les tendances actuelles en matière de calcul des canevas de base

Claude Million

AVANT PROPOS

L'utilisation croissante de GPS dans les travaux de topographie ne doit pas faire oublier que ce merveilleux moyen ne remplacera jamais totalement les moyens traditionnels. Au contraire, il faut se préparer à utiliser tous les moyens mis à notre disposition, et mélanger les mesures des uns avec celles des autres.

En particulier, on pense au mélange des mesures GPS avec les mesures traditionnelles de triangulation, pour, par exemple, densifier le réseau des points déjà déterminés.

Il se trouve que les points de base déterminés par GPS sont exclusivement des points stationnables, et qu'on a l'habitude de se servir de points non stationnables tels que des clochers, des réservoirs d'eau potable, des antennes diverses, tous situés sur des points élevés sur lesquels on peut lancer des visées de relèvement pour exécuter des travaux de détail. En outre de leur évidente utilité, les points non stationnables sont très peu coûteux à observer et leur matérialisation et leur balisage sont, évidemment, gratuits.

Il est non moins évident qu'il est plus simple, et moins coûteux, à précision égale, de faire un relèvement sur des points élevés que de faire une paire de stations GPS (station de base connue et station inconnue).

INTRODUCTION

Cet état de chose pose un problème qui est celui des référentiels dans lesquels on est amenés à "mélanger" les résultats. Le référentiel de calcul de GPS est, en dehors de toute transformation, un système géocentrique tri rectangulaire, donc "3D"; alors que les référentiels habituels de la topographie sont les coordonnées planes ("2D") des projections nationales, auxquelles on ajoute l'altitude au-dessus du géoïde, soit "2D + 1", ce sont des représentations de mesures faites sur le géoïde, appliquées sur un ellipsoïde particulier qui caricature ce géoïde en lui étant localement tangent, sans pour cela avoir le même barycentre que lui, tant s'en faut d'ailleurs, pour l'ellipsoïde de Clarke!

Le "mélange" des mesures spatiales et terrestres ne peut se faire que si on transforme un des systèmes dans l'autre. Or, cela ne peut se réaliser sans dommage pour au moins l'un des deux types de mesures. En général, on transforme les résultats GPS dans le système de projection national, cela n'est pas facile, c'est parfois contestable, ou imprécis.

Pour l'instant, et en attendant la mise en place du nouveau système de coordonnées utilisant le même ellipsoïde de référence que celui de GPS, il est très rare que les origines des systèmes nationaux 3D et du système international WGS 84 coïncident, les sept paramètres des transformations sont, en raison de la faible surface relative des territoires nationaux par rapport à celle du globe dans son entier, très imprécis et très corrélés, pour cela on réduit les sept paramètres à trois ou quatre, mais lesquels privilégier, alors que les résultats sont différents selon ceux qu'on a retenus?

Avec le nouveau système de coordonnées, les référentiels spatiaux et terrestres étant les mêmes, ces problèmes ne se poseront plus, mais il reste celui des transformations dans la projection LAMBERT 93 qui imposera des déformations d'échelle très importantes à ses limites extrêmes. Il restera, aussi, l'utilisation de points situés en dehors des frontières qui auront toutes les chances d'être connus dans le référentiel mondial, ou un référentiel très proche. On note, en effet, des efforts importants et concordants de GPS et des systèmes nationaux pour se rapprocher d'ITRF.

L'idée qu'on veut développer, et qui tend à s'imposer d'elle-même, est de calculer les deux catégories de mesures dans un système réellement commun, à savoir les coordonnées géocentriques 3D sur l'ellipsoïde international WGS 84, en conservant, avant de faire mieux, les méthodes héritées de la topographie ou de la topométrie, en bref les calculs se feraient, et commencent à se faire déjà en X, Y, et Z géocentriques, même pour les mesures traditionnelles.

On peut se demander pourquoi ?

Remarquons, tout d'abord, que dans la période transitoire pendant laquelle la nouvelle projection Lambert 93 s'imposera, nous aurons quatre systèmes de coordonnées :

1. Les coordonnées géocentriques de GRS 80 X, Y, Z.
2. Les coordonnées géographiques, directement calculées à partir des précédentes, λ et φ Longitude et latitude sur l'ellipsoïde GRS 80 différentes, non seulement des Longitudes et Latitudes (λ_{NTF} et φ_{NTF}) calculées sur l'ellipsoïde de Clarke, base de la NTF, mais très légèrement différentes, aussi, des coordonnées géographiques tirées d'observations astronomiques Λ et Φ rapportées à la normale au géoïde en ce point.
3. Les coordonnées Lambert 93 x et y par projection conforme sur un cône des coordonnées géographiques (λ, φ) ci-dessus sur l'ellipsoïde de référence GRS 80.
4. Les coordonnées Lambert I, II, III, ou IV par projection conforme sur un des quatre cônes des coordonnées géographiques (λ_{NTF} et φ_{NTF}) sur l'ellipsoïde de Clarke.

On constate que si on veut calculer les points de densification déterminés par les opérations de la triangulation secondaire (Cheminements, intersections, relèvements, etc.) avec les avantages de la géométrie plane, il faudra bien choisir un de ces quatre systèmes de référence. On élimine d'emblée le dernier (en quatre individus) qui ne présente que des inconvénients. Il reste :

1. Faire les calculs de densification en coordonnées géocentriques de GRS 80 X, Y, Z, c'est-à-dire en 3D, c'est possible.
2. Faire les calculs de densification en coordonnées géographiques, directement en λ et φ Longitude et latitude sur l'ellipsoïde GRS 80, c'est ce qui s'est fait depuis fort longtemps en géodésie, mais qui n'était pas de pratique courante chez les topographes, mais qui pourrait le devenir en raison de la facilité qu'on a maintenant de faire ces sortes de calculs. On notera que cela imposera de toutes les façons d'en déduire les coordonnées géocentriques du 1° par le calcul.

Les auteurs tenants de cette méthode proposent même de faire les calculs de GPS dans ce seul référentiel, et de ne pas tenir compte du précédent, en décomposant les vecteurs GPS en longueurs et en angles qui seront réduits à l'ellipsoïde, pour revenir à des calculs de géodésie classique.

3. Faire les calculs de densification directement en coordonnées Lambert 93, ce qui donnerait l'avantage de faire les calculs en coordonnées planes, même si cet avantage serait un peu diminué du fait que les géodésiques ne sont pas des droites en projection conforme[1]. En outre, il faudra par des calculs inverses, recalculer les coordonnées géographiques, puis les coordonnées géocentriques.

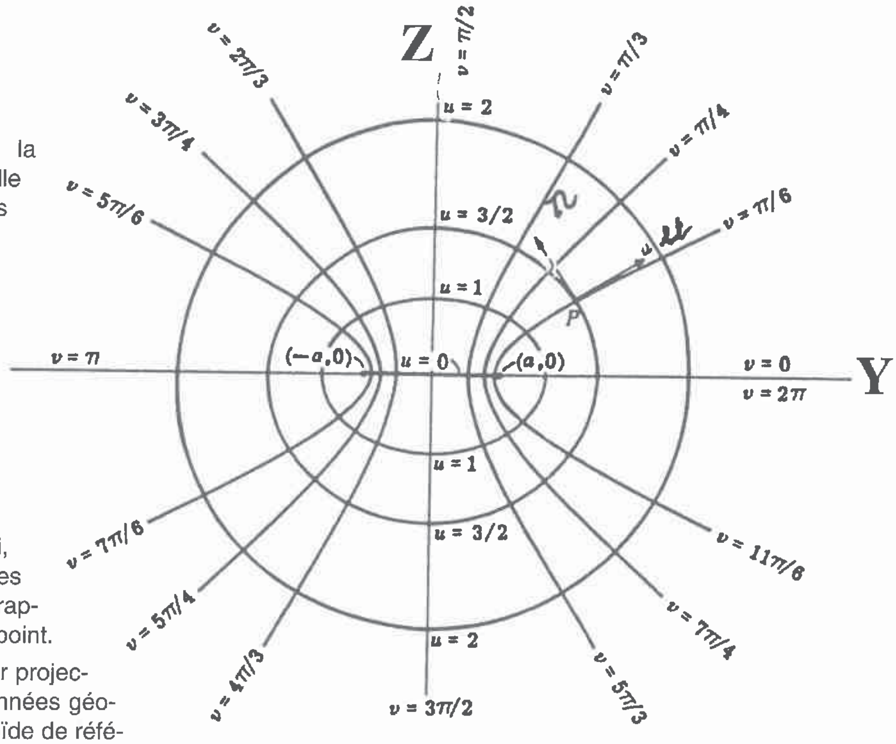

Fig. 1

Il se trouve que le passage des coordonnées 1 aux coordonnées 2 se fait en projetant orthogonalement le point connu en X, Y, Z sur l'ellipsoïde de référence, les moyens de calcul utilisés sont très nombreux M. C. Boucher [1] les avait recensés en 1980, M. Duquesne en avait complété la liste en 1988 [2], on a noté de multiples contributions depuis. Or, cette projection ne tiens aucun compte du fait que la verticale est certes perpendiculaire au géoïde, mais que ce n'est pas une droite, sur l'ellipsoïde aussi les normales aux équipotentielles sont courbes, ce sont des arcs d'hyperboles : *Figure 1*, selon certains auteurs qui voudraient continuer de faire tous les calculs sur l'ellipsoïde (Solution 2, ci-dessus) ce serait la seule solution pour « intégrer » correctement l'ancienne NTF. Leurs remarques sont sans doute fondées, mais c'est finalement c'est la solution 1 qui prévaut, donc les calculs des points complémentaires se font de plus en plus dans le système de calcul de GPS, pour éviter les imprécisions et les erreurs résultant de transformations d'un système dans l'autre.

Les calculs topométriques en 3D

Polygonale

On connaît les calculs d'excentrement de point GPS, ils sont enseignés à l'IGN à ceux qui suivent les cours de cette spécialité, les Écoles d'Ingénieurs ont dû se mettre à la page. Les calculs d'une polygonale ne sont rien d'autre que des excentrements successifs, en tenant bien compte du fait que les calculs mettent en œuvre des Azimuts et non des gisements, à chaque nouvelle station il faut recalculer l'azimut inverse pour calculer le Go de la nouvelle station. Toutefois, il n'y a que des inconvénients à compliquer les choses il est beaucoup plus simple de transformer les visées en vecteurs unitaires, on se reportera à la *figure 2*. Soit le système géocentrique de GRS 80 X, Y, Z cette dernière coordonnée étant verticale sur la figure, soit les coordonnées locales au point P, n, vers le nord rejoignant l'axe Z ; u (pour up), en direction de la ver-

1 – Les géodésiques étant, sur de courtes distances et en 3D, presque des cercles, ce sont donc, aussi, presque des cercles en projection conforme.

ticale du point P, et e pour est formant un trièdre direct avec les deux coordonnées précédentes. Pour passer des coordonnées X, Y, Z à e, n, u, on doit faire une rotation autour de Z de $\frac{\pi}{2} + \lambda$ dans le sens négatif pour que e soit parallèle à X.

On doit ensuite tourner autour de l'axe e de $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dans le sens négatif pour amener u à être parallèle à Z. La matrice de rotation R, produit des deux matrices précédentes R(e). R (Z), permet de passer de coordonnées locales aux coordonnées générales. Son inverse, qui est sa transposée, permet de faire les transformations inverses, le vecteur directeur v d'une visée est en coordonnées locales du point p :

$$v = \begin{matrix} \sin(Az).\sin(Z) \\ \cos(Az).\sin(Z) \\ \cos(Z) \end{matrix}$$

Az azimut de la visée, Z distance zénithale de la visée, d distance inclinée. On peut appliquer à ce vecteur v la rotation R pour faire le calcul en coordonnées générales :

$$\Delta X = R.v.d \quad , \Delta X = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$$

$$(3.1) = (3.3).\ (1)$$

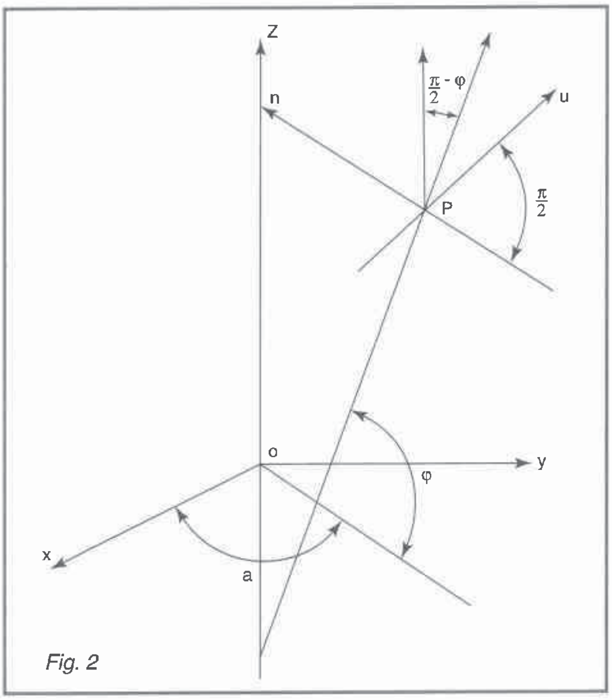

Fig. 2

Le calcul de Azo

Afin de calculer l'azimut inverse, nécessaire pour connaître Azo et orienter le côté suivant, on procède de la manière suivante :

On transforme les différences de coordonnées : $-\Delta X$, $-\Delta Y$, et $-\Delta Z$ du système général en coordonnées locales du nouveau point (indice ') qui vient d'être calculé, on transforme ensuite ces coordonnée locales e', n', u'en un vecteur unitaire local de la visée inverse v':

d'où $Az_0 = Az' - l'$si l'est la visée inverse.

L'intersection

On a donné dans ces lignes [3], après bien d'autres sans doute, la formule applicable à l'intersection 3D, on a une bonne occasion de l'appliquer ci-dessous.

Notons d'abord qu'il faut préalablement transformer les vecteurs issus des deux points d'où partent les visées, Ceci aura l'avantage accessoire de tenir compte du fait que les deux verticales aux deux stations ne sont pas parallèles, certes il s'en faut souvent de peu, mais il est plus rigoureux de faire ainsi. On remarque aussi, que ces calculs impliquent qu'on ait calculé les coordonnées géographiques des deux stations 1 et 2.

$$\overline{V}_1 = R_1.\overline{v}_1,\ R_1 = f(\lambda_1, \varphi_1),$$

$$\overline{V}_2 = R_2.\overline{v}_2,\ R_2 = f(\lambda_2, \varphi_2),$$

$$R = \begin{matrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda).\sin(\varphi) & \cos(\lambda).\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda).\sin(\varphi) & \sin(\lambda).\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{matrix}$$

Connaissant ces deux vecteurs le calcul est le suivant :

$$\rho_{1P} = \frac{\overline{12}.\overline{V}_1 - p.\overline{12}.\overline{V}_2}{1 - p_2} \qquad \text{Avec } p = \overline{V}_1.\overline{V}_2 = \cos(A)$$

$$\rho_{1P} = \frac{\overline{12}.\overline{V}_2 - p.\overline{12}.\overline{V}_1}{p_2 - 1}$$

$\overline{12}$. est le vecteur de la base, A l'angle au sommet inconnu, le résultat est ρ_{iP} qui est la longueur du point i connu au point P inconnu. On calcule les coordonnées géocentriques à partir des deux points connus et on fait la moyenne arithmétique.

Le relèvement

On cherche à calculer un relèvement à partir des coordonnées géocentriques XYZ de trois points connus dans ce système.

Les photogrammètres, qui ont depuis longtemps étudié le problème, nous apprennent qu'il n'y a pas de solution directe, car les expressions ne sont pas linéaires. Il faut donc procéder par approximations successives.

Guidé par une démonstration très claire de Monsieur HARMEL, ingénieur au SGN de l'IGN, on en est venu à une solution approchée fort simple :

On utilise la formule barycentrique dans un plan défini par les trois points sur lesquels on se relève, mais en ajoutant la troisième coordonnée Z, qui est traitée comme les deux autres, les coefficients de pondération restant les mêmes pour les trois coordonnées, la solution se trouve dans ce plan qui est différent de l'horizontale des mesures, mais de très peu si les visées sont assez courtes.

Cette solution, qu'on pourrait croire fantaisiste, donne des résultats excellents dans les cas courants. C'est assez normal car on calcule un barycentre qui reste le même que le plan soit incliné ou horizontal.

On peut affiner la solution en utilisant les distances zénithales si elles ont été mesurées.

Pour vérifier si ces résultats étaient pertinents, on a traduit les coordonnées géocentriques en latitude et longitude, la hauteur he n'ayant alors aucune signification.

On a pu vérifier la validité ces résultats par une méthode rigoureuse sphérique tirée de la solution apportée jadis par Pothenod au problème du relèvement plan, la transposition est très facile.

Cette méthode qui n'est qu'approchée impose une compensation de toutes les façons inévitable dans tous les cas, même s'il n'y a pas de mesures redondantes. Voir à la fin du paragraphe suivant

COMPENSATIONS

On ne vient de traiter que le problème du calcul des points approchés. Les compensations peuvent aussi être considérées comme des problèmes classiques. On empruntera à [4] les formules linéarisées des moindres carrés : On a neuf inconnues modifiées par une visée horizontale :

$x = [\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta\varphi_1, \delta\lambda_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \delta Az_1]^T$ où δx, δy, et δz sont les corrections à apporter aux coordonnées approchées **géocentriques** Xo, Yo, Zo du point placé en indice, de même $\delta\varphi$, et $\delta\lambda$ sont les corrections à apporter aux coordonnées **géographiques** approchées des points notés en indice, ce sont les coordonnées géographiques de la station d'où est issue la visée, enfin δAz_1 est la correction à apporter à Azo approché de la station indicée 1.

Les équations d'observations linéarisées sont :

$A.\ x = l_m + Az_{0_m} - l_c - Az_{0_c}$ avec A gradient de la relation d'observation, l : lecture de l'angle horizontal, et Azo Azimut du zéro du limbe **approché**, les indices m indiquent que c'est la valeur mesurée et c la valeur calculée d'après les coordonnées approchées $l_c + Az_{0_c}$, représente l'azimut **calculé** de la visée d'après les valeurs approchées connues, lorsque $l_m + Az_0 - l_c - Az_c \approx 0$ on cesse les itérations, de ce côté rien de nouveau.

Pour une visée zénithale les corrections ne portent, bien entendu, que sur les huit premières inconnues citées, δAz disparaît de la liste des inconnues. Enfin, pour une mesure de distance inclinée les inconnues sont celles qui corrigent les coordonnées **géocentriques seulement**, elles ne sont donc plus que six. On voit donc qu'on ne peut réellement pas isoler totalement les coordonnées géocentriques des coordonnées géographiques qui définissent les verticales des stations, mais ceci ne parait pas être un point crucial.

Cas particulier du relèvement

On a bien souligné que le calcul direct du relèvement n'était pas possible, en dehors d'approximations successives; les calculs sont les mêmes que ceux des compensations, même si les mesures ne sont pas redondantes : Un point relevé en 3D a six inconnues :

$x = [\delta x, \delta y, \delta z, \delta\lambda, \delta\varphi, \delta Az]^T$, c'est-à-dire dans l'ordre : les trois coordonnées 3D géocentriques, puis les deux coordonnées géographiques, enfin le Azo. Le gradient A est alors :

$$\frac{\sin(\lambda).\cos(Az_{ij}) - \sin(\varphi).\cos(\lambda).\sin(Az_{ij})}{d.\sin(Z_{ij})}$$

$$\frac{-\cos(\lambda).\cos(Az_{ij}) - \sin(\varphi).\sin(\lambda).\sin(Az_{ij})}{d.\sin(Z_{ij})}$$

avec

$$\frac{\cos(\varphi).\sin(Az_{ij})}{d.\sin(Z_{ij})},$$

$$\sin(\varphi) - \cos(\varphi).\cot g(Z_{ij}),\ \cot g(Z_{ij}).\sin(Az_{ij}),\ -1$$

Azij azimut de i vers j, de même, Zij distance zénithale de i vers j, les coordonnées géographiques approchées λ et 0 sont celles de la station, d est la distance inclinée approchée.

On remarquera que si on n'a fait des visées que sur trois points connus en mesurant les trois angles horizontaux et les trois distances zénithales on ne dispose que de six équations d'observation pour déterminer six inconnues, le système n'est par conséquent pas surabondant, enfin que les coordonnées géographiques et les coordonnées géocentriques sont très corrélées.

Les relations linéaires pour les visées zénithales sont les mêmes, sauf pour le coefficient de Azo qui est, évidemment, nul. On ne la répétera donc pas. Enfin, tout le monde aura noté que les coefficients d'une visée d'intersection comportent trois termes supplémentaires avant le dernier qui sont égaux aux trois premiers mais changés de signe.

CONCLUSIONS

On conclura en posant une question : Pouvons-nous ignorer ce mouvement, qui ne se réduit pas à l'hexagone, pour conserver des habitudes qui ne sont que des archaïsmes ? Les calculs un peu compliqués, et ceux qu'on a présentés le sont-ils vraiment, ne sont pas des problèmes actuellement où beaucoup de praticiens se fient aveuglément à des logiciels tout faits, il suffira pour eux d'en changer.

Les avantages sont évidents : quelles que soient les longueurs des visées aucune correction de dv n'est à calculer, les mesures de longueurs ne sont pas altérées par des corrections d'échelle dues à la projection. En outre, il n'est pas innocent de prendre enfin conscience que la terre est un sphéroïde, enfin le travail dans les pays neufs, ou dans ceux qui n'ont pas entretenu leurs réseaux géodésiques, sera facilité et conduit de façon uniforme, alors qu'actuellement l'arbitraire le plus total règne. Ceux qui ont eu à utiliser des réseaux géodésiques faits par d'anciennes puissances coloniales ou par des prospecteurs, dont on ne connaissait ni le référentiel géodésique ni la projection, perdus dans les désordres des indépendances ou simplement inconnus, nous comprendront aisément.

RÉFÉRENCES

[1] *C. Boucher : Transformations entre coordonnées cartésiennes tridimensionnelles et les coordonnées géographiques ellipsoïdales. Étude des Algorithmes – Notes techniques n° 8 et 9 : IGN mars 1980.*

[2] *H. Duquesne : Coordonnées et systèmes géodésiques en usage en France : ENSGCPR d'astronomie et de géodésie : mars 1988.*

[3] *C. Million : L'intersection 3D : X Y Z n° 72 -1997-3.*

[4] *G. Strang & K. Borre : Linear Algebra, Geodesy, and GPS : Wellesley-Cambridge Press 1997.*

e-mail : claudemillion@wanadoo. fr

NDLR : *le logiciel d'essai est disponible chez l'auteur*