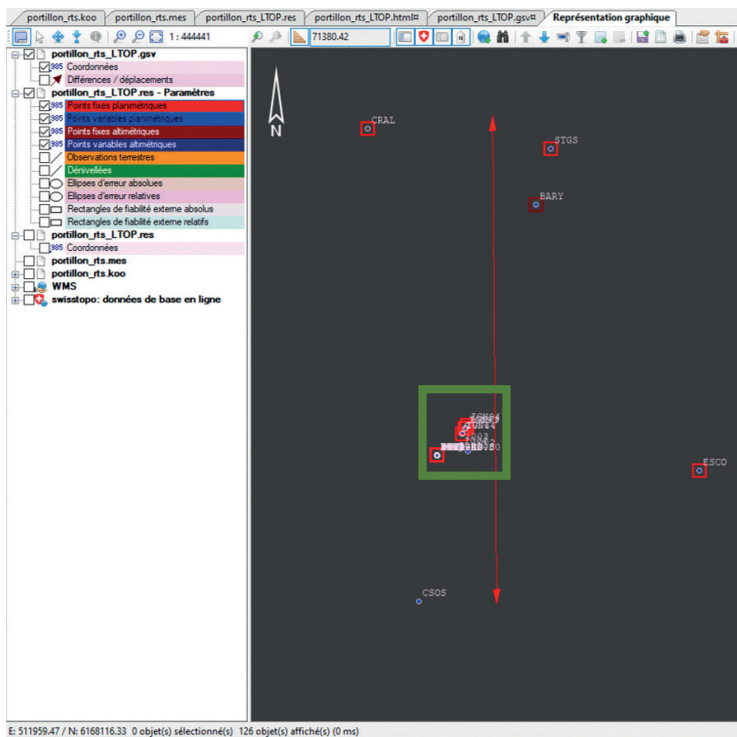


Figure 9. Rattachement simultané de plusieurs ouvrages EDF dans les Pyrénées s'appuyant sur des stations permanentes françaises, espagnoles et de l'EUREF. Les longueurs des flèches rouges sont, respectivement, de 70 km à gauche et 5 km à droite. Dans le réseau local, à droite, la dénivelée peut dépasser 1 000 m.

- Compensations sur LTOP :
 - ajout, dans le fichier de mesures d'éventuelles mesures supplémentaires de nivellement ou de tachéométrie ;
 - compensation "libre" (un unique point fixe en 2D+1) pour détecter les fautes et valider le modèle stochastique ;
 - compensation "libre ajustée" (coordonnées des points fixes comme observation) pour détecter les tensions parmi les points fixes ;
 - compensation "contrainte" dans laquelle les points fixes validés sont contraints.

Le modèle fonctionnel utilisé dans LTOP correspond aux différences de coordonnées. Ainsi, en *figure 7*, le code "ST" déclare la station, ou point de départ, tandis que les codes "DY", "DX" et "DH" déclarent, respectivement, les différences de coordonnées est projeté, nord projeté et les dénivelées (en Suisse, Y désigne l'est tandis que X désigne le nord). À noter que LTOP ne peut pas gérer de différences de coordonnées supérieures ou égales à 100 km. Ce modèle est suffisant si l'on souhaite travailler en coordonnées nationales. En coordonnées locales, une rotation ou un facteur d'échelle peuvent être requis, ce qui nécessite de déclarer des sessions de coordonnées.

Résultats

Pour justifier du bon fonctionnement de cette méthode, nous allons simplement vérifier si les indicateurs fournis par les moindres carrés dans la détection de fautes ont du sens une fois confrontés aux remontées du terrain. Nous allons présenter les résultats obtenus sur une campagne majeure que DTG a dû mener ces derniers mois pour le rattachement de plusieurs ouvrages dans les Pyrénées.

■ Pyrénées, vallée d'Oô

À proximité de la frontière avec l'Espagne et la Principauté d'Andorre,

plusieurs ouvrages EDF, dans la vallée d'Oô (*voir figure 8*), ont été rattachés en 2021 par des campagnes de GNSS statique (1 nuit d'observation) et du nivellement. Le calcul s'appuie (*voir carrés rouges en figure 9*) sur trois stations RGP au nord, une station permanente espagnole au sud et une station EUREF à l'est, ainsi que plusieurs repères de nivellement. La grille de conversion altimétrique employée était RAF18b. Le post-traitement des lignes de base a été effectué avec le logiciel Trimble Business Center dans sa version 5.60.

Point	Réseau	ΔE [mm]	ΔN [mm]	ΔH [mm]	σ plani [mm]	σ alti [mm]
BARY	RGP	1	4	Fixe	3	
CRAL	RGP	Fixe	Fixe	Fixe		
STGS	RGP	Fixe	Fixe	-12		9
ESCO	EUREF	Fixe	Fixe	-26		6
CSOS	Espagne	-2	-6	-7	4	9
44	NGF	/	/	1059		8
63	NGF	/	/	85		1
64	NGF	/	/	86		2
93	NGF	/	/	Fixe		
94	NGF	/	/	Fixe		

Tableau 1. Points fixes validés lors de la compensation libre ajustée, ainsi qu'écart et incertitudes à 99 % en mm sur les points fixes rejetés.



■ Résultats du calcul libre

Lors de la compensation libre, un unique point était fixé en 2D+1. Le calcul comportait 172 observations pour 60 inconnues en planimétrie et 102 observations pour 61 inconnues en altimétrie. La recherche de fautes, via la mise en évidence des résidus normés supérieurs en valeur absolue à un seuil fixé à 2.5, a conduit à légèrement dépendre une ligne de base en 2D+1 (à 5 mm et 15 mm) et trois lignes de base en altimétrie (à 10, 15 et 20 mm) impliquant un même point noté comme masqué par les équipes de terrain. Les quotients d'erreur moyenne étaient de 0.76 en planimétrie et 0.88 en altimétrie. Par rapport à la loi du Chi² à 99 %, ces résultats sont, respectivement, plus précis que prévu (borne inférieure à 0.84) en planimétrie et en adéquation (borne inférieure à 0.79) en altimétrie.

■ Validation des points fixes ou calcul libre ajusté

Lors de la compensation libre ajustée, parmi les cinq points de référence planimétriques, trois ont été conservés. Les deux références éliminées, BARY (RGP) et CSOS (Espagne) engendraient des tensions faiblement significatives de l'ordre de 5 mm (voir tableau 1).

En altimétrie, trois stations permanentes ont été rejetées dont les deux espagnoles, s'expliquant par le fait que la grille de conversion altimétrique RAF ne soit pas conçue pour aller aussi loin au-delà de la frontière. N'oublions pas non plus que nous sommes en haute montagne où l'incertitude de la grille est plus importante qu'en plaine. La station française du RGP rejetée est STGS avec un écart constaté de 12 mm faiblement significatif par rapport à son intervalle de confiance de 9 mm.

Pour les repères de nivellement, sur les quatre successifs dans la vallée (63, 64, 93 et 94), ils sont cohérents deux à deux, mais seuls les 93 et 94 coïncident avec les altitudes GNSS. Le 44 présente quant à lui un écart supérieur à 1 m. Celui-ci, en haute altitude, de manière précise et fiable, est incohérent avec l'altitude GNSS.

Une fois ces points validés fixés, aucune tension supplémentaire (nouveaux rési-

du normés hors tolérance) n'apparaît dans le calcul. Les points nouveaux sur nos ouvrages sont déterminés, *in fine*, avec des incertitudes à 99 % comprises entre 5 et 10 mm en planimétrie et entre 1 et 10 mm en altimétrie. La plupart de ces points sont démontrés fiables (effets de la plus grande faute non détectable inclus dans l'incertitude à 99 %).

Conclusion

La méthode de compensation en bloc des lignes de base GNSS proposée consiste à compléter le post-traitement des lignes de base par un logiciel constructeur par une compensation par la méthode des moindres carrés avec LTOP en 2D+1. Pour ce faire, il a été nécessaire de proposer un modèle stochastique de ces lignes de base.

Cette proposition de modèle stochastique est certes simpliste et encore basée, en grande partie, sur de l'intuition. Cependant, l'analyse des résultats, dont ceux exposés dans cet article, montre que les indicateurs statistiques fournis par LTOP pointent vers des résultats fondés :

- les fautes mises en évidence lors de la compensation libre ont été justifiées par des retours terrain de problèmes de masquage ;
- les tensions sur les stations permanentes lors de la compensation libre ajustée sont faiblement significatives (en dehors de l'altitude de stations permanentes étrangères en haute montagne).

Nous interprétons ces résultats comme un indice que notre modèle stochastique est sans doute encore insuffisant, mais c'est mieux que rien. Ce travail est en quelque sorte une première réponse à notre lettre ouverte [Touzé, 2022]. Ainsi, de plus amples travaux sont encore nécessaires pour affiner ce modèle, en allant jusqu'à une prise en charge plus rigoureuse de la surabondance.

Les logiciels constructeurs proposent aussi des modules de compensation par la méthode des moindres carrés. Cependant, les indicateurs statistiques qu'ils proposent sont malheureusement encore trop sommaires par rapport à l'état de l'art en géodésie, contrairement à LTOP, malgré l'âge honorable de son noyau de calcul.

Nous en profitons pour remercier chaleureusement SWISSTOPO d'avoir décidé de passer la GEOSUITE avec LTOP sous licence libre. Sans cela, nous n'aurions pas pu mener ce travail.

Nous remercions également Mme Françoise Duquenne, MM. Michel Kasser et Bernard Flacelière qui, pour ce site dans les Pyrénées, nous ont aidés à interpréter les résultats, notamment les incohérences entre les altitudes NGF et RAF. ●

Contacts

Thomas Touzé - Stéphane Boscher, EDF/DTG

thomas.touze@edf.fr
stephane.boscher@edf.fr

Références

[Legros, 2012] : Romain LEGROS, Laurent MOREL, Flavien VIGUIER et Florian BIROT ; *Méthodes de travail dans les réseaux GNSS, 2^e partie Le positionnement statique suivant les méthodes indirectes du pivot central ou de la station virtuelle ; XYZ n° 133*

[BIPM, 2008] : *Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM), 3^e édition, JCGM 200:2012*

[Bernese, 2015] : Rolf DACH, Simon LUTZ, Peter WALSER et Pierre Fridez, *Bernese GNSS Software, version 5.2*, Astronomical institute, University of Bern.

[Touzé, 2022] : *Estimation a priori de l'incertitude altimétrique des positionnements GNSS en RTK ou en statique post-traité : existe-t-il un modèle ? ; XYZ n° 171*

ABSTRACT

In this article, after an overview of the main methods for adjusting static GNSS baselines, we propose a variant based on a manufacturer's software for post-processing, the Swiss software LTOP for least squares adjustments of land surveying measurements and the proposal of a simplified stochastic model of these baselines. We also present the results on a network recently processed by EDF in the Pyrenees.