Figure d'équilibre d'un fil pesant tendu

■ Claude MILLION

La publication d'un article (cf. Thomas Touzé : *Le réseau de propagation du projet CLIC Analyse des données de l'expérience TT1* - XYZ n° 122) ***traitant, en partie, de la figure d'équilibre d'un fil tendu horizontalement entre deux points, nous a conduits à consulter les textes que les auteurs du CERN ont publiés à ce sujet sur Internet. L'étonnante précision recherchée nous a poussés, non seulement à reprendre les bases des calculs, mais aussi à valider les hypothèses ; entre autres celle qui consiste à négliger totalement l'effet de raideur d'un fil, assimilé, peut-être hâtivement, à une chaîne composée de maillons articulés, alors que le fil est l'objet d'une continuité mécanique et possède une rigidité. On a ensuite étudié si l'assimilation de la figure d'équilibre à une parabole était valide, étant donnée la précision recherchée. On a aussi vérifié que le système était en équilibre pour l'ensemble des figures aux appuis dénivelés, si la flèche maximale était bien au milieu de la portée et quelle était son expression. Enfin, on a traité le problème de la mesure très précise avec un appareil qui change de forme en fonction de la dénivelée de ses appuis.***

La chaînette

La chaînette est la figure d'équilibre d'une chaîne pesante, tendue entre deux points, et composée de maillons articulés. On admettra que la figure d'équilibre est une courbe en cosinus hyperbolique ; on verra que c'est inexact si les constantes d'intégration ne sont pas déterminées.

On cherche à établir l'équation différentielle de l'équilibre en un point de la courbe. Appelons T la tension en un point courant de la courbe et $T + dT$.

La tension opposée au poids du segment de fil est $q.ds$, q étant le poids à l'unité de longueur. On a nécessairement : $dT = q.ds$

Divisons T en deux composantes l'une horizontale $T.\cos\alpha$ l'autre verticale $T.\sin\alpha$.

Si on décrit la courbe de la figure d'équilibre avec les abscisses en x et les ordonnées en z la pente en un point sera $\frac{dz}{dx} = tg\alpha$

Remarquons que les efforts horizontaux se réduisent à la tension uniforme appliquée aux appuis et se propagent tout au long de la courbe. Soit H cette tension en unités de poids. On a $T.\cos\alpha = H$ et par conséquent $T.\sin\alpha = \Sigma\, q.ds$

La composante verticale est composée du poids du fil, du point le plus bas de la courbe situé au milieu de la portée où ce poids vertical est nul. En effet, la tension se réduit à $T=H$, au point considéré de la courbe.

On a donc $\frac{dz}{dx} = tg\alpha = \frac{\int q.ds}{H} = \frac{\int q.\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dx}{H}$ avec $ds^2 = dx^2 + dz^2$,

puis $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}.dx$

Cette équation différentielle a pour solution : $Argsh\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{q.x}{H}$,

En inversant cette formule on a $\frac{dz}{dx} = sh\frac{q.x}{H}$

puis en intégrant une seconde fois on trouve $z = \frac{H}{q}.ch\frac{q.x}{H}$

Il reste à déterminer les constantes d'intégration, qu'on a ignorées pour arriver plus rapidement au résultat. Au premier appui de gauche on devrait évidemment avoir $z = 0$ alors qu'on trouve $z = \frac{H}{q}.ch(0) = z = \frac{H}{q}$.

Retranchons cette valeur de la précédente $z = \frac{H}{q}(ch\left(\frac{q.x}{H}\right) - 1)$

C'est sous cette forme qu'est exprimée l'équation de la chaînette dans le document Internet du CERN. On doit toutefois déterminer la seconde constante d'intégration. Au second appui on doit avoir aussi z = 0 alors qu'on trouve

$$z = \frac{H}{q}.(ch\frac{q.L}{H} - 1)$$

En définitive $z = \frac{H}{q}.\left|(ch\frac{q.x}{H} - 1) - (ch\frac{q.L}{H} - 1).\frac{x}{L}\right|$

$Q = q.L$ étant le poids total du fil on a

$$z = \frac{H}{q}.\left|(ch\frac{q.x}{H} - 1) - (ch\frac{Q}{H} - 1).\frac{x}{L}\right|$$

et, si on s'en tient aux deux premiers termes du développement de cosinus hyperbolique :

$$z = \frac{H}{q}.\left(\frac{q^2.x^2}{2.H^2} - \frac{Q^2}{2.H^2}.\frac{x}{L}\right) = \frac{q.x^2}{2.H} - \frac{q.L^2}{2.H}.\frac{x}{L} = \frac{q}{2.H}.\left(x^2 - L.x\right)$$

La flèche est maximum au milieu de la portée pour $x = L/2$, d'où $f = -\frac{q}{H}.\frac{L^2}{8} = -\frac{Q.L}{8.H}$ et enfin $f = -\frac{Q}{8.H}.L$ avec $Q = q.L$ poids total du fil. Cette approximation est donc faite par défaut puisque tous les termes de $ch(x)$ sont positifs ; donc la flèche réelle sera plus forte.

NDLR : L'AFT et XYZ ont appris récemment avec tristesse et regret le décès de Claude Million le 15 octobre 2010.
La revue de l'association doit beaucoup à la contribution de Claude Million car ça n'est pas moins de trente articles de sa main qui ont été publiés au fil des numéros ces quinze dernières années. La parution de son dernier sujet dans le n° 127 d'XYZ, à titre posthume, se trouve être notre façon de lui rendre hommage, de marquer la reconnaissance de l'AFT et d'exprimer sa sympathie à sa famille.
Sa disparition n'a pas permis qu'il puisse échanger avec Thomas Touzé. Dans un encadré en fin d'article ce dernier donne un éclairage à son sujet qui aurait, à n'en pas douter, appelé la compréhension de Claude Million. Cela n'enlève rien à la véracité de son développement théorique en l'absence des précisions de Thomas Touzé.

L'approximation faite revient à transformer la courbe en parabole, ou encore à admettre que son poids est proportionnel à l'abscisse x plutôt que la longueur réelle du fil. On aurait alors la relation très simple :

$$\frac{dz}{dx} = tg\alpha = \frac{\int q.dx}{H}.$$

La tension T à assurer aux appuis devra être une composition de H et de $Q/2$ soit

$$T = \sqrt{H^2 + \frac{Q^2}{4}}$$

La rigidité du fil

La démonstration ci-dessus ne tient pas compte de la rigidité du fil. Si on rapproche les deux extrémités au point de les confondre, la chaînette donnera deux droites égales et parallèles avec une articulation parfaite au point le plus bas ; par contre le fil formera une boucle car il est rigide et il exercera une poussée horizontale sur ses appuis soit -H, cette figure d'équilibre est totalement contraire à celle de la chaînette. Le problème à traiter est donc de savoir si cette assimilation est acceptable ou non.

Calculons rapidement la flèche d'une barre uniformément pesante sous son propre poids. Rappelons, à partir de la charge p par mètre uniforme le long de la portée, comment on calcule la flèche par quadruple quadrature.

On notera la relation entre les efforts et les déformations :

$E.I.\frac{d^2z}{dx^2} = M(x)$ avec

E module d'Young soit 14 000 à 16 000 $\frac{kg}{mm^2}$ pour l'invar : on adoptera $15.10^9 kg/m^2$.

I moment d'inertie de la section en m^4, soit $I = 0{,}3639.10^{-12} m^4$ pour une section de diamètre de 1,65 mm. On a $E.I = 5{,}46.10^{-3} kg.m^2$

Calculons $M(x)$ à partir de l'appui de gauche, avec les mêmes notations :

$$E.I.\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{p}{2}.(L.x - x^2)$$

en intégrant une première fois on obtient le produit de la pente de la courbe par $E.I$

$E.I.\frac{dz}{dx} = \frac{p}{2}.(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + A)$ qui est nulle pour $x = L/2$, d'où $A : -\frac{L^3}{12}$.

Et enfin, on intègre une seconde fois

$E.I.\frac{dz}{dx} = \frac{p}{2}.(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{L^3}{12})$ ce qui donne

$E.I.z = \frac{p}{2}(\frac{L.x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3.x}{12} + B)$ qui est nulle pour $x = L$, d'où $B = 0$.

Cette fonction est maximum pour $x = L/2$. On a alors, en ce point :

$$f_b = -\frac{5.p.L^4}{384.E.I}.$$

En restant dans le domaine élastique, ce qui est impératif pour un instrument de mesure des longueurs, qui, sans cela, perdrait son étalonnage, on peut appliquer le principe de superposition de deux états de contraintes.

On écrit $f_b = f_c$, donnant ainsi à la flèche de la barre rigide la même valeur que la flèche de la chaînette infiniment souple et on calcule le rapport p/q :

charge de la barre rigide/ charge de la chaînette souple pour cette même flèche :

$$-\frac{q}{H}.\frac{L^2}{8} = -\frac{5.p.L^4}{384.E.I}$$

On a :

$$\frac{p}{q} = \frac{384.E.I}{40.L^2.H} = \frac{384 \times 5{,}46 \times 10^{-3}}{40 \times 21^2 \times 15} = \frac{2{,}1}{264600} \approx \frac{1}{100000}$$

pour une longueur de fil de 21 m et une tension H de 15 kg. L'effet de flexion est négligeable. La chaînette est donc une excellente approximation de la déformée du fil.

La flèche de la chaînette assimilée à une parabole, sera, pour une portée de 21 m, une densité de l'invar de 8,125 gr/cm^3, et un poids au mètre linéaire de $q = 17{,}32$ *gr/m* :

$$f = -\frac{Q}{8.H}.L = \frac{21 \times 0{,}01732}{15} \times \frac{21}{8} = 0{,}0064m$$

La parabole est-elle une approximation correcte ?

On tient compte du premier terme négligé dans le développement en série :

$z = \frac{H}{q}.\left|(ch\frac{q.x}{H} - 1) - (ch\frac{q.L}{H} - 1).\frac{x}{L}\right|$. Pour x = L/2 on aurait :

$$z = \frac{H}{q}.\left|(ch\frac{q.L}{2.H} - 1) - \frac{1}{2}.(ch\frac{q.L}{H} - 1)\right|$$

$z = \frac{H}{q}.\left(\frac{q^2.x^2}{2.H^2} + \frac{q^4.x^4}{24.H^4} - \frac{Q^2}{2.H^2}.\frac{x}{L} - \frac{q^4.L^4}{24.H^4}\right)$, d'où

$\delta\Delta z = \frac{q^3.x^4}{24.H^3} - \frac{1}{2}.\frac{q^3.L^4}{24.H^3} = \frac{q^3}{48.H^3}\left(\frac{L^4}{16} - L^4\right) = -\frac{1}{48} \times \left(\frac{0{,}01732}{15}\right)^3 \times \left(\frac{21^4}{16} - 21^4\right)$,

Soit 5,51µm.

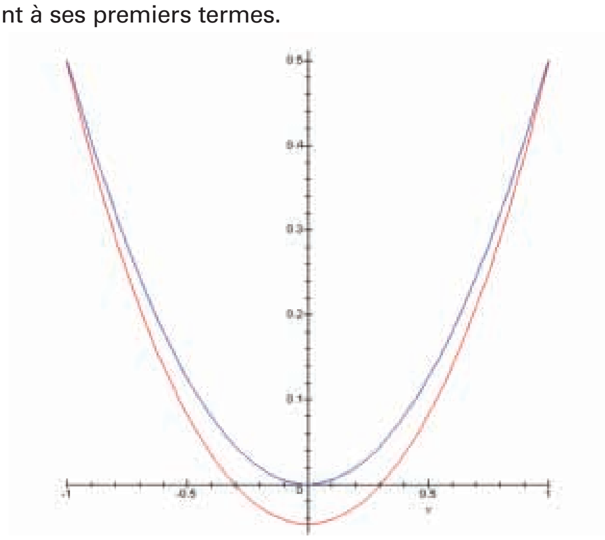
Si la précision du µm recherchée par le CERN est sincère et utile, s'en tenir aux deux premiers termes du développement en série serait très insuffisant, surtout pour des fils de 91 m. On aurait alors, avec la même la tension H = 15 kg

$\delta\Delta z = -\frac{1}{48} \times (\frac{1}{866{,}05})^3 \times (\frac{91^4}{16} - 91^4) = -0{,}002000m$ soit 2 000 µm

Le terme $\frac{q}{H} = \frac{1}{\lambda}$ a la dimension m^{-1} de l'inverse d'une longueur. Si on conserve les valeurs qu'on a données pour un fil géodésique soit L = 21 m, on aura :

$$\lambda = \frac{15}{0{,}01732} = 866{,}05m, \quad \lambda^3 = 649576215m^3$$

Par récurrence le terme suivant serait $-\frac{1}{48}.\frac{63}{64}.\frac{L^6}{\lambda^5}$, négligeable pour 21 m. Il ne le serait plus pour un fil de 91 m puisqu'il vaudrait 24 µm, en plus du calcul précédent. Dans ce cas il serait nettement plus simple d'utiliser le calcul rigoureux et de ne pas continuer à développer la série de *ch(x)* en la limitant à ses premiers termes.



Le cas des appuis dénivelés

Pour plus de simplicité on part de l'équilibre d'un fil horizontal. L'appui de gauche A a pour réaction horizontale *H* et la réaction verticale est égale à la moitié du poids total du fil. La pente de cette réaction totale sera :

$$\frac{dz}{dx} = -poids\ du\ fil / 2.H$$

en revanche, à l'appui de droite, on aura

$\frac{dz}{dx} = poids\ du\ fil / 2.H$, avec, au milieu du fil $\frac{dz}{dx} = 0$, soit :

$$\frac{dz}{dx} = sh(\frac{q.x}{H}.) + C = 0$$

$$C = -sh(\frac{q}{2}.\frac{L}{H}) = -sh(\frac{q.L}{2.H}) = -(\frac{q.L}{2.H} + \frac{q^3L^3}{8.H^3} + \frac{q^5L^5}{32.H^5} + ...),$$

$$\frac{dz}{dx} = sh(\frac{q}{H}.x) - sh(\frac{q}{H}.\frac{L}{2})$$

pour x = 0 on a $\frac{dz}{dx} = -sh(\frac{q}{H}.\frac{L}{2})$

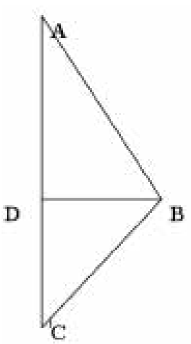
pour x = L on aura aussi $\frac{dz}{dx} = +sh(\frac{q}{H}.\frac{L}{2})$

Le poids total du fil est $Q = 2.H.sh(\frac{q}{H}.\frac{L}{2})$

Enfin la longueur totale du fil est

$$S = \frac{Q}{q} = \frac{2.H}{q}.sh(\frac{q}{H}.\frac{L}{2}) = 2.\lambda.sh(\frac{L}{2.\lambda}).$$

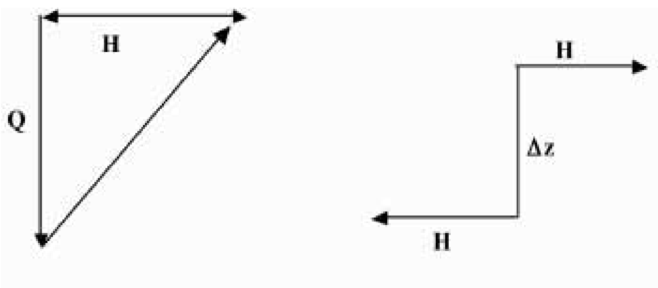
On se sert de ce référentiel pour traiter le cas des fils inclinés, les appuis étant dénivelés :



$\vec{DB}$ et $\vec{BD}$ représentent les tractions horizontales sur le fil, égales et opposées, $\vec{DA}$ représente la réaction verticale sur l'appui de gauche, $\vec{CD}$ la réaction verticale sur l'appui de droite et $\vec{AC}$ est le poids total du fil. Le système est en équilibre lorsque $\vec{AD}$ = $\vec{DC}$ les appuis de droite et de gauche étant au même niveau. Il n'en est plus de même lorsque les appuis sont dénivelés.

Dans les systèmes mécaniques réels on doit atteindre la limite des possibilités lorsqu'un des appuis est totalement déchargé de toute réaction verticale, c'est-à-dire dans la situation de diagramme des forces selon le schéma suivant A et D sont confondus et les vecteurs opposés $\vec{H}$ sont en B à l'horizontale, le vecteur $\vec{Q}$ est vertical et se termine en C. AB s'est déplacé vers le haut. Si on déplaçait AD.B plus haut on créerait une réaction verticale négative à l'appui de gauche le plus bas, qui "tirerait" sur l'appui le plus haut. Compte tenu des dispositifs mécaniques utilisés on a considéré qu'on ne pouvait pas aller au-delà. On verra que cela limite considérablement les possibilités de *"chaîner en pente".* Toutefois il faut considérer qu'au-delà cela augmenterait aussi la traction sur le fil. Il existera donc une limite ultime de contrainte du métal sans déformation permanente.

On doit vérifier que l'équilibre du système fil-appuis est encore assuré mais, cette fois-ci, en rotation. En effet, nous appliquons deux efforts horizontaux dénivelés soit une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.



Le moment de rotation du système fil-appuis sera *H.Δz*, *Δz* étant la dénivelée entre les deux appuis. Ce moment est compensé par un moment inverse dû au poids du fil par rapport à l'appui de droite qui supporte, seul, une réaction égale au poids de ce fil. L'appui le plus bas est lui totalement "déchargé" verticalement, il ne supporte que la traction horizontale *H*. Le poids du fil agit à son centre de gravité. Il nous faudra calculer la position du centre de gravité d'une demi chaînette. Ce résultat n'ayant pas été trouvé dans la littérature immédiatement disponible, c'est-à-dire sur Internet on développera ce point rapidement. On prend l'appui de gauche, le plus bas, comme origine des coordonnées, puis on pose

$\frac{x}{\lambda} = u; \frac{z}{\lambda} = v; \frac{L}{\lambda} = l; \frac{s}{\lambda} = \sigma;$ en rappelant que $\frac{q}{H} = \frac{1}{\lambda}$ on voit que λ a les dimensions d'une longueur. On travaille, par conséquent, sur un "modèle réduit" à l'échelle $\frac{1}{\lambda}$. En outre, on admet, ce qui est souvent le cas, que le fil est étalonné "à plat" (sans flèche) sous tension de *H*. On a

$$l = \arg sh(\frac{longueur\ du\ fil \quad S}{\lambda}) = \arg sh(\Sigma) = Log(\Sigma + \sqrt{\Sigma^2 + 1}),$$

soit pour un fil de 91 mètres : *l = 0,1048823694* nombre pur (sans dimension) et $\frac{S}{\lambda} = \Sigma$.

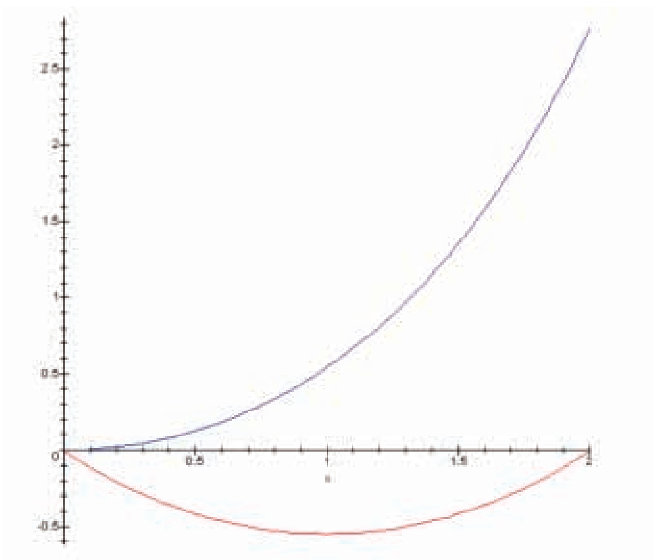
On notera que sur le "modèle réduit" la pente du fil est égale à *sh(u)* ainsi que la longueur développée du même fil, soit $\sigma = \frac{dv}{du} = sh(u)$, ces deux paramètres étant exprimés en nombres sans dimension. Dans le cas considéré, la dérivée à l'extrémité haute du fil est

$\Sigma = \frac{dv}{du} = \frac{Q}{H} = sh(l)$, par conséquent :

$$ch(l) = \sqrt{1 + \frac{Q^2}{H^2}} = \Sigma + 1 = \frac{\Delta z}{\lambda} + 1 \quad = 1.05505189,$$

$ch(l) - 1 = \sqrt{1 + \frac{Q^2}{H^2}} - 1 =$ 0,005505189, d'où la pente limite :

$$p_{limite} = \frac{ch(l) - 1}{l} = \frac{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{H^2}} - 1}{l} = 0,052489175$$ soit environ 5%.



Pour un fil de 21 mètres, dans les mêmes conditions de poids au mètre *q* et de tension *H*, la pente limite ne serait que de 1 %. On remarquera qu'en diminuant la tension du fil *H*, on diminue λ, on augmente la pente limite, mais bien entendu, on modifie aussi la géométrie du fil et son étalonnage, donc sa longueur développée.

On calcule l'abscisse du centre de gravité du fil ; l'élément différentiel $d\sigma$ d'arc sera en abscisse *du*, en ordonnée *sh(u).du*, l'hypoténuse sera égale à *ch(u).du* soit : $d\sigma = ch(u).du$. Le calcul du centre de gravité sera donné par :

$$u_{cg} = \frac{\int_0^l u.ch(u).du}{\int_0^l ch(u).du} = \left[\frac{u.sh(u) - ch(u)}{sh(u)}\right]_0^l = l - \frac{ch(l) - 1}{sh(l)},$$

pour mémoire l'ordonnée serait : $v_{cg} = \frac{ch(l) - 1 + l}{2.sh(l)}$.

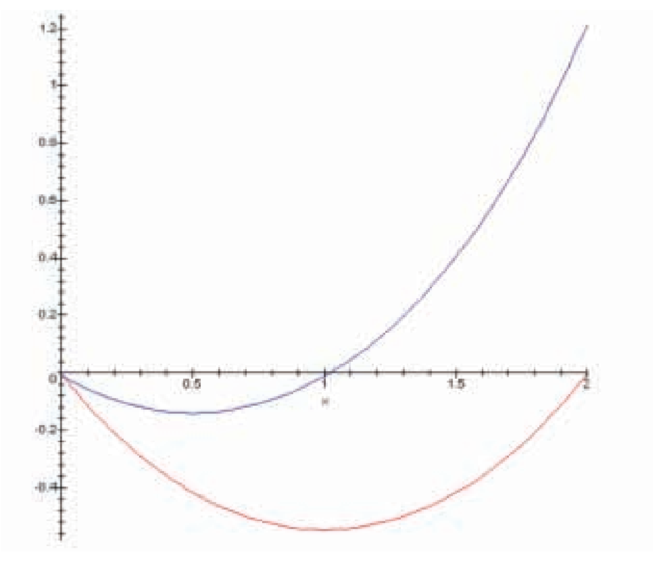
Le bras de levier du mouvement de rotation sera donc : $-\frac{ch(l)-1}{sh(l)}$, le poids du fil étant *sh(l).q.λ*, d'où le moment *-(ch(l)-1).λ.q = -(ch(l)-1).H*, la somme des moments étant nulle la stabilité en rotation est donc assurée. Ceci a pour conséquence secondaire que toutes les hypothèses de base utilisées sont valides : égalité des réactions horizontales *H* et *–H* et validité du schéma des forces et des réactions aux appuis. On peut généraliser pour les cas intermédiaires :

On prend pour origine des coordonnées la partie la plus basse de la chaînette, les distances de ce point a l'appui de droite et de gauche seront respectivement l_d et l_g avec $l_d+l_g = l$ Sur le "modèle réduit" la différence de niveau entre les appuis de droit D et de gauche G sera de :

$\frac{\Delta z}{\lambda} = ch(l_d) - ch(l_g)$ et le moment de renversement sera de :

$H.(ch(l_d)-(ch(l_g))$

Le couple des poids du fil se divise en deux parties à gauche et à droite de l'origine ; à gauche : $H.(ch(l_g))$, à droite $-H.(ch(l_d))$. L'équilibre au renversement est assuré dans tous les cas, y compris en dehors des limites concernées et s'applique à d'autres domaines (lignes électriques et les téléphériques…).



La dénivelée en général et la dénivelée limite peuvent être calculées par une autre relation. En effet on a :

$$ch(l_d) - ch(l_g) = 2.sh\left(\frac{l_d + l_g}{2}\right).sh\left(\frac{l_d - l_g}{2}\right)$$

dont les termes peuvent être identifiés de la façon suivante :

$2.sh\left(\frac{l_d + l_g}{2}\right) = \Sigma = \frac{91}{\lambda}$ dans notre exemple, c'est la longueur du fil le second terme du produit $sh\left(\frac{l_d - l_g}{2}\right)$ correspond au sinus hyperbolique de la demi différence entre la portée de l'appui de droite au point le plus bas de la chaînette et la portée de l'appui de gauche et ce même point. La formule se réduit à :

$$p_{limite} = \frac{ch(l_d) - ch(l_g)}{l} = \frac{\Sigma}{l}.sh\left(\frac{l_d - l_g}{2}\right), \quad p_{limite} = \frac{ch(l_d) - ch(l_g)}{l} = \frac{\Sigma}{l}.sh\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\Sigma^2}{2.l} = \frac{\Sigma}{2}$$

dans le cas que nous traitons. Résultat assez étonnant pour être signalé.

La flèche maximale est-elle au milieu de la portée ?

On a vu plus haut que $p_{limite} = \frac{ch(l) - 1}{l} = \frac{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{H^2}} - 1}{l}$

La flèche sera maximale lorsque la pente de la chaînette, et sa longueur seront égales à la pente entre les deux appuis, son abscisse sera alors de :

$u_f = \arg sh\left(\frac{ch(l) - 1}{l}\right) = \arg sh\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{Q^2}{H^2}} - 1}{l}\right)$ avec

$\arg sh(\sigma_f) = Log(\sigma_f + \sqrt{\sigma_f^2 + 1})$

il serait étonnant que pour tous les cas de figure $\frac{u_f}{l} = \frac{1}{2}$!

Pourtant :

Dans le cas de la pente limite, traité plus haut, on aurait tous calculs faits u_f : 0,0524654102

Pour la pente maximale 0,0524654102/0,1048823694 = 0,50028045, c'est pourtant vrai ou presque !

On peut tenter une approche approximative ; en notant que σ est petit. On a d'abord

$\sqrt{\sigma^2 + 1} = 1 + \frac{\sigma^2}{2} + \ldots$ puis

$$\arg sh(\sigma) = Log\left(1 + \sigma + \frac{\sigma^2}{2}\ldots\right) = \left(\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\left(\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2} \ldots = \sigma + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\left(\sigma^2 + \sigma^3 + \frac{\sigma^4}{4}\right)}{2} \ldots = \sigma - \frac{\sigma^3}{2} - \frac{\sigma^4}{8} \ldots$$

D'où $\frac{u_f}{l} = \frac{\sigma_f - \ldots}{l} = \frac{1}{2}$ est le résultat constaté.

Si on reprend la formule approximative de σ_f citée plus haut, on a $p_{limite} = \frac{\Sigma}{2} = \sigma_f$ et $\frac{\sigma_f}{\Sigma} = \frac{1}{2}$.

La flèche maximale est presque au milieu de la portée, à peu près.

Réduction des mesures à l'horizontale

Lorsque les appuis sont dénivelés, la forme du fil change. Peut-être n'est-il pas possible de négliger ce point lorsqu'on recherche une grande précision. Rappelons que la projection horizontale d'un fil de longueur développée Σ mesurera pour la pente limite

$$l_{p_{limite}} = \arg sh\left(\frac{longueur\ du\ fil\quad S}{\lambda}\right) = \arg sh(\Sigma) = Log(\Sigma + \sqrt{\Sigma^2 + 1})$$

donc, pour un fil de S= 91 mètres, Σ = 91/ 866,05 = 0,105074765.

Soit $L_{Plimite}$ = l.λ ; l=0,1048823694 puis L= l x 866.05 = 90,833376 mètres.

De la même manière, et dans les mêmes conditions, la projection horizontale de la longueur du fil, lorsque les deux appuis sont au même niveau, sera :

$$l_0 = \arg sh(\frac{longueur\ du\ fil \quad S}{2.\lambda}) = 2.\arg sh(\frac{\Sigma}{2}) = 2.Log(\frac{\Sigma}{2} + \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} + 1})$$

$L = l_o$ x 866.05 = 90,958188 mètres.

Si on applique à ce résultat la réduction à l'horizontale traditionnelle on trouve : 90,833259 mètres ; la précision du micromètre n'est, par conséquent, pas assurée. On doit donc trouver, (avec les mêmes précautions oratoires, à savoir qu'on recherche vraiment une telle précision, ce qui n'est toujours pas évident), comment franchir cette difficulté.

Il est plus difficile de traiter les situations intermédiaires, à savoir celles où le point le plus bas de la chaînette se trouve plus ou moins près d'un appui ou du milieu de la portée.

Pour un fil donné on peut réaliser un tableau dans lequel on interpolera en écrivant :

$L = (\arg sh((1-k).\Sigma) + \arg sh(k.\Sigma)).\lambda \quad avec \quad 0 \prec k \prec 1$ et

$\Delta z = (ch((1-k).\Sigma) - ch(k.\Sigma)).\lambda \quad avec \quad 0 \prec k \prec 1$

qui sera l'argument d'entrée du tableau dans lequel on pourra interpoler. Rappelons que Δz est la dénivelée entre les appuis.

Tableau pour S= 91 et λ = 866,05

k	L	Δz
0	90,833376	4,785302
0,05	90,857051	4,306396
0,10	90,878250	3,827608
0,15	90,896967	3,348925
0,20	90,913197	2,870337
0,25	90,926938	2,391826
0,30	90,938185	1,913382
0,35	90,946935	1,434990
0,40	90,953187	0,936657
0,45	90,956939	0,478312
0,50	90,958188	0,000000

Le calcul direct est un peu plus long.

Si on note $l_d - l_g = l$ *avec* $l_d > 0$ *et* $l_g < 0$ (à droite et à gauche de l'origine qui est toujours le point le plus bas de la chaînette) on peut écrire $\zeta = \frac{\Delta z}{\lambda}$

$$\zeta = ch(l_d) - ch(l_g) = 2.sh\frac{l_d + l_g}{2}.sh\frac{l_d - l_g}{2}$$

$$\Sigma = sh(l_d) - sh(l_g) = 2.sh\frac{l_d - l_g}{2}.ch\frac{l_d + l_g}{2}$$

En divisant ces deux relations, on a :

$$\frac{\zeta}{\Sigma} = \frac{\Delta z}{S} = th\frac{l_d + l_g}{2}$$

on calcule :

$$ch\frac{l_d + l_g}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\frac{l_d + l_g}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\Delta z}{S})^2}}$$

puis on reporte cette valeur dans la seconde égalité ce qui donne :

$$sh\frac{l_d - l_g}{2} = \frac{\Sigma}{2.ch\frac{l_d + l_g}{2}} = \frac{S}{2.\lambda}.\sqrt{1 - (\frac{\Delta z}{S})^2}$$ puis :

$$Argsh(\frac{l_d - l_g}{2}) = \frac{l_d - l_g}{2} = Argsh(\frac{S}{2.\lambda}.\sqrt{1 - (\frac{\Delta z}{S})^2})$$

$$L_{\Delta z} = (l_d - l_g).\lambda = 2.\lambda.Argsh(\frac{S}{2.\lambda}.\sqrt{1 - (\frac{\Delta z}{S})^2})$$

On a traité l'exemple S = 91 m et Δz = 4 m, λ = 866,05 m, on trouve L = 90,870955 m qui s'insère dans le tableau ci-dessus.

Allongement du fil sous son poids propre

On a fait l'hypothèse que le fil était étalonné "à plat", c'est-à-dire non soumis à son poids propre. Soulignons que nombreux sont les bancs d'étalonnage modernes qui traitent les fils soumis à leur contrôle en les suspendant entre des appuis placés au même niveau. Comme il est très facile de passer d'un système à l'autre, on a préféré l'autre solution qui paraît plus facile à exposer et évite les confusions entre les différentes corrections.

Notons par ω la section du fil, dans notre cas, pour le fil géodésique, ω = 2,13825 mm², le module d'Young est de $\frac{15000 Kg}{mm^2}$. Le produit E.ω = 32074 kg.

L'allongement, "à plat" sera de $al = \frac{S.H}{E.\omega}$ en mètre, S étant exprimé, aussi, en mètres, car $\frac{H}{E.\omega} = \frac{15}{32074} = 0,0004677$ est un nombre sans dimension.

L'allongement sous tension sera de +0,042558 m.

On peut comparer cette valeur à la déformation négative donnée par la flèche, sous son poids propre, les appuis étant de niveau : - 0,041812 m. Il est donc presque exact d'affirmer que "la tension compense la flèche".

Reprenons l'expression de la tension *T* dans le fil : En tout point on a $T^2 = H^2 + q^2 . s^2$, s étant la distance curviligne du point et *u* étant son abscisse comptées à partir du point le plus bas du fil pris pour origine soit : $\frac{T^2}{H^2} = 1 + \sigma^2$ ou encore $T = H.ch(u)$, l'allongement en ce point sera $al = \frac{H.ch(u)}{E.\omega}$, on a vu plus haut que $ds = ch(u)du$, puis on calcule $d(ds) = al.ds$ soit

$al.ds = \frac{H.ch^2(u)}{E.\omega}.du$ qu'il suffit d'intégrer entre 0 et l'appui voisin, on a :

$$allongement = \frac{H}{E.\omega}.\int_0^{u_a} ch^2(u).du = \frac{H}{2.E.\omega}.\left[ch(u).sh(u) + u\right]_0^{u_a}$$

a, étant l'indice de l'appui, d'où *allongement total* =

$\frac{H.\lambda}{2.E.\omega}\left[\left[ch(u).sh(u) + u\right]_0^{u_d} + \left[ch(u).sh(u) + u\right]_0^{u_g}\right]$ *g* et *d* étant les

indices des appuis de gauche et de droite.
On se souvient $sh(u) = \sigma$, donc $sh(u_d) = \sigma_d$ $sh(u_g) = \sigma_g$,
et $ch(u) = \sqrt{1 + sh^2(u)} = \sqrt{1+\sigma^2}$ d'où :

allongement total $= \frac{H.\lambda}{2.E.\omega}\left[\left[\sqrt{1+\sigma^2}.\sigma + u\right]_0^{u_d} + \left[\sqrt{1+\sigma^2}.\sigma + u\right]_0^{u_g}\right]$

$$= \frac{H.\lambda}{2.E.\omega}\left(\sqrt{1+\sigma_d^2}.\sigma_d + u_d + \sqrt{1+\sigma_g^2}.\sigma_g + u_g\right)$$

avec, comme plus haut, $\sigma_g = k.\Sigma$, $\sigma_d = (1 - k).\Sigma$, $u_g = Argsh(\sigma_g)$, $u_d = Argsh(\sigma_d)$, $u_d + u_g = l$

projection horizontale de l'allongement total = allongement total.L/S

Tableau pour S= 91, λ = 866,05, $\frac{H}{E.\omega} = 0{,}0004677$, l= 0,1048823694.L/S

k	Δz	diff d'allongement sous tension µm a	projection géométrique due à la flèche L	Somme L+a
0	4,785302	780	90,833376	90,834655
0,05	4,306396	668	90,857051	90,857719
0,10	3,827608	570	90.878250	90.878820
0,15	3,348925	482	90,896967	90,897449
0,20	2,870337	406	90,913197	90,913603
0,25	2,391826	342	90,926938	90,927280
0,30	1,913382	290	90,938185	90,938475
0,35	1,434990	243	90,946935	90,947178
0,40	0,936657	219	90.953187	90,953405
0,45	0,478312	201	90,956939	90,957140
0,50	0,000000	195	90,958188	90,958383

Dans le cas où le fil aurait été suspendu pendant l'étalonnage il suffit de retrancher le dernier nombre de la troisième colonne (195 µm) à ceux qui le précèdent, et à toutes les valeurs de la dernière colonne on ajoutera 0,041617 m, soit 0,041812-0,000195 m. C'est-à-dire qu'on retranche l'allongement élastique à l'effet de flèche calculé plus haut pour des appuis non dénivelés.
Certains auteurs admettent que l'erreur moyenne de pointé sur le fil est de 3µm pour un écart-type de 5µm, si tel est vraiment le cas, notre démarche, bien que surprenante, n'aura pas été inutile.

Conclusions

Le but de cette étude était de vérifier un certain nombre d'affirmations qui nous étaient apparues péremptoires. Certaines étaient exactes, d'autres, plus nombreuses, acceptables bien qu'approximatives.
On a traité le problème de la réduction à l'horizon des mesures dont les termes sont dénivelés et montré, qu'en toute rigueur, la réduction à l'horizon purement géométrique était insuffisante pour obtenir la précision recherchée.
Enfin, pour la même raison, on a pris en compte la déformation due à la variation de tension le long du fil suspendu.
En revanche, on n'a pas traité le problème de l'indécision sur le module d'Young E (± 7%) estimant qu'il peut être abordé, très aisément, au moment de l'étalonnage en même temps que celui, semblable, de la section "exacte" du fil. On n'a pas non plus traité celui des corrections de température, les exposés et les solutions sortant du cadre de cette contribution.

Réponse de Thomas Touzé

La disparition de M. Million est d'autant plus regrettable que la discussion qui aurait pu naître de ses calculs appliqués à mes travaux de thèse aurait certainement été des plus passionnantes. Malheureusement le destin en a voulu autrement. Je ne peux que le déplorer en ajoutant néanmoins quelques précisions sur son travail.

Les caractéristiques du fil considéré par M. Million dans ses calculs sont celles du distinvar. Cet appareil permettait d'obtenir des distances en tendant un fil d'invar calibré. Il est désormais désuet compte tenu des capacités actuelles des distancemètres.

Le fil actuellement utilisé dans les alignements de haute précision du CERN est une fibre de carbone autour de laquelle se trouve une tresse de polymère en *peek*. Il est nettement plus fin, plus léger et de moindre élasticité que le fil d'invar de M. Million. Voici un tableau comparatif de ces caractéristiques, ramenées dans le Système International :

Paramètre	Carbone peek	Fil d'invar
Masse linéaire	0.235×10^{-3} kg/m	17.32×10^{-3} kg/m
Tension	147 N	147 N
Diamètre	0.40 mm	1.65 mm
Module de Young	294 GPa	147 GPa

Tab. 1 : **Caractéristiques des fils tendus utilisés, respectivement par les géomètres du CERN et dans les calculs de M. Million**

Ainsi, l'erreur d'approximation de la chaînette en s'arrêtant au degré deux de son développement limité engendre, à 140 m, une erreur de 60 nm dans le cas du fil de carbone peek contre 2.5 cm dans celui de l'invar de M. Million. Mes approximations légitimement mises en doute par M. Million sont tout à fait satisfaisantes, compte tenu des caractéristiques du fil employé, manquantes dans mon article.

Contact : Thomas TOUZÉ
ttouze@hotmail.fr

Référence :

T. Touzé, *Calcul des flèches de fils tendus depuis la mesure de leurs fréquences d'oscillation transversale,* CERN, 2010.
https://edms.cern.ch/file/1108245/1/frequences_fils.pdf