

Les représentations planes cylindriques de la Terre

■ Françoise DUQUENNE

Cet article est la suite d'une série d'articles de la revue XYZ commencée au numéro 154, et qui traite des systèmes de références et de coordonnées géodésiques [1][2][3]. Son objectif est de rappeler les concepts fondamentaux des représentations planes cylindriques de la Terre, tout particulièrement celles qui sont conformes dont la plus connue et utilisée dans le monde entier est l'Universal Transverse Mercator (UTM). Il a pour ambition d'expliquer d'où viennent des algorithmes que l'on peut trouver complexes et mystérieux. Les notions générales sur les représentations planes présentées dans l'article [3] seront utilisées sans être rappelées ici. Les représentations méricylindriques, souvent utilisées pour de la cartographie à très petite échelle ne seront pas abordées ici.

MOTS-CLÉS

représentation plane cylindrique, Mercator, Mercator Transverse, UTM, conforme, module linéaire, facteur d'échelle, canevass, pseudo-canevas

La Terre, débarrassée de ses reliefs est tout d'abord représentée, soit par une sphère, soit par un ellipsoïde de révolution. Puis la sphère ou l'ellipsoïde sont représentés sur un plan. Sur la sphère ou sur l'ellipsoïde un point est donné par ses coordonnées géographiques longitude et latitude : $M(\Lambda, \Phi)$ sur la sphère et $m(\lambda, \varphi)$ sur l'ellipsoïde. On note a le rayon équatorial de l'ellipsoïde, e son excentricité et R le rayon de la sphère.

Sur le plan, M image du point m est représenté par ses coordonnées cartésiennes (X, Y) souvent notée aussi (E, N) pour *Easting, Northing*.

Les représentations planes cylindriques directes

Les coordonnées planes sont telles que X ne dépend que de la longitude et Y de la latitude.

$$X = X(\lambda)$$

$$Y = Y(\varphi)$$

Les images des méridiens (λ =constantes) sont des droites parallèles à l'axe des ordonnées (OY).

Les images des parallèles (φ =constantes) sont des droites parallèles à l'axe abscisses (OX).

$X(\lambda), Y(\varphi)$ sont des fonctions définies par les propriétés de la représentation : conforme, équivalente, équidistante, aphyllactique.

La représentation Mercator directe

Il s'agit de la représentation cylindrique directe conforme. Elle est donnée par les équations :

$$X = X_c + n\lambda$$

$$Y = Y_c + n\mathcal{L}(\varphi)$$

$\mathcal{L}(\varphi)$ est la latitude isométrique (voir l'encadré 1)

X_c, Y_c, n , sont les constantes de la représentation choisies en fonction de la zone à cartographier.

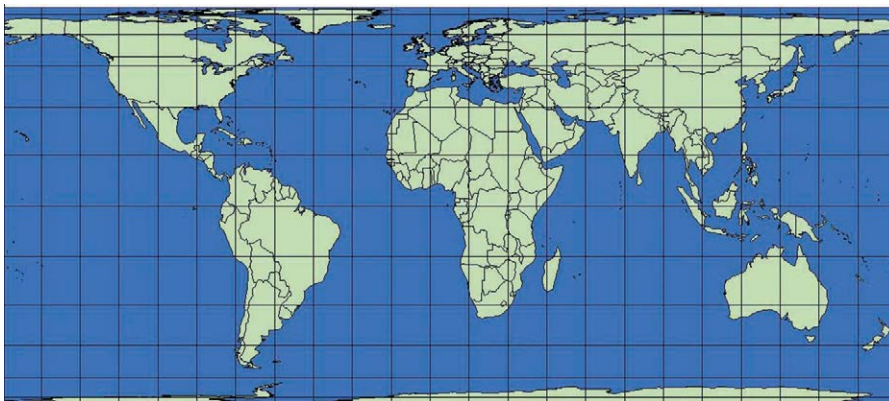


Figure 1. Cylindrique équivalente

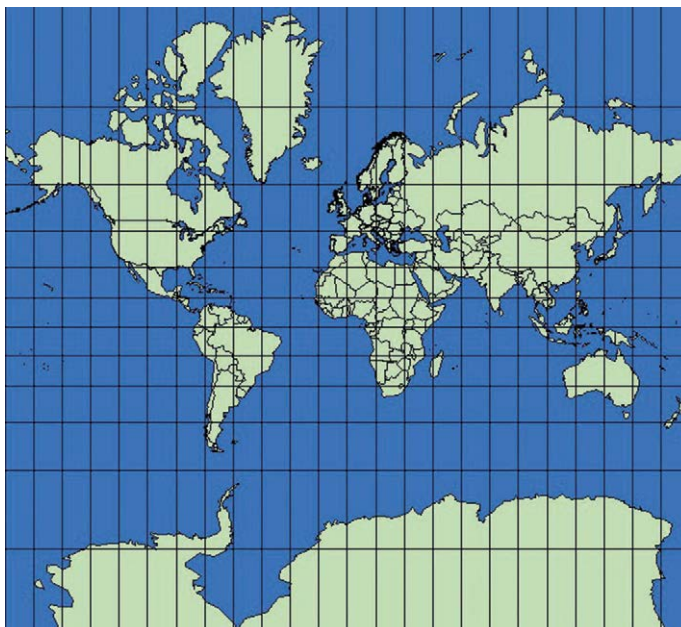
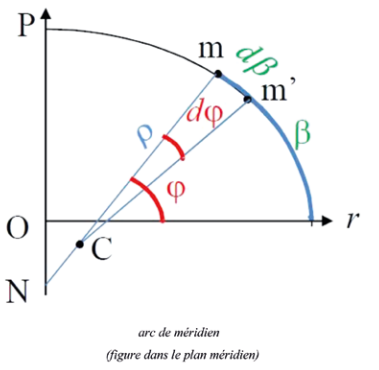


Figure 2. Cylindrique équivalente

Encadré 1 - ARC DE MÉRIDIEN



Nm : normale à l'ellipsoïde
 N et V : centre et rayon de courbure de la grande normale
 C et ρ : centre et rayon de courbure de l'ellipse méridienne

$$v = Nm = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

$$\rho = \frac{d\beta}{d\varphi} = CM = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

v et ρ sont les rayons de courbures normaux principaux de l'ellipsoïde, c'est-à-dire que dans n'importe quelle autre direction le rayon de courbure est compris entre ces deux valeurs.

$\beta(\varphi)$: longueur de l'arc de méridien de l'équateur à m

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$\beta(\varphi)$ se calcule donc par une intégrale elliptique en remarquant que e^2 est petit. Le calcul peut se faire soit avec la méthode des intégrales de Wallis, qui est une méthode itérative, soit par développements limités

$$\beta = ab_n \varphi + a \sum_{i=1}^n b_i \sin 2i\varphi$$

$$b_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8$$

$$b_1 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{45}{1024}e^6 - \frac{105}{4096}e^8$$

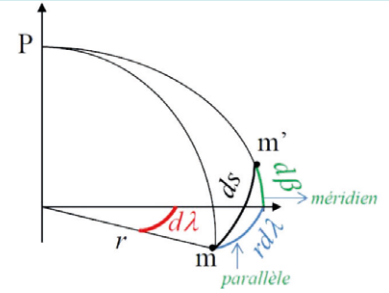
$$b_2 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \frac{525}{16384}e^8$$

$$b_3 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{175}{12288}e^8$$

$$b_4 = \frac{315}{131072}e^8$$

En développant jusqu'à l'ordre 8 on obtient le millimètre de précision.

Encadré 2 - LATITUDE ISOMÉTRIQUE



$m(\lambda, \varphi)$

$m'(\lambda + d\lambda, \varphi + d\varphi)$

$d\beta$: élément d'arc de méridien

ρ : rayon de courbure du méridien

r : rayon du parallèle

On calcule la distance infiniment petite ds

$$ds^2 = d\beta^2 + r^2 d\lambda^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$$

$$ds^2 = r^2 \left(\frac{\rho^2}{r^2} d\varphi^2 + d\lambda^2 \right)$$

$$\text{on pose } d\mathcal{L}^2 = \frac{\rho^2}{r^2} d\varphi^2$$

$$ds^2 = r^2 (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

Les coordonnées \mathcal{L} et λ sont orthogonales et symétriques.

\mathcal{L} est la latitude isométrique.

Un arc de méridien de 1° de latitude isométrique a la même longueur qu'un arc de parallèle de 1° en longitude.

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$r = v \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

$$d\mathcal{L} = \frac{(1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}$$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \ln \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}$$

Latitude isométrique sur la sphère :

$$\mathcal{L}_s(\Phi) = \ln \tan \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Calcul du module linéaire :

$$\mu = \frac{dS}{ds}$$

ds : élément de longueur sur l'ellipsoïde.

dS : élément de longueur correspondant sur le plan.

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = n^2 d\lambda^2 + n^2 d\mathcal{L}^2(\varphi)$$

$$ds^2 = r^2 (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

$$\mu^2 = \frac{n^2}{r^2}$$

$$\mu = \frac{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi}$$

(Voir encadré 2)

Le module linéaire ne dépend pas de la direction, la représentation Mercator est bien conforme. Il varie avec la latitude et tend vers l'infini aux pôles. En général la représentation Mercator directe n'est en conséquence utilisée qu'entre les latitudes -80° et $+80^\circ$.

Les parallèles sont des isomètres et l'équateur est l'isomètre central. Rappelons ici que l'isomètre central est tel que μ est minimum donc pour

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{n(1 - e^2) \sin \varphi}{a \cos^2 \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = 0$$

et finalement c'est l'équateur ($\varphi = 0$) et

$$\mu(0) = \frac{n}{a}$$

Si $n = a$, $\mu(0) = 1$, l'équateur est automécoïque et la représentation est tangente. Si $n < a$, $\mu(0) < 1$, il y a deux parallèles automécoïques et la représentation est sécante.

Les méridiens sont parallèles donc la convergence des méridiens est nulle. Comme la représentation est conforme, l'azimut est égal au gisement. Si comme les marins on voyage avec un azimut constant (cap constant en navigation), le trajet sur la carte est une droite appelée loxodromie. Sur la carte Mercator, on pourrait croire qu'elle est le chemin le plus court, mais ce n'est pas vrai sur l'ellipsoïde. L'image de la géodésique, courbe bleue sur la figure 3 est appelée orthodromie.

Le Service hydrographique de la marine (SHOM), publie ses cartes en représentation Mercator directe sécante, avec pour la latitude du parallèle sécant une latitude moyenne de la zone à cartographier et uniquement entre les latitudes $(-80^\circ$ et $+80^\circ)$.



Figure 3. Orthodromie (en rouge) et loxodromie (en bleu)

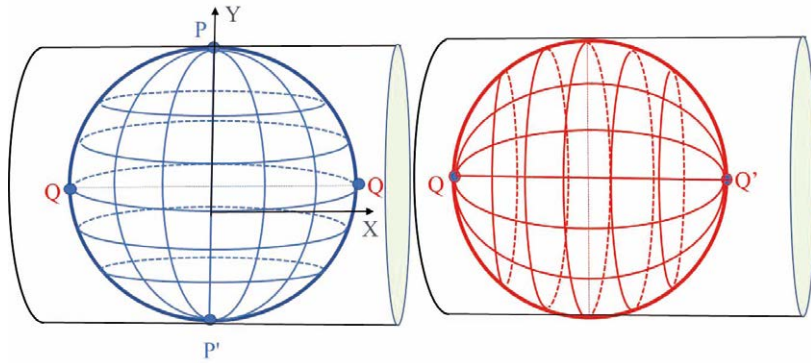


Figure 4. Canevas et pseudo-canevas transverse

Le système géodésique et l'ellipsoïde choisis sont désormais WGS84.

La représentation Mercator transverse de la sphère

L'axe du cylindre est maintenant placé dans le plan de l'équateur.

La représentation transverse Mercator de la sphère se déduit facilement de la Mercator directe en utilisant un pseudo-canevas.

- L'axe des pseudo-pôles (QQ') est dans le plan de l'équateur.
- Le pseudo-méridien origine est l'équateur.
- Le pseudo-équateur est le méridien Λ_0 .

Les coordonnées Cassini-Soldner sont :
 L : la pseudo-longitude
 H : la pseudo-latitude

Les formules de passage entre les coordonnées (λ, φ) et les pseudo-coordonnées (L, H) s'obtiennent en appliquant la trigonométrie sphérique au triangle sohrérique PMMo.

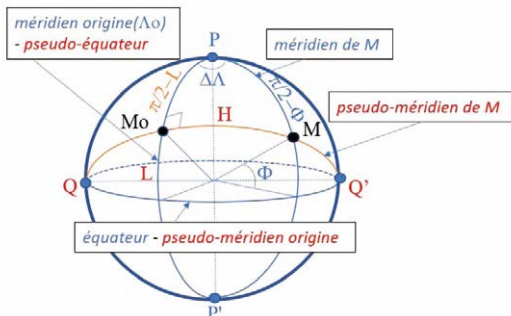


Figure 5. Pseudo-coordonnées transverses

Formule des cotangentes

$$\sin \Delta\Lambda \cot \frac{\pi}{2} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - L \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - L \right) \cos \Delta\Lambda$$

$$\Rightarrow \tan L = \frac{\tan \Phi}{\cos \Delta\Lambda}$$

Formule des sinus

$$\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right)}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin H}{\sin \Delta\Lambda}$$

$$\Rightarrow \sin H = \sin \Delta\Lambda \cos \Phi$$

On en déduit la pseudo-latitude isométrique :

$$\mathcal{L}(H) = \ln \tan \left(\frac{H}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin H}{1 - \sin H} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \Delta\Lambda \cos \Phi}{1 - \sin \Delta\Lambda \cos \Phi}$$

Formule des cotangentes :

$$\sin \frac{\pi}{2} \cot \Delta\Lambda = \cot H \sin \left(\frac{\pi}{2} - L \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - L \right) \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \Delta\Lambda = \frac{\tan H}{\cos L}$$

Formule fondamentale :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - L \right) \cos H + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \sin H \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \Phi = \sin L \cos H$$

Enfin on obtient les formules de la Mercator transverse tangente de la sphère en appliquant les formules de la Mercator directe aux pseudo-coordonnées (L, H)

$$X = X_c + R\mathcal{L}(H) = X_c + \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \sin \Delta\Lambda \cos \Phi}{1 - \sin \Delta\Lambda \cos \Phi}$$

$$Y = Y_c + RL = Y_c + R \arctan \left(\frac{\tan \Phi}{\cos \Delta\Lambda} \right)$$

De même on calcule le module linéaire de la Mercator transverse de la sphère :

$$\mu = \frac{1}{\cos H} = \frac{1}{(1 - \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 - \sin^2 \Delta\Lambda \cos^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}}$$

On voit ici que pour $\Delta\Lambda = 0$, $\mu = 1$ donc le méridien origine est un isomètre.

Les pseudo-parallèles ($H=cste$), qui ont pour images des droites parallèles au méridien central, sont les isomètres.

La représentation Mercator transverse de l'ellipsoïde

Les méridiens de l'ellipsoïde sont des ellipses, aussi on ne peut donc pas appliquer directement la trigonométrie sphérique et on procède en trois étapes : représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère, puis transformation Mercator transverse, puis mise à l'échelle constante sur le méridien central.

■ 1^{re} étape : représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère

$$m(\lambda, \varphi) \rightarrow M(\Lambda, \Phi)$$

$$m(\lambda_0, \varphi_0) \rightarrow M(\Lambda_0, \Phi_0)$$

On cherche la représentation conforme

$$\Lambda = f(\lambda)$$

$$\Phi = g(\varphi)$$

telle que le module linéaire est indépendant de la direction, et donc le module linéaire selon le parallèle est égale au module linéaire selon le méridien :

$$\mu_{\text{parallèle}} = \frac{R \cos \Phi d\Lambda}{v \cos \varphi d\lambda}$$

$$\mu_{\text{méridien}} = \frac{R d\Phi}{\rho d\varphi}$$

$$\mu_{\text{parallèle}} = \mu_{\text{méridien}}$$

$$\frac{R \cos \Phi d\Lambda}{v \cos \varphi d\lambda} = \frac{R d\Phi}{\rho d\varphi}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{v \cos \varphi d\Phi}{\rho \cos \Phi d\varphi}$$

On intègre l'équation différentielle par la méthode des variables séparées en posant que chaque terme est constant et égal à n_s .



$$\begin{cases} n_s = \frac{d\Lambda}{d\lambda} & (1) \\ n_s = \frac{v \cos \varphi}{\rho \cos \Phi} \frac{d\Phi}{d\varphi} & (2) \end{cases}$$

Intégration

$$(1) \rightarrow (\Lambda - \Lambda_0) = n_s (\lambda - \lambda_0)$$

$$(2) \rightarrow \frac{d\Phi}{\cos \Phi} = n_s \frac{\rho}{v \cos \varphi} d\varphi$$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos \Phi} = \int \frac{n_s (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi$$

$$\mathcal{L}_s(\Phi) - \mathcal{L}_s(\Phi_0) = n_s (\mathcal{L}_e(\varphi) - \mathcal{L}_e(\varphi_0))$$

$\mathcal{L}_s(\Phi)$: latitude isométrique sur la sphère.

$\mathcal{L}_e(\varphi)$: latitude isométrique sur l'ellipsoïde.

Voir encadré 2

Module linéaire :

$$\mu = \mu_{\text{parallèle}} = \frac{R \cos \Phi d\Lambda}{v \cos \varphi d\lambda}$$

$$\begin{aligned} \mu &= n_s \frac{R \cos \Phi}{v \cos \varphi} \\ &= n_s \frac{R \cos \Phi}{a \cos \varphi} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les parallèles sont des isomètres.

Soit $\varphi = \Phi_0$ l'isomètre central, par définition $\mu(\Phi_0)$ est minimal donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mu}{d\varphi} \right)_{\Phi_0} &= 0 \\ \left(\frac{d\mu}{d\varphi} \right) &= \mu \frac{(1 - e^2)(\sin \varphi - n_s \sin \Phi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \\ \Rightarrow n_s &= \frac{\sin \varphi_0}{\sin \Phi_0} \end{aligned}$$

$$\mu(\Phi_0) = \mu_0 = n_s \frac{R \cos \Phi_0}{v_0 \cos \varphi_0}$$

Il y a plusieurs façons de choisir la sphère intermédiaire :

1^{er} cas : Sphère bitangente (tangente au méridien et au parallèle)(Figure 6)

$$\begin{aligned} n_s &= 1 \\ \Phi_0 &= \varphi_0 \\ R &= \mu_0 v_0 \end{aligned}$$

On choisit donc : Φ_0, μ_0 selon la zone à cartographier.

Pour $\mu_0 < 1$ on dit que la sphère est bitangente avec facteur d'échelle.

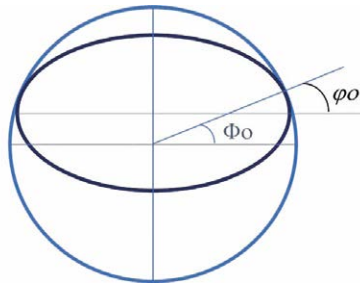


Figure 6. Sphère bitangente

2^e cas : Sphère équatoriale (Figure 7)

$$\begin{aligned} n_s &= 1 \\ R &= \mu_0 v_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \Phi_0} \end{aligned}$$

$$R \cos \Phi_0 = \mu_0 v_0 \cos \varphi_0$$

On choisit Φ_0, μ_0 selon la zone à cartographier.

Pour $\mu_0 = 1$ le rayon du parallèle Φ_0 est égal au rayon du parallèle.

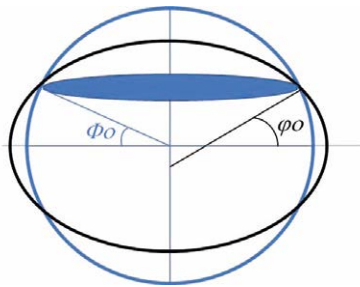


Figure 7. Sphère équatoriale

3^e cas : Sphère de courbure totale

$$R = \mu_0 \sqrt{v_0 \rho_0} = \mu_0 \frac{a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}$$

$$n_s = \sqrt{(1 + e^2 \cos^4 \varphi_0)}$$

$$e^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 - \cos^2 \varphi_0} : \text{seconde excentricité}$$

$$\cos \Phi_0 = \frac{\cos \varphi_0 (1 + e^2 \cos^2 \varphi_0)}{(1 + e^2 \cos^4 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \Phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{(1 + e^2 \cos^4 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}}$$

■ Etape n°2 : Mercator transverse tangente à la sphère intermédiaire

On applique la représentation Mercator transverse tangente à la sphère intermédiaire choisie :

$$\begin{aligned} X &= X_c + R\mathcal{L}(H) \\ &= X_c + \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \sin \Delta\Lambda \cos \Phi}{1 - \sin \Delta\Lambda \cos \Phi} \\ Y &= Y_c + RL \\ &= Y_c + R \arctan \left(\frac{\tan \Phi}{\cos \Delta\Lambda} \right) \end{aligned}$$

Le module linéaire est le produit des modules linéaires des deux représentations

• représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère :

$$\mu = n_s \frac{R \cos \Phi}{a \cos \varphi} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

• représentation Mercator transverse de la sphère :

$$\mu = \frac{1}{(1 - \sin^2 \Delta\Lambda \cos^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}}$$

On voit que pour $\Delta\Lambda = 0$, μ varie avec la latitude quelle que soit la sphère intermédiaire choisie. Donc sur le méridien origine le module linéaire n'est pas constant, et le méridien origine n'est pas un isomètre.

Les représentations Gauss-Laborde ou de Gauss-Schreiber sont définies ainsi. La représentation Gauss-Laborde a été utilisée pour l'île de la Réunion, dans le système géodésique Piton des neiges (IGN 1949) avec l'ellipsoïde International (Hayford 1909).

■ 3^e étape : Le module linéaire sur le méridien origine est rendu constant.

Pour les représentations GAUSS-KRÜGER et UTM le module linéaire est rendu constant sur le méridien central. Par anglicisme ce module linéaire est renommé facteur d'échelle et noté k_0 . Plusieurs algorithmes de calcul existent, la plupart utilisent des développements limités et on donnera ci-dessous en exemple l'algorithme développé et utilisé à l'IGN depuis 1955 qui a l'avantage de comporter des formules exactes, faciles à programmer. Comme cela a été montré dans l'article [8] cet algorithme donne les mêmes résultats pour un fuseau de grande étendue que des algorithmes plus récents avec des développements limités poussés à des degrés supérieurs.

Pour établir les formules directes, on se

**Encadré 3 - MERCATOR TRANSVERSE : FORMULES DIRECTES** $\lambda, \varphi \mapsto X, Y$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$n_s = (1 + e'^2 \cos^4 \varphi)^{1/2}$$

$$V = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$X = X_c + \frac{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}}{2V^2} \ln \frac{1 + \frac{V}{n_s} \cos \varphi \sin(n_s \Delta\lambda)}{1 - \frac{V}{n_s} \cos \varphi \sin(n_s \Delta\lambda)}$$

$$Y = Y_c + k_0 \beta + k_0 a \frac{(1 + e'^2)^{1/2}}{V^2} \left(\arctan \frac{\tan \varphi}{V \cos(n_s \Delta\lambda)} - \arctan \frac{\tan \varphi}{V} \right)$$

calcul de β , arc de méridien depuis l'équateur voir encadré 2

sert d'une sphère de courbure totale, tangente à l'ellipsoïde au point à transformer, donc de rayon

$$R = k_0 \sqrt{\rho} = \frac{ak_0(1 - e^2)^{1/2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{ak_0(1 + e'^2)^{1/2}}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

Voir encadré 3

Les paramètres de définition d'une représentation Mercator Transverse sont donc :

- (λ_0, φ_0) : coordonnées de l'origine
- X_c, Y_c : coordonnées planes de l'origine
- λ_0 : longitude du méridien central
- k_0 : facteur d'échelle (module linéaire) sur le méridien central.
- a, e : rayon équatorial, excentricité de l'ellipsoïde.

Les formules inverses utilisent une sphère de rayon de courbure total, tangente à l'ellipsoïde au point de latitude φ_1 , de longitude λ_0 . Ce point est sur le méridien central du fuseau et son ordonnée est celle du point à transformer.

Voir l'algorithme dans l'encadré 4.

La représentation UTM (Universal Transverse Mercator)

C'est un ensemble de représentations Mercator transverses que l'on applique à la Terre entière en divisant l'ellipsoïde en 60 fuseaux de 6°, numérotés de 1 à 60 dans le sens direct. Le méridien de Greenwich est donc la limite entre les fuseaux 30 et 31.

On applique une Mercator transverse à chacun de ces fuseaux en appliquant des paramètres standards.

- la latitude de l'origine est $\varphi_0 = 0$
- la longitude du méridien central du fuseau de numéro n_f est : $\lambda_{0,n_f} = 6^\circ \times n_f - 183^\circ$
- la constante k_0 vaut 0,9996

- l'abscisse du méridien central est fixée à $X_c = 500000$ m
- dans l'hémisphère nord $Y_c = 0$
- dans l'hémisphère sud, les Y sont changés en $10000000 - Y$ m

Des zones de recouvrements entre fuseaux sont prévues. La représentation UTM n'est en principe pas utilisée dans les régions polaires ($|\varphi| > 80^\circ$). Ayant été adoptée par l'OTAN, la représentation UTM est d'un emploi très répandu. Elle est utilisée avec différents ellipsoïdes et dans divers systèmes géodésiques. La représentation UTM est particulièrement bien adaptée aux pays étendus en latitude. La directive INSPIRE l'a adoptée pour le territoire européen, dans le cadre du géoréférencement précis, avec le système géodésique ETRS89, et l'ellipsoïde GRS80.

La France y est représentée sur les 3 fuseaux 30, 31 et 32.

**Encadré 4 - MERCATOR TRANSVERSE : FORMULES INVERSES** $X, Y \mapsto \lambda, \varphi$

$$\varphi_1 = \frac{Y - Y_c}{k_0 a}$$

$$n_{s1} = (1 + e'^2 \cos^4 \varphi_1)^{1/2} \quad V_1 = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi_1)^{1/2}$$

$$\xi = \frac{(X - X_c) V_1^2}{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}}$$

Calcul de $\beta(\varphi_1)$ voir encadré n°1

$$\eta = (Y - Y_c - k_0 \beta(\varphi_1)) \frac{V_1^2}{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}} + \arctan \frac{\tan \varphi_1}{V_1}$$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{n_1} \arctan \frac{\tan \left(2 \arctan(\exp \xi) - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \eta}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\Phi = \arctan(\cos(n_{s1} \Delta\lambda) \tan \eta)$$

$$\Phi_1 = \arctan \frac{\tan \varphi_1}{V_1}$$

$$\mathcal{L}(\varphi_1) = \ln \tan \left(\frac{\Phi_1 + \frac{\pi}{4}}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \Phi_1}{1 + e \sin \Phi_1}$$

$$\mathcal{L}_s(\Phi_1) = \ln \tan \left(\frac{\Phi_1 + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi_1) + \frac{1}{n_{s1}} (\mathcal{L}_s(\Phi) - \mathcal{L}_s(\Phi_1))$$

Calcul itératif de la latitude en radians :

$$\varphi_0 = 2 \arctan(\exp \mathcal{L}(\varphi)) - \pi / 2$$

$$\varphi_{i-1} = 2 \arctan \left(\left(\frac{1 + e \sin \varphi_i}{1 - e \sin \varphi_i} \right)^{e/2} \exp \mathcal{L}(\varphi) \right) - \pi / 2$$

4 itérations : $\varphi = \varphi_5$

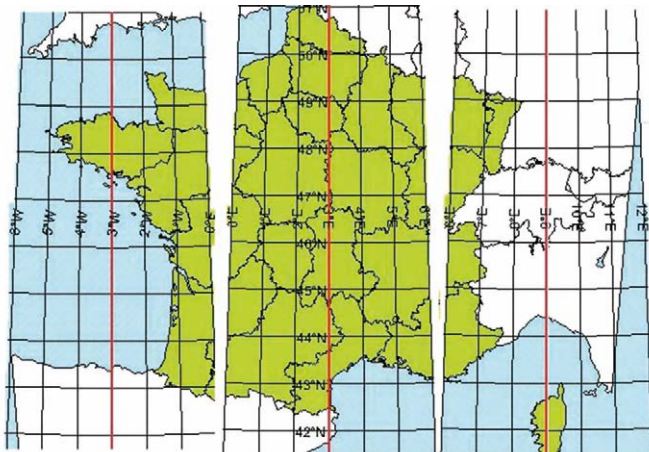


Figure 8. UTM fuseaux 30, 31, 32 sur la France

Encadré 5 - MERCATOR TRANSVERSE : MODULE LINÉAIRE(k) ET CONVERGENCE DES MÉRIDIENS (γ)

$$k = k_0 \left(1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 \tan^2 \varphi) \right)$$

$$\gamma = (\lambda_0 - \lambda) \sin \varphi \left(1 + \frac{(\lambda_0 - \lambda)^2}{3} \cos^2 \varphi (1 + 3e'^2 \cos^2 \varphi + 2e'^4 \cos^4 \varphi) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^4}{15} \cos^4 \varphi (2 - \tan^2 \varphi) \right)$$

► L'UTM est aussi utilisée dans les territoires français d'outremer Guadeloupe (fuseau 20), Guyane (fuseau 22), Martinique (fuseau 20), Mayotte (fuseau 38), Réunion (fuseau 40), Saint-Barthélemy (fuseau 20), Saint-Martin (fuseau 20), Saint-Pierre-et-Miquelon (fuseau 21), Terre Adélie (fuseaux 52 à 54). Les systèmes géodésiques et les ellipsoïdes associés sont donnés sur le site web geodesie.ign.fr et comme pour certains territoires l'UTM est utilisée avec l'ancien et le nouveau système géodésique une attention particulière doit y être portée.

Comme toute représentation conforme, les équations de la représentation Mercator transverse peuvent être écrites avec des fonctions complexes en particulier les fonctions hyperboliques. Dans cet article on n'a pas choisi ce formalisme parce qu'il semble que l'agilité de manipulation des complexes se raréfie de nos jours et que les langages de programmations souvent l'ignorent. Cependant les adeptes pourront se faire plaisir en lisant les références [5] et [9]. ●

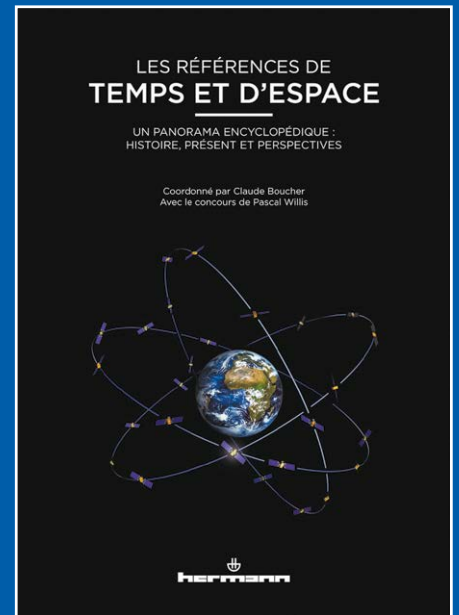
Références

[1] Duquenne F., 2018 *Le CNIG et les références géodésiques XYZ* n°154 pages 44-45
 [2] Duquenne F., 2018 *Les systèmes de référence terrestre et leurs réalisations*, XYZ n°154 pages 46-54

[3] Duquenne F., 2018 *Les représentations planes de la Terre*, XYZ n°156 pages 36-42
 [4] Duquenne F. et H., 2003, *cours de géodésie*, ESGT/CNAM
 [5] Boucher C., 1984, *Les projections de Mercator transverses*, IGN/SGN NT/G n°19
 [6] Levallois, J.J. 1970, *Géodésie Générale tome 2 : géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles
 [7] Dufour H.M., 1969, *La projection UTM-Calculs électroniques*, IGN/Géodésie/DEC
 [8] Gourine and al. 2018, *Extension de fuseau de la projection de Mercator Transverse*, XYZ n°155 pages 45-53
 [9] IGN/SGN 1995, *Projection cartographique MERCATOR TRANSVERSE*, algorithmes, NT/G 76

ABSTRACT

The purpose of this paper is to recall the fundamental concepts of the plane cylindrical representations of the Earth, especially those which are conformal. Amongst these, the most known and used projection throughout the world is the Universal Transverse Mercator (UTM). The algorithm of calculation presented here, developed by French IGN, has the advantage of using exact formulas and not limited developments like many others, and thus of being easily computerized.



COMMANDEZ "LES RÉFÉRENCES DE TEMPS ET D'ESPACE" AU PRIX DE 35,00 €
 17 x 24 cm, 484 pages
 frais de port inclus (France)

M/Mme Nom : _____
 Prénom : _____
 Société ou organisme : _____

 Adresse : _____

 Code postal :
 Ville : _____
 Tél. :
 Fax :
 Courriel : _____
 Date : _____
 Signature _____

Bulletin de commande à retourner accompagné d'un chèque à l'Association française de topographie
 73, avenue de Paris - 94165 SAINT-MANDÉ
 Cedex - Tél. : +33 (0) 1 43 98 84 80

Achat également sur Internet : www.aftopo.org