Ballon rond et géométrie

L'équipe de France de football vient de se qualifier pour disputer la coupe du Monde, en 2006. Examinons de près, ce fameux ballon rond

Robert VINCENT

*Un ballon de football est construit à partir d'une figure polyédrique particulière.
Après avoir rappelé qu'il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes, l'intérêt se porte sur un certain polyèdre formé par l'assemblage d'un savant panachage de polygones réguliers. Il est montré qu'il est possible, pour former un polyèdre convexe fermé, d'assembler des facettes pentagonales et hexagonales ayant toutes une même longueur de côté, à raison de deux hexagonales pour une pentagonale aboutissant à chaque sommet du polyèdre.
Ce polyèdre est formé de 32 facettes, 20 hexagones et 12 pentagones, et présente 60 sommets et 90 arêtes toutes de même longueur et toutes tangentes en leur milieu, à une sphère dont le diamètre est égal au triple de leur longueur multiplié par le nombre d'or !
Telle est la figure, souvent insoupçonnée par les amateurs de football, à partir de laquelle est confectionné le "ballon rond", qui est rendu effectivement sphérique par une courbure adéquate des arêtes et un bombement des facettes, maintenus par un gonflage approprié.*

Les polyèdres réguliers

Avant d'aborder l'objet de notre propos, et afin de nous familiariser avec les problèmes de polyèdres, il n'est pas inutile d'évoquer les cinq classiques polyèdres réguliers convexes.
L'assemblage de figures élémentaires de géométrie plane, comme le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier, a, dès l'antiquité, été l'objet de recherches et il a été établi très tôt, qu'il n'existait que cinq polyèdres réguliers convexes, chacun formé par l'assemblage de polygones réguliers tous semblables.

L'assemblage d'hexagones réguliers exige une surface plane, Cet assemblage est utilisé par exemple, pour carreler le sol d'une cuisine avec des tomettes hexagonales. On conçoit dès lors, qu'il ne sera possible d'édifier un polyèdre régulier convexe, qu'avec des polygones d'ordre inférieur à celui de l'hexagone, donc exclusivement formé par l'assemblage soit de triangles équilatéraux, soit de carrés, soit enfin de pentagones réguliers. On pourra envisager d'utiliser l'hexagone régulier, mais seulement en panachage avec d'autres d'ordre inférieur. Ce sera l'objet de notre propos, mais il ne s'agira plus alors de polyèdres réguliers.

Évoquons les cinq polyèdres réguliers convexes :
Les angles au sommet des trois polygones réguliers, seuls utilisables comme il vient d'être dit, sont 60° pour le triangle équilatéral, 90° pour le carré, 108° pour le pentagone régulier. Or, en un sommet d'un polyèdre régulier convexe, la somme des angles des polygones réguliers qui y aboutissent, ne doit pas excéder ni même atteindre 360°. En conséquence, en chaque sommet d'un tel polyèdre, pourront aboutir trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux, dont la somme des angles au sommet du polyèdre est respectivement de 180°, 240° et 300°. mais seulement trois carrés, dont la somme des angles au sommet du polyèdre est de 270°, ou trois pentagones réguliers dont la somme des angles au sommet du polyèdre est de 324°.
Le nombre de sommets du polyèdre régulier est obtenu en multipliant le nombre de ses faces par le nombre de sommets du polygone composant chaque face, le tout divisé par le nombre de polygones aboutissant à chaque sommet.

Polyèdres réguliers formés par des triangles équilatéraux :

- avec trois triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est 180° : **le tétraèdre** régulier (figure 1), formé par quatre triangles équilatéraux. Il a quatre sommets (4 x 3 / 3).
- avec quatre triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des quatre angles est 240° : **l'octaèdre**

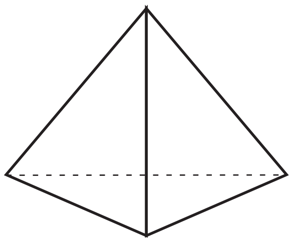

Figure 1. Le tétraèdre : 3 triangles équilatétaux aboutissent en chacun des 4 sommets

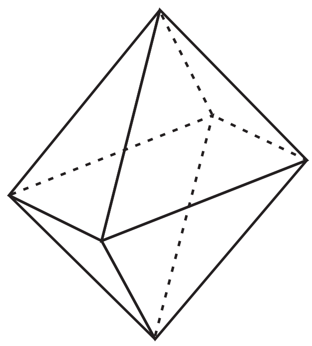

Figure 2. L'octaèdre : 4 triangles équilatétaux aboutissent en chacun des 6 sommets

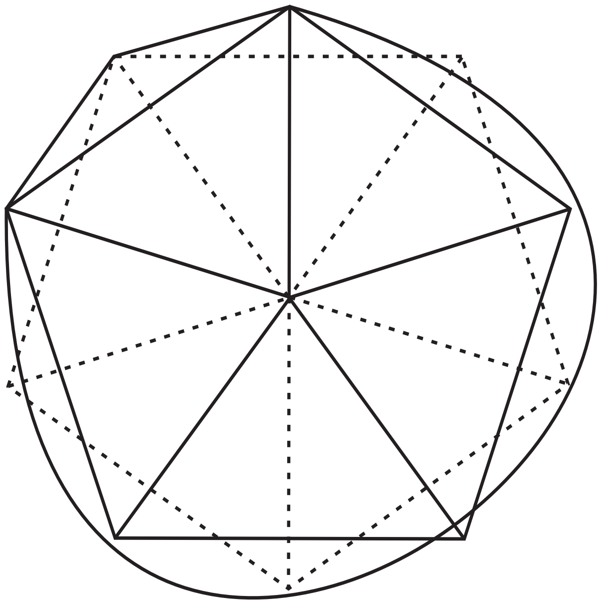

Figure 3. L'icosaèdre : 5 triangles équilatétaux aboutissent en chacun des 12 sommets

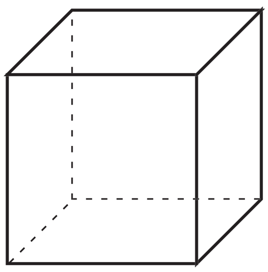

Figure 4. Le cube : 3 carrés aboutissent en chacun des 8 sommets

régulier (figure 2), formé par huit triangles équilatéraux. Il a six sommets (8 x 3 / 4).

- avec cinq triangles aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des cinq angles est 300° : **l'icosaèdre** régulier (figure 3), formé par vingt triangles équilatéraux. Il a douze sommets (20 x 3 / 5).

Polyèdre régulier formé par des carrés :
- avec trois carrés aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est 270° : **le cube** (hexaèdre régulier) (figure 4), formé par six carrés. Il a huit sommets (6 x 4 / 3).

Polyèdre régulier formé par des pentagones réguliers :
- avec trois pentagones aboutissant à chaque sommet du polyèdre, dont la somme des trois angles est 324° : **le dodécaèdre** régulier (figure 5), formé par douze pentagones réguliers. Il a vingt sommets (12 x 5 / 3).

Polyèdre complexe

Comme nous venons de le voir, il n'est pas possible de construire un polyèdre uniquement avec des hexagones réguliers. Nous allons donc tenter de construire un polyèdre, par l'assemblage en chaque sommet, de trois polygones réguliers dont la somme de leurs trois angles est le plus près

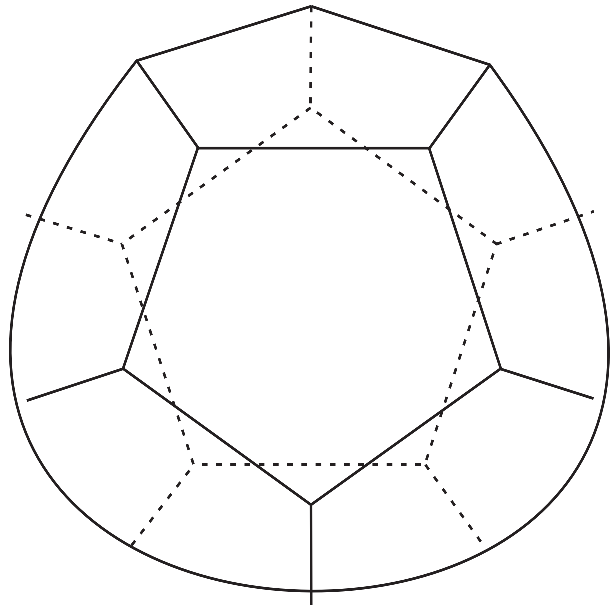

Figure 5. Le dodécaèdre : 3 pentagones réguliers aboutissent en chacun des 20 sommets

possible de 360°. Nous ne pouvons nous rapprocher plus de cette limite qu'avec deux hexagones et un pentagone dont la somme des trois angles au sommet d'assemblage est de 348°. C'est ainsi que les sommets seront les moins "pointus" possible. Ce faisant, si un tel polyèdre convexe existe, nous serons sûr d'obtenir celui se rapprochant le plus de la sphère, en ayant le plus grand nombre possible de facettes en forme de polygones réguliers.

Nous posons donc comme principe unique de construction du polyèdre recherché, qu'en chacun de ses sommets, aboutissent trois facettes contiguës, et trois seulement, dont deux sont des hexagones réguliers identiques et la troisième, un pentagone régulier ayant la même longueur de côté que celle des côtés des hexagones. Cet assemblage forme un trièdre que nous appellerons dans la suite **"trièdre élémentaire"** (figure 6). Il est facile de voir que les normales dressées au centre des deux hexagones et celle dressée au centre du pentagone se rencontrent en un même point.

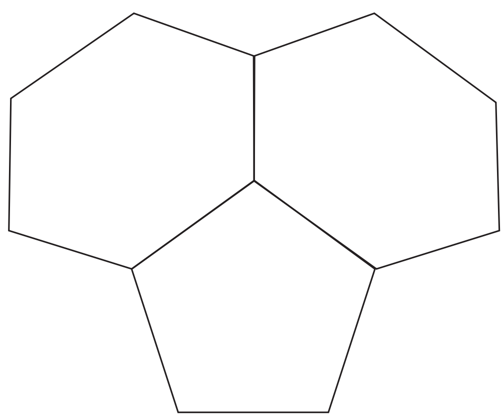

Figure 6. Le trièdre élémentaire : en son sommet aboutissent 1 pentagone et 2 hexagones

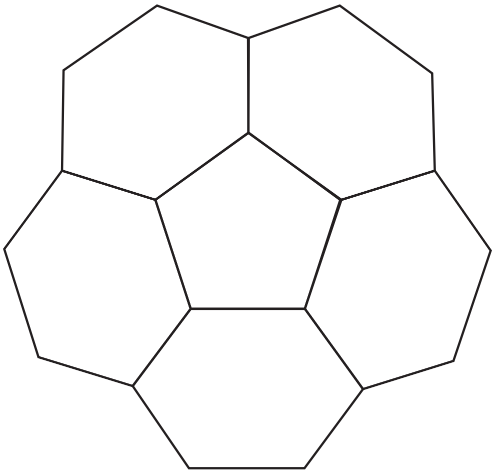

Figure 7.

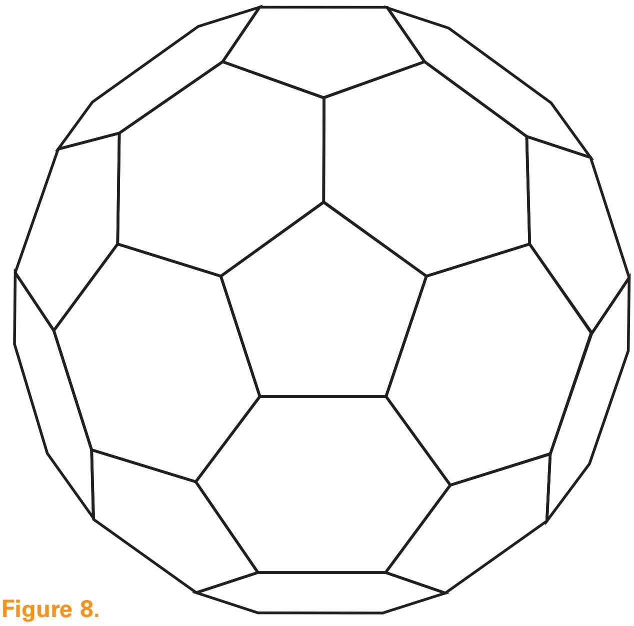

Figure 8.

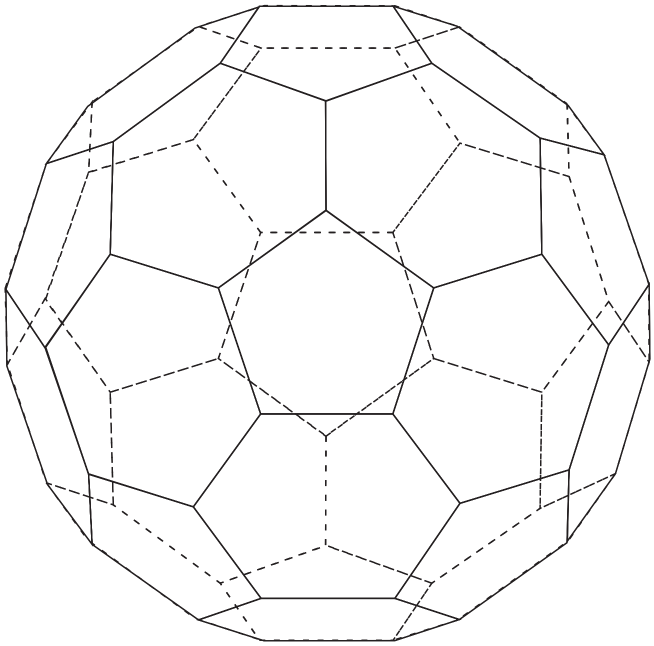

Figure 9. Le polyèdre formé de 12 pentagones et de 20 hexagones. 1 pentagone et 2 hexagones aboutissent en chacun des 60 sommets.

Nous allons montrer qu'avec cette seule condition, il existe un tel polyèdre convexe fermé, et qu'il résulte de l'assemblage de 32 facettes, dont 20 hexagones et 12 pentagones.

Construction et faisabilité du polyèdre

Dans le polyèdre envisagé, deux pentagones ne peuvent se toucher par un sommet commun, puisqu'en un sommet, un seul pentagone peut aboutir. À plus forte raison, deux pentagones ne peuvent avoir un côté commun.

Construisons alors la figure constituée d'un pentagone entouré de cinq hexagones contigus ayant un côté commun entre eux (arêtes) et avec le pentagone (figure 7). Ce pentagone et cette première couronne de cinq hexagones, forment une figure polyédrique dans l'espace. Les normales dressées au centre de chacune des six facettes polygonales, se coupent en un point, que nous pouvons appeler centre de la figure polyédrique et que nous appellerons par la suite simplement "centre du polyèdre".

Ajoutons maintenant une deuxième couronne (figure 8). À chaque extrémité (sommet) des cinq côtés communs à deux hexagones de la première couronne, va obligatoirement venir se fixer par un de ses sommets, un pentagone ayant un côté commun avec ces deux hexagones. À eux trois, ils forment bien un "trièdre élémentaire" et la normale au nouveau pentagone passe par le point de rencontre des normales aux deux hexagones, le "centre du polyèdre" défini ci-dessus. Pour terminer cette deuxième couronne, il reste à insérer cinq hexagones, intercalés entre chacun des cinq pentagones qui viennent d'être fixés. Ces nouveaux hexagones seront positionnés de telle sorte qu'ils aient côté commun avec les facettes déjà en place. Chacun forme un "trièdre élémentaire" avec son voisin et l'un des deux pentagones entre lesquels il vient d'être positionné Il n'est pas difficile de voir que les normales dressées au centre de ces dix nouvelles facettes, passent aussi par le "centre du polyèdre". Nous notons que nous avons utilisé alors 6 pentagones et 10 hexagones.

Si nous construisons maintenant une nouvelle figure polyédrique symétrique de la première par rapport au "centre du polyèdre", nous sommes assurés que les normales à toutes les facettes des deux figures polyédriques, passent par le "centre du polyèdre", et nous pouvons voir que les deux figures "s'emboîtent" rigoureusement (figure 9), pour former à elles deux, une fois assemblées, le polyèdre convexe fermé complet recherché. En effet, en chaque extrémité des dix arêtes séparant un hexagone et un pentagone de la deuxième couronne, va venir s'assembler, par un de ses sommets, un hexagone de la couronne symétrique. Réciproquement, en chacun des dix sommets d'hexagones de la deuxième couronne non commun avec un sommet de pentagone, va venir

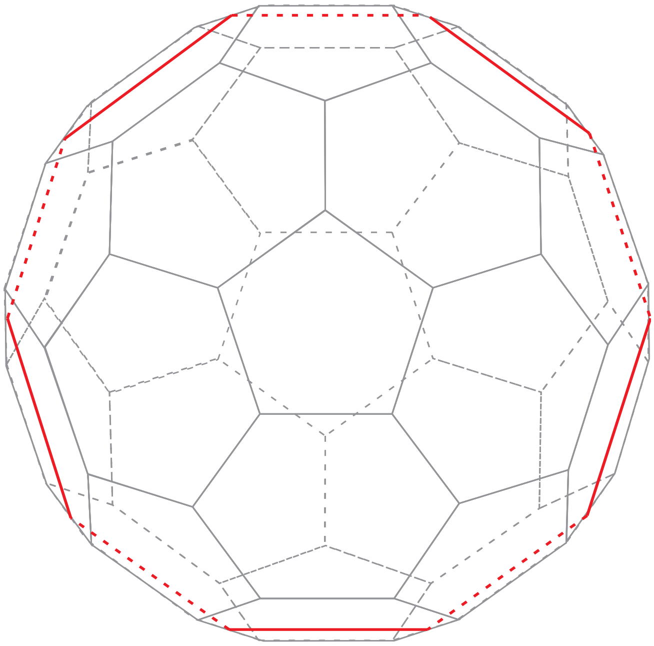

Figure 10.

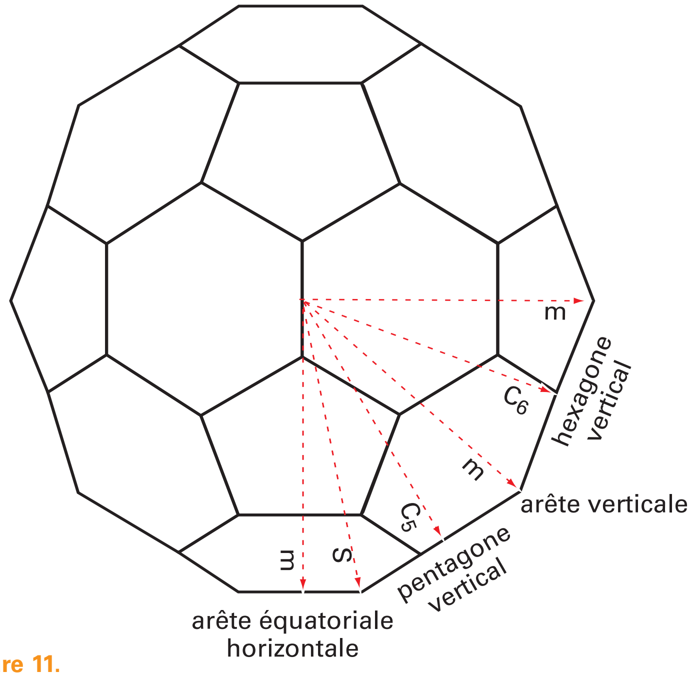

Figure 11.

aboutir une arête séparant un pentagone d'un hexagone de la figure polyédrique symétrique. Tous ces vingt assemblages forment autant de "trièdres élémentaires" dont les normales au centre de toutes leurs facettes concourent au "centre du polyèdre".

Étude du polyèdre

Nous avons ainsi construit ce polyèdre avec 12 pentagones et 20 hexagones. Il a donc 32 facettes.

Ce polyèdre présente 60 sommets, suivant la formule déjà utilisée pour les polyèdres réguliers :

$((20 \times 6) + (12 \times 5)) / 3 = 60$

Il présente 90 arêtes, puisque chacune d'elles lient deux à deux chaque sommet et que trois arêtes aboutissent à chaque sommet.

Dimensions

Pour appréhender les dimensions du polyèdre, nous allons considérer la ligne polygonale "équatoriale", celle intersectée sur le polyèdre par le plan défini par le "centre du polyèdre" et qui est parallèle au plan du pentagone initial. Ce plan coupe les cinq hexagones de la deuxième couronne et les cinq autres hexagones symétriques, au milieu de chacun de leurs 10 côtés communs (figure 10). Ce polygone est un décagone régulier dont les 10 côtés mesurent une fois et demi la longueur commune des côtés des hexagones et des pentagones, car telle est la longueur égale à la demi-somme entre un côté de l'hexagone et son double qui est la distance entre deux sommets opposés de l'hexagone.

Dans un décagone, n étant le nombre d'Or (n = 1,618...), les sommets sont distants du centre de ce polygone de n fois la longueur d'un de ses côtés[1]. Comme ces sommets sont aussi des milieux de côtés du polyèdre, nous pouvons en déduire immédiatement la distance "m" d'un milieu de côté du polyèdre au "centre du polyèdre". En prenant la longueur du côté du polyèdre pour unité de mesure, nous avons ;

$m = 3\,n / 2 = 2{,}427...$

En se rappelant que $n^2 = n + 1$, propriété résultant de la définition du nombre d'Or, la formule précédente peut aussi s'écrire :

$m = \sqrt{9\,n + 9} / 2 = 2{,}427...$

À partir de cette formule, nous allons pouvoir en déduire commodément la distance "s" d'un des 60 sommets au centre du polyèdre :

$s = \sqrt{9\,n + 10} / 2 = 2{,}478...$

et la distance "c_6" du centre d'une facette hexagonale au centre du polyèdre :

$c_6 = \sqrt{9\,n + 6} / 2 = 2{,}267...$

La distance "c_5" du centre d'une facette pentagonale au centre du polyèdre est un peu plus grande et plus complexe à calculer :

$c_5 = \sqrt{8{,}2\,n + 8{,}4} / 2 = 2{,}327...$

Une autre vue du polyèdre (figure 11), perpendiculaire à la première et centrée sur le milieu d'un côté commun à deux hexagones, montre bien toutes ces mesures.

Le périmètre du décagone est de 15, alors que celui du cercle circonscrit est de $2\,\pi\,m = 3\,\pi\,n \approx 15{,}25$

(1) voir à ce sujet dans XYZ n° 102 de mars 2005 : "Le nombre d'or et la divine proportion", par Raymond D'Hollander.

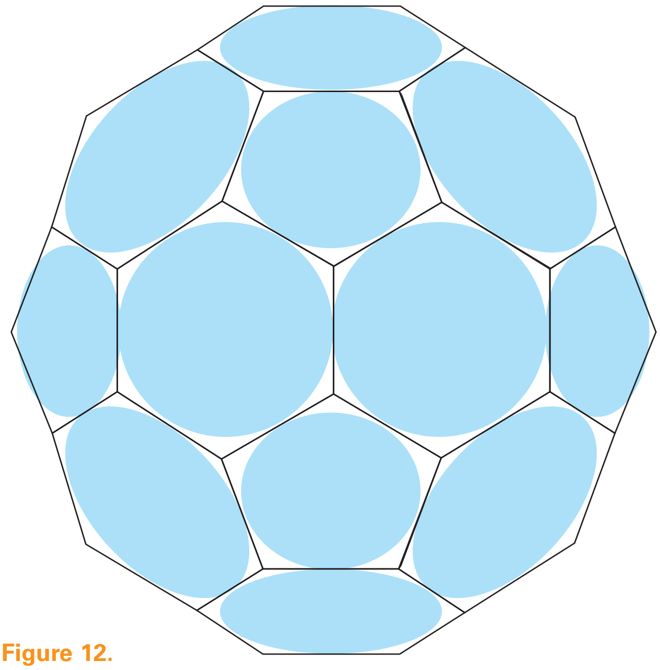

Figure 12.

Le ballon de football

La confection d'un ballon de football est basée sur le principe de ce polyèdre. Les 32 facettes sont en cuir ou en toute autre matière résistante qui se prête bien à la pression interne du ballon. Son gonflage donne à chaque arête une courbure et à chaque facette un léger bombement qui transforment le polyèdre en une forme quasiment sphérique.

Le diamètre d'un ballon de football réglementaire est de 22 centimètres environ. Nous en déduisons que la longueur commune des côtés des facettes hexagonales ou pentagonales est de 4,5 cm environ. Avec 90 arêtes, la longueur des coutures est ainsi de 4 mètres !

Pour obtenir une sphère parfaite, et si on se réfère aux sommets qui sont les noeuds de la structure, le cintrage des arêtes devraient présenter une flèche de un vingtième de leur longueur, soit 2,25 mm, et le bombement au centre des facettes, de 9 mm pour les hexagonales et de près de 7 mm pour les pentagonales.

Sphère tangente et superficies

Considérons la sphère tangente en leur milieu à toutes les 90 arêtes du polyèdre. Son diamètre 2 m est égal à trois fois la longueur commune des côtés des hexagones et des pentagones, multiplié par le nombre d'or ! Cette sphère coupe chaque face du polyèdre suivant les cercles inscrits dans les pentagones et les hexagones (figure 12). Sur les facettes, l'intérieur de ces cercles est à l'intérieur de la sphère, alors que l'extérieur de ces cercles, notamment les sommets du polyèdre, est à l'extérieur de la sphère.

La superficie "S" de cette sphère tangente aux cotés en leur milieu est :

$S = 9 \pi n^2 = 74{,}023...$

La superficie "S_6" d'un hexagone régulier est :

$S_6 = 3 \sqrt{3} / 2 = 2{,}598...$

La superficie "S_5" d'un pentagone régulier est :

$S_5 = 5\, n / 4 \sqrt{3 - n} = 1{,}720...$

La superficie "S_p" du polyèdre de 20 hexagones et de 12 pentagones est ainsi :

$S_p = 20\, S_6 + 12\, S_5 = 30 \sqrt{3} + 15\, n / \sqrt{3 - n} = 72{,}607...$

Il est à noter que la superficie de la sphère enveloppe "Se" passant par tous les sommets du polyèdre, est :

$S_e = 4 \pi s^2 = (9\, n + 10)\, \pi = 77{,}164...$

Elle dépasse les superficies S de π, et S_p de plus de 6 %.

Alors, amis lecteurs sportifs ou non, la prochaine fois, avant de "shooter" dans un ballon de football, ayez un peu de considération ! Rappelez-vous qu'il recèle un trésor de géométrie, avec de l'or en dedans ! Mais au fait, pour tirer un "penalty", vaut-il mieux que le coup de pied du buteur tape le ballon dans un pentagone (seulement 28 % de la surface) plutôt que dans un hexagone ?